Classical Strings and Membranes in the AdS/CFT Correspondence

GEORGIOS LINARDOPOULOS

Faculty of Physics,

Department of Nuclear and Particle Physics

National and Kapodistrian University of Athens

and

Institute of Nuclear and Particle Physics

National Center for Scientific Research "Demokritos"

Dissertation submitted for the Degree of

Doctor of Philosophy

at the National and Kapodistrian University of Athens

June 2015

Doctoral Committee

Supervisor

Emmanuel Floratos
Professor Emer., N.K.U.A.

Co-Supervisor

Minos Axenides
Res. Director, N.C.S.R., "Demokritos"

Supervising Committee Member

Nikolaos Tetradis
Professor, N.K.U.A.

Thesis Defense Committee

Ioannis Bakas
Professor, N.T.U.A.

Georgios Diamandis
Assoc. Professor, N.K.U.A.

Athanasios Lahanas
Professor Emer., N.K.U.A.

Konstantinos Sfetsos
Professor, N.K.U.A.

This thesis is

dedicated

to my parents

Acknowledgements

This doctoral dissertation is based on the research that took place during the years 2012–2015 at the Institute of Nuclear & Particle Physics of the National Center for Scientific Research "Demokritos" and the Department of Nuclear & Particle Physics at the Physics Faculty of the National and Kapodistrian University of Athens.

I had the privilege to have professors Emmanuel Floratos (principal supervisor), Minos Axenides (co-supervisor) and Nikolaos Tetradis as the 3-member doctoral committee that supervised my PhD. I would like to thank them for the fruitful cooperation we had, their help and their guidance.

I feel deeply grateful to my teacher Emmanuel Floratos for everything that he has taught me. It is extremely difficult for me to imagine a better and kinder supervisor. I thank him for his advices, his generosity and his love. I am deeply indebted to Minos Axenides for all his support, encouragement, help, time and advice. I would also like to thank professor Nikolaos Tetradis who was always available to help and advise me whenever it was needed.

I would also like to express my gratitude to the remaining members of the 7-member doctoral committee, professors Ioannis Bakas, Georgios Diamantis, Athanasios Lahanas and Konstantinos Sfetsos. During the PhD, I had the luck to have my research at N.C.S.R. "Demokritos" financially supported by the General Secretariat for Research and Technology of Greece and from the European Regional Development Fund MIS-448332-ORASY (NSRF 2007–13 ACTION, KRIPIS).

I am very thankful to Dr. George Georgiou who has been my closest collaborator and friend during the PhD and has significantly contributed to its completion. I would like to thank professor Stam Nicolis for many exciting discussions and his encouragement.

Finally, I would like to thank all the members of my family and especially my parents to which I dedicate this doctoral dissertation.

Prolegomena

This doctoral dissertation is based on the publications [1, 2, 3, 4]:

- G. Linardopoulos, *Large-Spin Expansions of Giant Magnons*, [arXiv:1502.01630]. To appear in Proceedings of Science, PoS (CORFU2014) 154

- E. Floratos, G. Linardopoulos, *Large-Spin and Large-Winding Expansions of Giant Magnons and Single Spikes*, Nucl.Phys. **B897** (2015) 229, [arXiv:1406.0796]

- E. Floratos, G. Georgiou, G. Linardopoulos, *Large-Spin Expansions of GKP Strings*, JHEP **03** (2014) 018, [arXiv:1311.5800]

- M. Axenides, E. Floratos, G. Linardopoulos, *Stringy Membranes in AdS/CFT*, JHEP **08** (2013) 089, [arXiv:1306.0220],

as well as the following talks:

- *Large-Spin Expansions of Giant Magnons*. Workshop on Quantum Fields and Strings. 14th Hellenic School and Workshops on Elementary Particle Physics & Gravity. Corfu Summer Institute, 17/09/2014, [`http://www.physics.ntua.gr/corfu2014/lectures.html`]

- *Dispersion Relation of GKP Strings*. Summer School on String Theory and Holography & Mathematica Summer School on Theoretical Physics, 6th Edition. Departamento de Física e Astronomia of Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP), 24/07/2014, [`http://msstp.org/?q=node/294`]

- *Stringy Membranes in AdS/CFT*. "Holography 2013: Gauge/Gravity Duality and Strongly Correlated Systems". Pohang, S. Korea, June 13 – 22. APCTP, POSTECH, 15/06/2013, [`https://www.apctp.org/plan.php/holography2013/660`]

- *Rotating Strings and Membranes in AdS/CFT*. "Foundations of Quantum Mechanics and Relativistic Spacetime". Annual workshop of Working Group 3, "Quantum Theory Meets Relativity", of the COST Action MP1006, "Fundamental Problems in Quantum Physics". National & Kapodistrian University of Athens, 26/09/2012, [`http://www.pwallden.gr/foundations.asp`].

The author's research at N.C.S.R. "Demokritos" is supported by the General Secretariat for Research and Technology of Greece and from the European Regional Development Fund MIS-448332-ORASY (NSRF 2007–13 ACTION, KRIPIS).

regions at the centre of development

Co - financed by the Hellenic Republic and the European Union - European Regional Development Fund, in the context of the O.P. Competitiveness and Entrepreneurship (OPC II) and the R.O.P. Attica, R.O.P. Macedonia - Thrace

Abstract

In its strongest version, the AdS/CFT conjecture states that $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N_c)$ super Yang-Mills (SYM) theory is equal to type IIB string theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. It is by far the most important equation of contemporary theoretical physics, a sort of a "harmonic oscillator" for both the quantum theory of gravity and gauge theories. It goes without saying that it is imperative to fully understand its limits of validity and thoroughly investigate its implications. In particular, it would be desirable to solve the theory, i.e. to be able to compute all of its observables.

One of the most important observables of AdS/CFT is its spectrum. According to the AdS/CFT "dictionary", the spectrum of the theory comprises the energies of its string states, each of which must be equal to the scaling dimensions of its dual gauge theory operator. The full spectral problem of AdS/CFT is solved by integrability, in the sense that integrability provides the full set of algebraic equations that determine it. Integrability methods are however severely limited in the regime of long, strongly coupled operators, such as those that are dual to the Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP) strings, giant magnons and single spike strings.

In this thesis we study classical strings and branes in the context of the AdS/CFT correspondence. Our goal is twofold: (1) develop methods for computing the $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ spectrum in the case of long, strongly coupled operators, by using classical strings and (2) understand the role of classical membranes in AdS/CFT by investigating their stringy limits.

With regard to the first objective, we compute the classical spectra of long rotating GKP strings, giant magnons and single spikes. The conserved linear and angular momenta of these string configurations, that live either in AdS_3 or $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$, are known in parametric form in terms of the strings' linear and angular velocities. We eliminate the linear and angular velocities from the expressions that give the energy of the strings, in favor of the strings' conserved charges of linear and angular momenta. This way, we find all the leading, subleading and next-to-next-to-leading terms in the dispersion relations of the aforementioned string configurations. Our results are expressed in closed forms with Lambert's W-function.

For the second objective we introduce and study "stringy membranes", a new class of membranes that live in $\mathrm{AdS}_{4/7} \times \mathrm{S}^{7/4}$ or $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$ and have the same equations of motion, constraints and conserved charges with strings that live in an appropriate subset of AdS_5. Stringy membranes can be constructed whenever the target spacetime contains a compact submanifold, by identifying one of the submanifold's compact coordinates with one of the membrane worldvolume coordinates. For the stringy membranes that reproduce the pulsating and rotating GKP strings in AdS, we find that the spectrum of their transverse quadratic fluctuations displays a multiple band/gap structure governed by the Lamé equation. Conversely, string excitations are represented by a single-band/single-gap Lamé pattern. These findings confirm the picture that we have of membranes as collective excitations of some stringy counterparts.

Contents

1 Introduction 6
1.1 Overview . . . 10

I Introduction to AdS/CFT 11

2 Gauge/Gravity Duality 11
2.1 Large-N_c Expansions . . . 11
2.2 Holographic Principle . . . 14
2.3 Holographic Renormalization Group . . . 15

3 AdS/CFT Correspondence 18
3.1 Open String Description . . . 18
3.2 Closed String Description . . . 19
3.3 $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills . . . 19
3.4 IIB String Theory on $AdS_5 \times S^5$ . . . 20
3.5 Parameter Matching . . . 21
3.6 The BMN Sector . . . 22
3.7 Maldacena Dualities . . . 23
3.8 ABJM Correspondence . . . 24
3.9 Field/Operator Correspondence . . . 24
3.10 Testing AdS_5/CFT_4 Correspondence . . . 26
3.10.1 Symmetries . . . 27
3.10.2 Spectra . . . 27
3.10.3 Correlation Functions . . . 29
3.10.4 Anomalies, Moduli Spaces, etc. . . . 30

4 AdS/CFT Integrability 31
4.1 Classical & Quantum Integrability . . . 31
4.1.1 Classical Integrability . . . 31
4.1.2 Quantum Integrability . . . 31
4.2 Integrability in AdS_5/CFT_4 . . . 32
4.3 Integrability in the $\mathfrak{su}(2)$ Sector . . . 33
4.3.1 Coordinate Bethe Ansatz . . . 34
4.3.2 Asymptotic Bethe Ansatz . . . 37

II Spinning Strings in $AdS_5 \times S^5$ 39

5 Introduction and Motivation 39
5.1 Classical Bosonic Strings in $AdS_5 \times S^5$ . . . 40
5.2 Pohlmeyer Reduction . . . 42
5.3 Neumann-Rosochatius Reduction in $\mathbb{R} \times S^5$ . . . 43

6 The Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP) String 45
6.1 Rotating AdS_3 GKP String . . . 48
6.1.1 Short Strings . . . 51
6.1.2 Long Strings . . . 52

6.1.3 Short-Long Strings Duality . . . 53
6.2 Rotating $\mathbb{R} \times S^2$ GKP String . . . 54
6.2.1 Short Folded Strings . . . 57
6.2.2 Long Folded Strings . . . 58
6.2.3 Slow Circular Strings . . . 59
6.2.4 Fast Circular Strings . . . 60
6.2.5 Short-Long Strings Duality . . . 60
6.3 Pulsating AdS_3 GKP String . . . 61
6.3.1 Semiclassical Quantization . . . 62

7 Dispersion Relations of GKP Strings **66**
7.1 Rotating $\mathbb{R} \times S^2$ GKP String . . . 70
7.1.1 Inverse Spin Function . . . 70
7.1.2 Anomalous Dimensions . . . 72
7.1.3 Leading Terms . . . 74
7.1.4 Next-to-Leading Terms . . . 75
7.1.5 NNL Terms . . . 78
7.1.6 Fast Circular Strings . . . 79
7.2 Rotating AdS_3 GKP String . . . 80
7.2.1 Inverse Spin Function . . . 80
7.2.2 Anomalous Dimensions . . . 82
7.2.3 Leading Terms . . . 84
7.2.4 Next-to-Leading Terms . . . 86
7.2.5 NNL Terms . . . 86
7.3 Reciprocity . . . 88

8 Infinite-Size Giant Magnons and Single Spikes **91**
8.1 The Hofman-Maldacena (HM) Giant Magnon . . . 94
8.2 Infinite-Momentum Single Spikes . . . 96
8.3 Bound States & Scattering . . . 98
8.3.1 Scattering . . . 98
8.3.2 Bound States . . . 100

9 Finite-Size Giant Magnons and Single Spikes **102**
9.1 Giant Magnon: Elementary Region . . . 103
9.2 Giant Magnon: Doubled Region . . . 104
9.3 Single Spike: Elementary Region . . . 106
9.4 Single Spike: Doubled Region . . . 108
9.5 Symmetries . . . 109

10 Dispersion Relations of Giant Magnons and Single Spikes **111**
10.1 Giant Magnon: Elementary Region . . . 116
10.1.1 Inverse Momentum . . . 117
10.1.2 Inverse Spin Function . . . 118
10.1.3 Dispersion Relation . . . 120
10.2 Giant Magnon: Doubled Region . . . 121
10.3 Single Spike: Elementary Region . . . 122
10.4 Single Spike: Doubled Region . . . 122

11 Part II Summary and Discussion 124
11.1 GKP Strings . . . 124
11.2 Giant Magnons & Single Spikes . . . 126

III Rudiments of p-Branes & M-Theory 128

12 Generalities 128
12.1 Uses of Extended Objects . . . 128
12.1.1 Description of Elementary Particles . . . 129
12.1.2 Study of the Strong Interaction . . . 129
12.1.3 Generalization of Superstrings and Superparticles . . . 129
12.1.4 The Membrane Paradigm of Black Holes . . . 130
12.1.5 M-Theory . . . 130
12.1.6 AdS/CFT Correspondence . . . 131
12.1.7 Brane World Cosmology . . . 132
12.2 Towards M(embrane) Theory . . . 132
12.2.1 Membrane Instabilities . . . 132
12.2.2 Anomalies . . . 133
12.2.3 Ghosts . . . 133
12.2.4 Non-Renormalizability . . . 133
12.2.5 Integrability . . . 133
12.2.6 Quantization . . . 134
12.2.7 Membrane Interactions & Perturbation Theory. . . . 134

13 Introduction to Membranes 135
13.1 Bosonic Membranes . . . 135
13.1.1 Dirac-Nambu-Goto Action . . . 135
13.1.2 Polyakov Action . . . 135
13.1.3 Gauge-Fixing . . . 137
13.1.4 Membranes in Flat Spacetimes . . . 138
13.2 Bosonic p-Branes . . . 139
13.2.1 Volume-Preserving Diffeomorphisms . . . 140
13.3 Supermembranes . . . 140
13.3.1 11-Dimensional Supergravity . . . 142
13.4 M(atrix) Theory . . . 143
13.4.1 Matrix-Regularized Membranes . . . 143
13.4.2 The Matrix Theory Conjecture . . . 144
13.4.3 Matrix Theory in Curved Backgrounds . . . 145

IV Rotating Membranes 147

14 Introduction and Motivation 147

15 Spinning Membranes in $\mathbf{AdS_7 \times S^4}$ 149

16 Spinning Membranes as Spinning Strings 150
16.1 Stringy Membranes in $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ . . . 150
16.2 Stringy Membranes in $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$ . . . 154
16.3 Stringy Membranes in $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$ . . . 155

17 Membrane Fluctuations **155**
17.1 Rotating Stringy Membranes . . . 160
17.2 Pulsating Stringy Membranes . . . 161

18 Part IV Summary and Discussion **164**

V Appendixes **167**

A Anti-de Sitter Space **167**
A.1 Global Coordinates . . . 169
A.2 "Sausage" Coordinates . . . 170
A.3 Horospheric/Poincaré Coordinates . . . 171
A.4 Stereographic Coordinates . . . 173
A.5 "Static" Coordinates . . . 173
A.6 AdS as a Ruled Surface . . . 173
A.6.1 Light-Cone Frame . . . 174
A.7 AdS Coordinate Systems Summary . . . 175

B Parametrizations of S^n **176**
B.1 Standard Parametrizations . . . 176
B.1.1 Sine Parametrization . . . 176
B.1.2 Cosine Parametrization . . . 176
B.2 Complex Parametrizations . . . 176
B.3 "Sausage" Coordinates . . . 178
B.4 Stereographic Coordinates . . . 178

C Plane-Wave Backgrounds & Penrose Limits **179**
C.1 Plane-Wave Backgrounds . . . 179
C.2 Penrose Limits . . . 180
C.2.1 Penrose Limits of $AdS_{p+2} \times S^{q+2}$ . . . 180
C.2.2 Penrose Limit of $AdS_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$ . . . 180
C.3 Freund-Rubin Ansatz . . . 182

D Strings in Flat Spacetime **183**
D.1 Rotating String . . . 183
D.2 Pulsating String . . . 184

E More Short-Long Dualities **186**

F Mathematica Code **187**
F.1 GKP Strings in $\mathbb{R} \times S^2$ . . . 187
F.1.1 Long Folded Strings . . . 187
F.1.2 Fast Circular Strings . . . 188
F.2 GKP Strings in AdS_3 . . . 188
F.3 Giant Magnons . . . 190
F.3.1 Giant Magnon: Elementary Region . . . 190
F.3.2 Giant Magnon: Doubled Region . . . 191
F.4 Single Spikes . . . 192
F.4.1 Single Spike: Elementary Region . . . 192
F.4.2 Single Spike: Doubled Region . . . 194

G Symbolic Computations 196
G.1 Long and Fast GKP Strings . . . 196
G.2 Giant Magnons & Single Spikes . . . 198

H Elliptic Integrals and Jacobian Elliptic Functions 202

I Lambert's W-Function 205

J Partition Polynomials 208
J.1 Bell Polynomials . . . 208
J.2 Potential Polynomials . . . 208
J.3 Logarithmic Polynomials . . . 208

K Lamé's Equation 209

1 Introduction

What is the greatest equation ever written? Clearly there are many choices, as a simple google search reveals. The Pythagorean theorem, Euler's equation, Maxwell's equations, Einstein's equations, Schrödinger's equation, Noether's theorem, the Callan-Symanzik equation and many others. In his 2010 TASI lectures on gauge/gravity duality, Joseph Polchinski [5] chose the Maldacena equation

$$\mathrm{AdS} = \mathrm{CFT} \tag{1.1}$$

as his favorite equation of all time. Even if this choice seems overly enthusiastic, one thing is certain: Maldacena's original paper [6] has more than 13.000 citations,[1] while the co-founding articles of Gubser, Klebanov, Polyakov [7], Witten [8] and the early review [9], have a total of almost 20.000 citations. The Maldacena duality (1.1) certainly deserves a place in the Pantheon of the greatest equations of theoretical physics.

Equally spectacular are the implications of (1.1). One of the greatest open problems of modern theoretical physics is the unification of quantum mechanics with gravity. Formally, there's no a priori reason to expect that a theory of quantum gravity (formulated on a negatively curved spacetime such as anti-de Sitter space—AdS for short) may reduce to a very special type of a gauge theory with scale invariance (formulated on flat space of one dimension less), aka conformal field theory (CFT). Part of the unparalleled success of AdS/CFT is owed to the fact that it became the first concrete example of the gauge/gravity duality and the holographic principle, but also a prime instance of weak/strong coupling duality in four dimensions.

Gauge/gravity dualities provide a very special unifying framework for all the fundamental forces of nature, by regarding the gauge theories (such as the electroweak or the strong interaction) as the alter ego of the gravitational force. With the holographic principle, our world is viewed as a hologram that encodes all the information of the higher-dimensional bulk. Weak/strong coupling dualities identify the weak-coupling regime of a theory (where perturbation theory is valid) with the strong-coupling (or non-perturbative) regime of another theory and allow us to perform calculations in a region that was inaccessible with traditional methods. The most popular form of the AdS/CFT correspondence,

$$\mathcal{N} = 4,\ \mathfrak{su}\left(N_c\right)\ \text{super Yang-Mills theory} = \text{IIB superstring theory on } \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5 \tag{1.2}$$

posits the equivalence of two radically different physical theories. $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills theory is the most perfect of all possible gauge theories in four spacetime dimensions with the maximal allowed number of supersymmetries and conformal symmetry, which roughly means that the theory is invariant under scale transformations and finite. Type IIB superstring theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ is on the other hand a gravitational theory that is formulated on a total of ten spacetime dimensions, five of which are compactified on a 5-sphere and the rest live on 5-dimensional anti-de Sitter space.

The Maldacena conjecture seems to suggest the study of an ideal world ($\mathcal{N} = 4$ SYM) as a means to extract the properties of the real one (QCD, the theory of strong interactions). However it turns out that the AdS/CFT duality is more than just a naive toy model. In the high-temperature regime where the supersymmetry of $\mathcal{N} = 4$ SYM is explicitly broken, the theory starts resembling more and more the deconfined QCD plasma which has no chiral condensate and it is scale invariant. This form of universality lies at the heart of gauge/gravity dualities which assert that the holographic dual of QCD must be described by a modified version of the Maldacena conjecture. In this sense, the AdS/CFT duality (1.2) can be considered as the "harmonic oscillator" of modern theoretical physics.

Like the quantum harmonic oscillator, it is imperative that the AdS/CFT correspondence be studied inside out. Firstly, since AdS/CFT is still at a conjectural level that defies any reasonable attempt

[1] As of 2015.

for a proof, we have to know the limits of its validity. Many tests have been developed over the years that check the matching between the symmetries, spectra, correlators, anomalies, moduli spaces, etc. of the two implicated theories. All seem to confirm the validity of the conjecture, at least in the planar level where the rank of the gauge group becomes very large ($N_c \to \infty$).

Secondly, if we assume its validity, we have to get a full grasp of the implications of AdS/CFT. In other words we must solve the theory. Solving a theory means that we are able to compute all of its observables, e.g. spectrum, correlation functions, scattering amplitudes, expectation values of Wilson loops. A very powerful tool that has been developed in the context of AdS/CFT solvability is that of integrability. Generally speaking, a theory is integrable whenever it possesses the maximum allowed number of conservation laws that may be integrated and the theory be solved. In the case of the $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ duality, integrability has been proven at the classical level by Bena, Polchinski and Roiban [10]. Although no formal proof of its quantum integrability currently exists, the $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ correspondence (1.2) is thought to be quantum integrable at the planar limit ($N_c \to \infty$), where the dual string theory becomes free ($g_s \to 0$).

Integrability completely solves the spectral problem of planar $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$, in the sense that it provides the full set of algebraic equations that determines the spectrum. Integrability also provides the set of tools that can be used to solve the planar limit of $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ theory (in the above sense, i.e. computing all of its observables). However, the integrability approach does have a number of limitations. In particular, there exist some regimes of the AdS/CFT correspondence where the solution of the above set of algebraic equations becomes impossible to obtain, either with analytical or with computational means. In such cases, we have to rely on more traditional methods in order to obtain the wanted spectra. These methods involve classical strings and, in some cases, branes.

Before proceeding to the discussion of the role of classical strings and branes in the AdS/CFT correspondence, let us briefly explain why we think that the explicit computation of the planar AdS/CFT spectrum is interesting. Firstly, it seems to us that the scope of the AdS/CFT correspondence becomes somewhat limited if we do not know the exact analytic form of its spectrum. Secondly, we would like to have at our disposal tools that allow us to test the matching of the AdS/CFT spectra explicitly. Thirdly, we would like to explore the possibility of finding closed-form expressions in the AdS/CFT spectrum.

In 2002, Gubser, Klebanov and Polyakov (GKP) [11] proposed to study classical strings that rotate, spin or pulsate inside $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ in order to obtain the strong coupling values of the (anomalous) scaling dimensions of certain gauge-invariant, single-trace operators that were formed by the fields of $\mathcal{N} = 4$ SYM. GKP noticed that the energy of a specific closed folded string configuration that rotates rigidly inside AdS_3, scales as the logarithm of its (large) spin, a behavior that was very reminiscent of the logarithmic scaling violations of twist QCD operators. Being able to reproduce this behavior for the anomalous scaling dimensions of scalar single-trace (twist-2) operators of $\mathcal{N} = 4$ SYM, GKP conjectured that the closed folded string that rotates rigidly in AdS_3, is the AdS/CFT dual of twist-2 operators of $\mathcal{N} = 4$ SYM and provides their anomalous scaling dimensions at strong coupling.

The GKP paradigm emphasized the benefits that accompany the study of classical strings in the context of the AdS/CFT correspondence, such as the fact that it allows the computation of the spectrum of the dual CFT at strong coupling (a regime where perturbation theory typically breaks down). Classical strings are also extensively used in the calculation of AdS/CFT correlation functions, Wilson loops and gluon scattering amplitudes. Also, the integrability properties of classical and quantum strings in planar AdS/CFT, anticipate in many respects the integrability of the whole theory. An interesting relevant question is whether the study of classical membranes within the AdS/CFT correspondence can be as beneficial as the study of classical strings.

The study of the classical dispersion relations of GKP strings was taken up seriously in the papers

[12, 3]. As we have already mentioned, GKP strings are closed strings that spin, rotate or pulsate inside the AdS_3 or $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ submanifolds of $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ and are dual to certain composite operators of $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills (SYM) theory. The dispersion relations of GKP strings give the anomalous dimensions of their dual CFT operators at strong coupling. GKP strings belong to the category of "long" strings that "see" the curvature of the spacetime they live in, as opposed to "short" strings which live in an approximately flat space and the spacetime curvature only affects the subleading terms of their dispersion relations. What is more, very few results for the spectra of long strings have been obtained by using integrability methods.

Therefore one must rely on more direct methods in order to obtain the wanted spectra. Generally, the expressions for the classical conserved charges of string energy E and spin S/angular momentum J are known in parametric form in terms of their angular velocity ω. The authors of the papers [12, 3] managed to invert the series that gives the conserved angular momentum of the strings in terms of their angular velocity and express the classical string energy as a function $E = E\left(S, J\right)$, using only their conserved spin/angular momentum. Only in this way can the resulting dispersion relations accommodate quantum corrections or be compared to the corresponding weak-coupling formulas, none of which is known in parametric form. It was found that the finite-size corrections to the spectra of the dual CFT operators at strong coupling can be expressed in terms of the so-called Lambert's W-function, that is defined as follows:

$$W\left(z\right)\, e^{W(z)} = z \tag{1.3}$$

and it constitutes a generalization of the logarithmic function. With Lambert's W-function, all the leading, subleading and next-to-subleading terms in the classical dispersion relations of long rotating GKP strings in AdS_3 and $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ were computed. In [13], the W-function method was applied to the case of $\mathrm{AdS}_4/\mathrm{CFT}_3$. Moreover, the conserved energies and spins/angular momenta of long GKP strings were found to obey a number of short-long string dualities that link their conserved charges in the "short" and the "long" regime. These relations are very interesting because their quantum generalizations may allow to import the integrability results that are so rich in the regime of short strings, to the regime of long strings.

In [2], the W-function approach was upgraded to the case of giant magnons and single spikes. Giant magnons and single spikes are open single-spin strings that rotate in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2 \subset \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ and are dual to single-magnon and single-spinon operators of centrally extended $\mathcal{N} = 4$ SYM. The role of giant magnons is pivotal in AdS/CFT, as they are the fundamental building blocks out of which all states of the theory can be built. These are again "long" strings, for which very few results from integrability methods are known. Apart from their conserved energy E and angular momentum J, giant magnons and single spikes have a third conserved quantity, their linear momentum p. Also, there is a second parameter besides the angular velocity ω, namely their linear velocity v. The elimination of the parameters v and ω from the expression of the energy E, in favor of the conserved momenta J and p presents an outstanding technical challenge, as we now have to solve a much harder 3×3 system instead of a 2×2 one. The leading, subleading and next-to-subleading terms in the classical dispersion relations of both giant magnons and single spikes have been computed in [2].

Besides the well-known example of $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$, where the bulk is 10-dimensional and hosts IIB string theory, there exists a number of AdS/CFT dualities that are formulated on an 11-dimensional bulk and host an M-theory. Just as $D = 10$ is the critical dimensionality of string spacetimes, for membranes the corresponding dimensionality increases to $D = 11$. This implies that we should perhaps replace strings with membranes as we move from the study of 10-dimensional string theory to 11-dimensional M-theory. The above prescription for the computation of the dual CFT spectrum via strings, should also be applicable to the case of membranes. Therefore we expect that the energy of a membrane that lives in the bulk of an 11-dimensional AdS/CFT spacetime, is equal to the scaling dimensions of an appropriately formed dual gauge theory operator.

As it turns out, branes are somewhat tricky objects to work with. The reason is they are generally plagued with problems such as instabilities, anomalies, non-renormalizability, non-integrability, elusive quantization, non-interactivity and inexistent perturbation theory, which makes their study rather difficult. However, there seem to exist cases where many of these obstacles can be circumvented, such as matrix theory or brane theory in AdS spacetimes. The latter case is especially interesting from the point of view of the AdS/CFT correspondence. As we have already mentioned, an interesting open question is what is the role of classical membranes in AdS/CFT and to what extent can the technology that has been developed in the case of classical strings, be applied to the case of AdS/CFT branes.

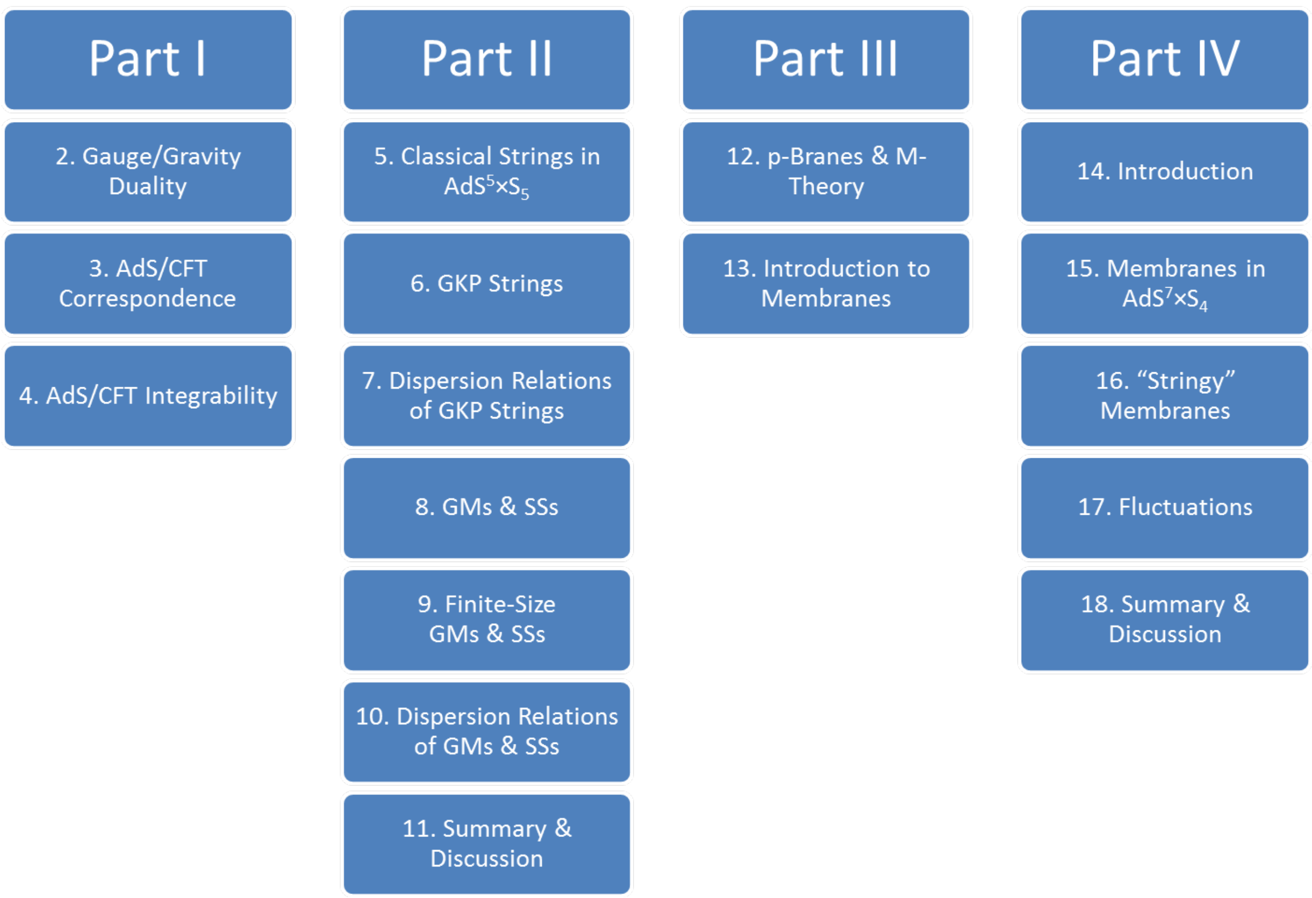
Paper [4] introduced a new class of membranes, "stringy membranes", in the context of the AdS/CFT correspondence. These are membranes that live in either $\mathrm{AdS}_{4/7} \times \mathrm{S}^{7/4}$ or $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$ and have the same equations of motion, constraints and conserved charges with strings that live in an appropriate subset of AdS_5. Stringy membranes are two-dimensional extended objects that can be constructed whenever the target spacetime contains a compact submanifold, by identifying one of the submanifold's compact coordinates with one of the membrane worldvolume coordinates. Two interesting examples of stringy membranes are the ones that fully reproduce the pulsating and rotating strings of GKP inside AdS. In the linearized approximation, the spectrum of transverse quadratic fluctuations of the stringy membranes that reproduce the rotating and pulsating strings of GKP, displays a multiple band/gap structure, governed by the Lamé equation. Conversely, string excitations are represented by a single-band/single-gap Lamé pattern. These findings confirm the picture that we have of membranes as collective excitations of some stringy counterparts.

Stringy membranes inherit all the classical characteristics of the strings they reproduce, such as their dispersion relations and their classical integrability. Since 11-dimensional M-theory on $\mathrm{AdS}_{4/7} \times \mathrm{S}^{7/4}$ is dual to 3-dimensional, $\mathcal{N} = 8$ SCFT and 6-dimensional $\mathrm{A}_{N_c-1}\,(2,0)$ SCFT respectively, both of these SCFTs are expected to contain operators that are dual to the corresponding stringy membranes. The scaling dimensions of the dual SCFT operators are expected to be equal the stringy membrane energies. This picture seems to confirm a conjecture claiming that all of the above SCFTs and $\mathcal{N} = 4$ SYM theory, possess common integrable sectors.

1.1 Overview

This doctoral dissertation is organized into four parts. Part I is a short introduction to the ideas of gauge/gravity duality, the AdS/CFT correspondence and AdS/CFT integrability. We try to give an overview of the field and introduce all the concepts, terminology and definitions that will be used in the main part of our work.

Part II deals with classical strings that spin inside $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. By the AdS/CFT correspondence, the strings in $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ are dual to certain gauge-invariant operators of $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills theory and provide their (anomalous) scaling dimensions at strong coupling. Our goal is to investigate the classical spectrum of these extended objects and extract closed expressions for their dispersion relations. Part II essentially follows papers [2] and [3] and it is divided in two main sections. The first one deals with the so-called Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP) strings, while the second one deals with giant magnons (GMs) and single spikes (SSs).



In part III we change gears and take up p-branes and M-theory. We provide a brief overview of the concept of extended objects and revisit some of the most popular reasons that motivate their introduction. Before going on to discuss the action principles and matrix models that are connected to p-branes, we discuss the most common problems that are associated with them.

In part IV we study certain classical membranes that spin inside spacetimes such as $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ or $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$ and have a string-like behavior. Following paper [4], these membranes are called "stringy membranes" and they can be shown to be classically equivalent to classical rotating strings. However, this equivalence disappears at the linearized level, as we also show.

Part I

Introduction to AdS/CFT

2 Gauge/Gravity Duality

The gauge/gravity duality can be formulated as follows:

$$\boxed{\Big\{\text{Quantum Gravity in } d+1 \text{ Dimensions}\Big\} = \Big\{\text{Gauge Theory in d Dimensions}\Big\}}$$

Historically, the gauge/gravity duality was put forward right after the discovery of the AdS/CFT correspondence in 1997 by Maldacena. However the basic conceptual ingredients of both had been laid down much earlier. There are three main theoretical indications in support of gauge/gravity duality:

(a). The large-N_c expansion of gauge theories matches the topological expansion of string theory.

(b). The holographic principle: quantum gravity is equivalent to a QFT at the boundary of spacetime.

(c). Einstein's equations can be thought of as the RGE's of some lower dimensional QFT.

A cornucopia of gauge/gravity dualities is in existence today and the list keeps expanding. Yet, in many cases the dual theory is unknown. There's hardly any doubt that the most challenging example is quantum chromodynamics (QCD), the gravity dual of which has been called the "Holy Grail" of modern theoretical science.

Below we will try to sketch the conceptual background of gauge/gravity duality that served as a guiding principle for its first explicit realization by J. Maldacena in 1997: the AdS/CFT correspondence.

2.1 Large-N_c Expansions

In 1974 't Hooft [14] observed that the perturbative behavior of gauge theories with a large number of colors N_c is very similar to that of a string theory:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Large-}N_c \text{ Expansion of}\\ \text{Gauge Theories}\end{array} \sim \begin{array}{c}\text{Topological Expansion of}\\ \text{String Theory}\end{array}}$$

For a review see [15]. Here we will follow [9] for the most part. Let us begin with the Lagrangian density of a generic massive gauge (Yang-Mills) theory:

$$\mathcal{L}_{\rm YM} = \mathrm{Tr}\Big[d\widetilde{\Phi}_i d\widetilde{\Phi}_i + m_{ij}\widetilde{\Phi}_i\widetilde{\Phi}_j + g_{\rm YM}c_{ijk}\widetilde{\Phi}_i\widetilde{\Phi}_j\widetilde{\Phi}_k + g_{\rm YM}^2 d_{ijkl}\widetilde{\Phi}_i\widetilde{\Phi}_j\widetilde{\Phi}_k\widetilde{\Phi}_l + \dots\Big], \tag{2.1}$$

with N_c colors, assuming that the n-point vertex is proportional to the $(n-2)$th power of the coupling $g_{\rm YM}$. The gauge fields $\widetilde{\Phi}_i = \widetilde{\Phi}_i^{\mathfrak{a}} T^{\mathfrak{a}}$ are either in the adjoint or the fundamental representation of the gauge group. It is very common to rescale the gauge fields as $\widetilde{\Phi}_i \to \Phi_i/g_{\rm YM}$, so that the dependence of (2.1) on $g_{\rm YM}$ is factored out:

$$\mathcal{L}_{\rm YM} = \frac{1}{g_{\rm YM}^2}\mathrm{Tr}\Big[d\Phi_i d\Phi_i + m_{ij}\Phi_i\Phi_j + c_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k + d_{ijkl}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\Phi_l + \dots\Big]. \tag{2.2}$$

Following 't Hooft, we may also replace the coupling constant by a more convenient one for a large number of colors $N_c \to \infty$.[2] Suppose the theory (2.1) obeys the following RGE:

[2]Sending the number of colors to infinity ($N_c \to \infty$) while keeping all the other parameters fixed, is known as the 't Hooft limit.

$$\beta(x) = \mu^2 \frac{dx}{d\mu^2} = -\beta_0 x^2 - \beta_1 x^3 - \beta_2 x^4 - \beta_3 x^5 - \beta_4 x^6 - \dots, \qquad x \equiv g^2_{\mathrm{YM}}, \tag{2.3}$$

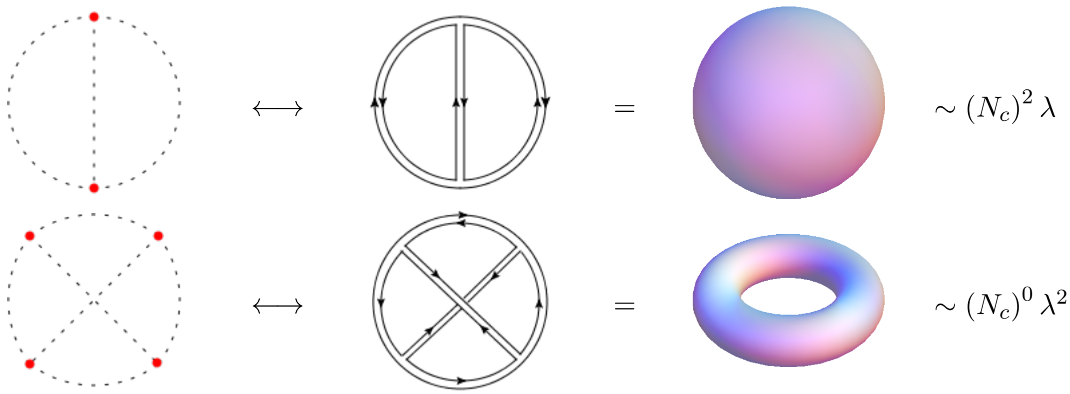
where β_n is the value of the beta function at $n+1$ loops. β_n generally depends on the number of colors N_c. We'll assume that in the 't Hooft limit the n-th loop beta function scales as

$$\lim_{N_c \to \infty} \beta_n = b_n N_c^{n+1}, \tag{2.4}$$

where b_n are some numerical coefficients that are independent of N_c. Defining the 't Hooft coupling as $\lambda \equiv x N_c = g^2_{\mathrm{YM}} N_c$, we find that the large-N_c beta function becomes independent of N_c:

$$\beta(\lambda) = \mu^2 \frac{d\lambda}{d\mu^2} = -\lambda^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\beta_0^{n+1}} \lambda^{n+2} \longrightarrow -\lambda^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{b_0^{n+1}} \lambda^{n+2} \quad \text{as } N_c \to \infty. \tag{2.5}$$

We now want to compute the large-N_c behavior of Feynman diagrams in theory (2.1). There's a very useful notation introduced by 't Hooft and consists in replacing adjoint $\mathfrak{su}(N_c)$ propagators by double lines having opposite orientations. This way Feynman diagrams can be transformed to 2-dimensional surfaces with a varying number of handles g.



From the Lagrangian (2.2) we obtain the following large-N_c Feynman rules:

$$\begin{array}{lcl} \text{Vertices (V)} & \sim & \dfrac{1}{g^2_{\mathrm{YM}}} = \dfrac{N_c}{\lambda} \\ \text{Propagators (E)} & \sim & g^2_{\mathrm{YM}} = \dfrac{\lambda}{N_c} \\ \text{Double-line loops (L)} & \sim & N_c. \end{array}$$

Therefore a disconnected Feynman diagram of Yang-Mills theory (2.1) having V vertices, E propagators and L double-line loops will scale as follows in the 't Hooft limit:

$$\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^V \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^E (N_c)^L = (N_c)^{\chi} \lambda^{E-V}, \tag{2.6}$$

where χ is the Euler characteristic given by the formula $\chi = V - E + L$. Fields in the fundamental/antifundamental representation of $\mathfrak{su}(N_c)$ have single-line propagators and introduce surface boundaries (b), while the double lines of fields that transform as $\mathfrak{so}(N_c)$ or $\mathfrak{sp}(N_c)$ have the same orientation (fundamental or antifundamental) and give rise to cross-caps (c). For a surface of genus g (# handles), b boundaries (# holes) and c cross-caps (# twists), the Euler characteristic is given by

$$\chi = 2 - 2g - b - c. \tag{2.7}$$

Therefore we find that the vacuum-to-vacuum generating functional can be expanded in a double series as follows:

$$\log \mathcal{Z}_{\mathrm{YM}} = \sum_{\chi} (N_c)^{\chi} f_{\chi}(\lambda) \tag{2.8}$$

The dominant bubble diagrams in the large-N_c limit of YM theory (2.1) are the ones with only adjoint $\mathfrak{su}(N_c)$ fields ($b = c = 0$) and no handles ($g = 0$). They are all planar diagrams.[3]

Computing connected diagrams (i.e. vacuum graphs with a number of external legs n) at large-N_c is rather straightforward. More generally, we may repeat our analysis for n-point functions of the single-trace operators

$$G_j(x_j) = \frac{1}{N_c} \operatorname{Tr}\left[\prod_i \Phi_i(x_j)\right]. \tag{2.9}$$

These are added to the Lagrangian (2.2) by coupling them to external currents g_j as

$$\mathcal{L}_G = N_c \sum_j g_j \cdot G_j(x_j) = \sum_j g_j \cdot \operatorname{Tr}\left[\prod_i \Phi_i(x_j)\right]. \tag{2.10}$$

We find that each single-trace operator $G_j(x_j)$ suppresses the correlation function by $1/N_c$, i.e.

$$\left\langle \prod_{j=1}^{n} G_j(x_j) \right\rangle \sim (N_c)^{\chi - n}, \tag{2.11}$$

so that the connected generating functional (free energy) of a generic YM theory of the form (2.1) also affords a double series expansion of the type (2.8). What is more, genus expansions like (2.8) are familiar from perturbative string theory (see e.g. [16]) where

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{string}} = \sum_{\chi} g_s^{-\chi} \mathcal{Z}_{\chi}, \quad \chi \equiv 2 - 2g - b - c. \tag{2.12}$$

Obviously the role of N_c in string theory is played by the inverse of the string coupling constant g_s:

$$N_c \sim \frac{1}{g_s}, \tag{2.13}$$

from which we see that the planar limit ($N_c \to \infty$) of the gauge theory corresponds to a free string theory ($g_s \to 0$). Some more implications of 't Hooft's duality are summarized in the following table.

YM Action content		String Theory
$\mathfrak{su}(N_c)$ adjoints	$b = 0$	closed
$\mathfrak{su}(N_c)$ adjoints & fundamentals	$b \neq 0$	open
$\mathfrak{su}(N_c)$ fields only	$c = 0$	orientable
$\mathfrak{so}(N_c)$ or $\mathfrak{sp}(N_c)$ fields	$c \neq 0$	non-orientable
planar	$g = b = c = 0$	free

[3]By definition, a planar graph is one that can be drawn on a plane. Equivalently no two lines may cross each other or, as we just saw, the corresponding surface cannot have any handles ($g = 0$).

The similarity between formulae (2.8) and (2.12) implies that string theory can be thought of as some sort of large-N_c gauge theory and vice versa. However no concrete pair of a string theory and a large-N_c YM theory is known outside AdS/CFT. An additional complication is that both series (2.8) and (2.12) are divergent. String theory (in the form of dual resonance models) was originally proposed as a theory of strong interactions before being dethroned by QCD—a gauge theory. It turned out that string theory is a theory of quantum gravity after all. We may therefore ask the question if there is a systematic way to associate a non-gravitational theory (a gauge theory possibly) with a gravitational one. The answer comes from the holographic principle.

2.2 Holographic Principle

The holographic principle of 't Hooft and Susskind [17] points out that gravity/geometry can be combined with quantum mechanics/information in a non-local manner. Non-gravitational quantum field theories are generally local theories and their number of degrees of freedom is analogous to the volume of spacetime they occupy. Gravity puts severe constraints on the number of available posts by excluding a great deal of them. The number of fundamental degrees of freedom in any gravitational system is proportional to the system's area, so that the degrees of freedom may be thought to reside on an appropriate lower-dimensional surface or holographic screen. The latter hosts a non-gravitational (local) quantum field theory (QFT). Holography implies:

$$\boxed{\text{Quantum Gravity Theory} \;\cong\; \begin{array}{c}\text{Non-Gravitational Theory}\\ \text{at the Boundary}\end{array}}$$

We shall now briefly trail the steps that led to this proposal, following the very nice review of Bousso [18] to which the interested reader is referred for more details. See also [19].

Our starting point is the second law of black hole thermodynamics. It is a consequence of Hawking's black hole area theorem and Bekenstein's proposal for the entropy of black holes, both of which can be directly generalized to any number of dimensions $d+1$:[4]

$$S_{\rm BH} = \frac{kc^3}{\hbar} \cdot \frac{A}{4G_{d+1}}, \qquad dA \geq 0, \tag{2.14}$$

where G_{d+1} is the gravitational constant in $d+1$ spacetime dimensions (the value $1/4$ of the constant multiplying the area in the BH entropy formula was fixed by Hawking). The second law states:

$$dS_{\rm BH} \geq 0. \tag{2.15}$$

Bekenstein generalized the second law to include matter besides just black holes. According to the generalized second law,

$$dS_{\rm BH+matter} \geq 0. \tag{2.16}$$

The spherical entropy bound of Susskind is the condition that the generalized second law is not violated in the process of gravitational collapse of a matter system:

$$S_{\rm matter} \leq \frac{A}{4G_{d+1}}, \tag{2.17}$$

where A is the area of an asymptotically stable matter system which is either spherically symmetric or weakly gravitating.

Bound (2.17) seems to give rise to a holographic principle which posits that there's no gravitational

[4]Unless otherwise noted, the convention $c = \hbar = k = 1$ will be used throughout.

theory in which the amount of information that can be stored in a region with boundary area equal to A, exceeds $A/4$ degrees of freedom or 1 bit/Planck[5] area.

The spherical entropy bound (2.17) may be upgraded to the covariant (Bousso) entropy bound, in which stability, spherical symmetry or weak gravity are not necessary attributes of the matter system. According to the covariant entropy bound, the entropy on any light-sheet of a holographic screen (light-sheets are formed by light rays emanating from the screen) is bounded from above by the area of the screen. The holographic principle then gets modified accordingly. We also know that

Holographic screens with information density of 1 bit/Planck area
can be constructed at the boundary of any spacetime.

It seems natural to hypothesize that the boundary degrees of freedom are governed by some non-gravitational theory or a QFT that encodes all of the bulk dynamics. However it is not generally known how to extract or even construct the properties of the boundary QFT. One way to proceed is suggested by the holographic interpretation of the renormalization group.

2.3 Holographic Renormalization Group

It is generally accepted that the properties of physical systems depend on the scale (energy, distance, momenta) at which they are being studied. The renormalization group (RG) is the theoretical toolkit with which the response of physical systems to such changes of scale can be studied. The equations that rule the scaling behavior of systems are the renormalization group equations (RGEs). A very nice illustration of the action of the RG can be given by the Wilson-Kadanoff renormalization scheme that we will now briefly describe.[6]

Different scales generally have different degrees of freedom obeying different sets of laws. As we pass from small scales to larger ones we integrate out all the smaller degrees of freedom which become irrelevant and disappear. This is an irreversible process in which information is absorbed into a number of parameters (renormalized masses, couplings) and cannot be retrieved. As a result, the remaining degrees of freedom have completely different dynamics from the ones that we started with. Thus physics at small scales gets decoupled from the one at larger scales.

If a physical theory is renormalizable then the number of parameters that remain after the above coarse-graining is finite. If the number of parameters is infinite then the theory is non-renormalizable. The reason why we generally prefer to study renormalizable theories instead of non-renormalizable ones is that the former are much less complex than the latter. Even more manageable theories are the scale invariant or finite theories which are identical at all scales. $\mathcal{N}=4$ super Yang-Mills theory and superstrings are examples of finite theories.

It has been known since the mid-eighties that the condition for quantum scale invariance of the string sigma model gives rise to Einstein's equations, to lowest order in perturbation theory. α' corrections to Einstein's equations may be obtained by demanding that the corresponding higher-loop beta functions vanish. Let us briefly see how this comes about. Consider the string Polyakov action:

$$S_P = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma \left\{\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ab}G_{mn}\left(\mathbf{X}\right) + \epsilon^{ab}B_{mn}\left(\mathbf{X}\right)\right\}\partial_a\mathbf{X}^m\partial_b\mathbf{X}^n + \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{-\gamma}\,R_\gamma\Phi\left(\mathbf{X}\right), \quad (2.18)$$

where the massless states of bosonic string theory (gravitons, Kalb-Ramond fields and the dilaton) have been promoted to the background fields G_{mn}, B_{mn} and Φ. Also, γ_{ab} and ϵ_{ab} are the worldsheet metric and the Levi-Civita symbol, R_γ is the worldsheet Ricci scalar, $\gamma = \det\gamma_{ab}$ and α' is the Regge

[5] As a matter of fact, the number of allowed bits cannot exceed $N = A/4\ell_p^{d-1}\log 2$ or $1/4\log 2$ bits per Planck area $\ell_p^{d-1} \equiv \hbar G_{d+1}/c^3$.

[6] For more the interested reader is referred to D. Gross' lectures in [20].

slope. $\mathbf{X}_m$ are the spacetime and $\sigma_a = \{\tau, \sigma\}$ are the worldsheet coordinates.[7]

The expectation value of the energy-momentum tensor trace can be written as:

$$T_m^m = \left(\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ab}\beta_{mn}^G + \epsilon^{ab}\beta_{mn}^B\right)\partial_a \mathbf{X}^m \partial_b \mathbf{X}^n + \sqrt{-\gamma}\,R_\gamma\,\beta^\Phi \tag{2.19}$$

with the beta functionals given by [21]

$$\beta_{mn}^G = R_{mn} - \frac{1}{4}H_{mrs}H_n^{rs} + 2\nabla_m\nabla_n\Phi + O\left(\alpha'\right) \tag{2.20}$$

$$\beta_{mn}^B = \frac{1}{2}\nabla^r H_{rmn} - \left(\nabla^r\Phi\right)H_{rmn} + O\left(\alpha'\right) \tag{2.21}$$

$$\beta^\Phi = D - 26 + 3\alpha'\left\{4\left(\nabla\Phi\right)^2 - 4\nabla^2\Phi - R + \frac{H^2}{12}\right\} + O\left(\alpha'^2\right), \tag{2.22}$$

where ∇ is the spacetime covariant derivative and $H_{mrs} = 3\nabla_{[m}B_{rs]}$ the antisymmetric field strength. R_{mn} and R are the spacetime Ricci tensor and scalar. The condition for conformal invariance reads:

$$\beta_{mn}^G = \beta_{mn}^B = \beta^\Phi = 0. \tag{2.23}$$

Interestingly, the superstring action leads to exactly the same result, but in $D = 10$ dimensions instead of 26. For more see E. D'Hoker's lectures in [20]. The set of equations (2.20)–(2.22) can be derived from the following string/Jordan-frame action:

$$S_J = \frac{1}{2\kappa_{d+1}^2}\int d^{d+1}x\sqrt{-G}\,e^{-2\Phi}\left\{R_G + 4\left(\nabla\Phi\right)^2 - \frac{H^2}{12}\right\} + O\left(\alpha'\right), \quad 2\kappa_{d+1}^2 \equiv 16\pi G_{d+1}. \tag{2.24}$$

We may switch to the Einstein frame by setting

$$g_{mn} = e^{-4\Phi/(d-1)}G_{mn} \tag{2.25}$$

so that the action (2.24) becomes:

$$S_E = \frac{1}{2\kappa_{d+1}^2}\int d^{d+1}x\sqrt{-g}\left\{R_g - \frac{4}{d-1}\left(\nabla\Phi\right)^2 - \frac{1}{12}e^{-8\Phi/(d-1)}H^2\right\} + O\left(\alpha'\right). \tag{2.26}$$

Action (2.26) along with its bosonic cousin

$$S = \frac{1}{2\kappa_{d+1}^2}\int d^{d+1}x\sqrt{-g}\left\{R_g - \frac{1}{2}\left(\partial\Phi\right)^2 - \frac{e^{-a(d)\Phi}}{2\left(d+1\right)!}F_{p+2}^2\right\}, \tag{2.27}$$

where F_{p+2} is a $(p+2)$-rank antisymmetric field that couples to a p-brane, are often the starting point in holographic treatments of gauge theories.

A remarkable picture has emerged in which the various background fields in the string action (metric, antisymmetric field, dilaton) play the role of coupling constants[8] and their RGEs become the supergravity equations of motion. If we treat the worldsheet scale μ as an extra (holographic) spacetime dimension, the following equivalence is obtained:

RG Flow in d-dimensional Minkowski Spacetime	$\Leftrightarrow$	Gravity in $d+1$ Dimensions

[7]Spacetime has $D = d + 1$ dimensions, so that the indices m, n, r, s take the values $0, 1, \ldots, d$. The worldsheet coordinates a, b take the values $0, 1$.

[8]To be precise, the background fields are generating functions of coupling constants.

In gauge/gravity duality, Einstein's (or supergravity) equations in the bulk are the RGE's and the bulk holographic coordinate is the renormalization scale of some QFT that lives on the boundary. This corresponds to an effective "geometrization" of the RG flow.

It seems that these ideas solidified in the high-energy physics community after Maldacena had published his famous paper. The first papers envisaging the possibility that gravity and supergravity equations are RGEs of some appropriate gauge theory were [22]. In a paper entitled "The wall of the Cave" [23], Polyakov tried to solve equations (2.20)–(2.22) in certain cases, in order to gain an intuition about the dual gauge theory. Many more works followed. In the review [24] the reader may find an introduction to the subject. See also chapter 9 of the book [25]. For a recent overview see also the talk [26].

3 AdS/CFT Correspondence

The AdS/CFT correspondence [6, 7, 8] is the first explicit realization of the gauge/gravity duality and the holographic principle but also the first concrete example of a string theory that reduces to a gauge theory at large N_c. As a weak/strong coupling duality it is also an exemplary four-dimensional analog of Coleman's duality.[9] It is formulated as follows:

$$\boxed{\mathcal{N}=4,\ \mathfrak{su}\left(N_c\right)\ \text{Super Yang-Mills Theory} = \text{IIB Superstring Theory on}\ \mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5} \tag{3.1}$$

Nice reviews and introductions to AdS/CFT, from different perspectives and points of view, can be found in [9, 16, 24, 27, 28].

We will now present a theoretical argument that motivates the $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ conjecture. We will take the low-energy limit of two diverse formulations of a system of N_c coinciding D3-branes, namely the *open string formulation* and the *closed string formulation*. The former is going to give rise to $\mathcal{N}=4$, $\mathfrak{su}\left(N_c\right)$ super Yang-Mills (SYM) theory and the latter to IIB string theory on $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$. Since both theories describe the same system of D3-branes, they must be the same and (3.1) has to hold.

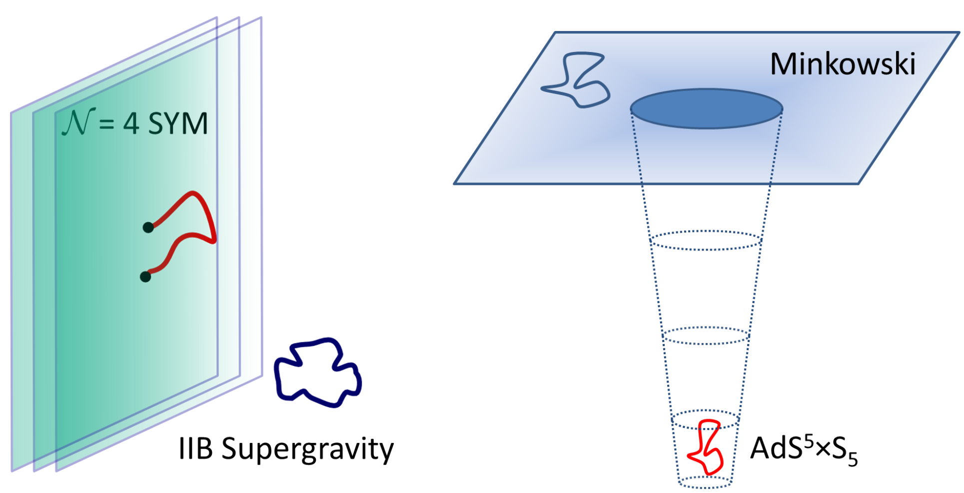
3.1 Open String Description

Consider N_c coinciding D3-branes in type IIB string theory. In what we call the *open string description*, the system consists of open strings with endpoints on the $(3+1)$ dimensional branes, closed strings propagating in the 10d bulk, as well as their interactions:

$$S = S_{\text{branes}} + S_{\text{bulk}} + S_{\text{interactions}}. \tag{3.2}$$

S_{branes} is just $\mathcal{N}=4$, $\mathfrak{su}\left(N_c\right)$ SYM theory in flat 3+1 dimensions plus α' corrections, while S_{bulk} is just IIB supergravity in flat 10d plus α' corrections. As it turns out, string interactions can be switched off at low energies (a statement effectively equivalent to saying that gravity is IR-free) so that all stringy modes decouple from each other and the action (3.2) reduces to the low-energy descriptions of non-interacting open and closed strings:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Open String Description}\\ \text{Low-Energy Limit}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{N}=4,\ \mathfrak{su}\left(N_c\right)\ \text{SYM}\ +\ \text{Free IIB Supergravity}. \tag{3.3}$$



[9] Maldacena's paper also seems to be breaking the citation world record. At the time of speaking it is well above 13.000 citations...

3.2 Closed String Description

In the *closed string description* the N_c D3-branes are seen as probes that source the bulk fields:

$$ds^2 = H^{-1/2}\left(-dt^2 + d\mathbf{x}_3^2\right) + H^{1/2}\left(dz^2 + z^2 d\Omega_5^2\right), \quad H(z) \equiv 1 + \left(\frac{\ell}{z}\right)^4, \quad \ell^4 = 4\pi g_s N_c \ell_s^4. \tag{3.4}$$

Far from the horizon ($z \to \infty$), the metric (3.4) reduces to 10-dimensional Minkowski spacetime. The near-horizon limit ($z \to 0$) of (3.4) is just $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$:

$$ds^2 = \frac{z^2}{\ell^2}\left(-dt^2 + d\mathbf{x}_3^2\right) + \frac{\ell^2}{z^2}\left(dz^2 + z^2 d\Omega_5^2\right) = \left\{\frac{z^2}{\ell^2}\left(-dt^2 + d\mathbf{x}_3^2\right) + \frac{\ell^2}{z^2}dz^2\right\} + \ell^2 d\Omega_5^2,$$

in the so-called horospheric/Poincaré coordinates (A.23). Taking the low-energy limit, we find that excitations living far from the horizon decouple from those in the near-horizon region and the system again becomes a sum of two systems:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Closed String Description}\\ \text{Low-Energy Limit}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{IIB String Theory on } \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5 + \text{ Free IIB Supergravity}. \tag{3.5}$$

(3.3) and (3.5) are two descriptions of the same system of N_c coinciding D3-branes, therefore their actions must coincide. Since free IIB supergravity is a common constituent of both low-energy descriptions (3.3) and (3.5), the remaining constituents have to be identical, namely

$$\mathcal{N} = 4,\ \mathfrak{su}(N_c) \text{ SYM} = \text{IIB Superstring Theory on } \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5.$$

Let us now briefly examine the two basic components of the AdS/CFT correspondence, $\mathcal{N} = 4$ SYM theory and IIB string theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. A short review of the geometry and most common coordinate systems of anti-de Sitter space may be found in appendix A.

3.3 $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills (SYM)

$\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills (SYM) theory in $d = 4$ spacetime dimensions was found in 1977 by Brink, Schwarz and Scherk and by Gliozzi, Scherk and Olive [29]. It's a theory that has the maximum allowed number of supersymmetries in $d = 4$ dimensions. Its most important property is that it is quantum conformally invariant.

The possibility that the one-loop beta function of $\mathfrak{su}(N_c)$ supersymmetric theories possessing three matter multiplets (such as the $\mathcal{N} = 4$ SYM theory) vanishes, was first considered in 1974 (prior to the discovery of $\mathcal{N} = 4$ SYM) by Ferrara and Zumino [30]. For $\mathcal{N} = 4$ SYM, the vanishing of the beta function has been confirmed up to four loops in perturbation theory [31]. Extension to all-loop orders was performed either by proving the vanishing of the axial current [32] or by going to the light-cone frame of superspace [33] or by formulating $\mathcal{N} = 4$ SYM in terms of $\mathcal{N} = 2$ superspace [34].

Perturbative finiteness of $\mathcal{N} = 4$ SYM was upgraded to non-perturbative finiteness in [35]. Therefore the theory is scale invariant. To prove superconformal invariance from scale invariance requires some more steps and the interested reader is referred to [36] for a more complete discussion.

There are various equivalent formulations of $\mathcal{N} = 4$ SYM. In one of them, the Lagrangian density can be obtained by dimensionally reducing $\mathcal{N} = 1$ SYM, from $d = 10$ to $d = 4$:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{SYM}} = -\frac{2}{g_{YM}^2}\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mathcal{D}_\mu\phi_i\mathcal{D}^\nu\phi_i - \frac{1}{4}\left[\phi_i, \phi_j\right]^2 + \bar{\psi}_{\mathrm{a}}\bar{\mathcal{D}}\psi_{\mathrm{a}} - \frac{i}{2}\sigma_i^{\mathrm{ab}}\psi_{\mathrm{a}}\left[\phi_i, \psi_{\mathrm{b}}\right] - \frac{i}{2}\sigma_i^{\mathrm{ab}}\bar{\psi}_{\mathrm{a}}\left[\phi_i, \bar{\psi}_{\mathrm{b}}\right]\right], \tag{3.6}$$

where the definitions of the indices and the fields are ($T^{\mathfrak{a}}$ are the $\mathfrak{su}(N_c)$ generators, all in the adjoint representation):

$$A_\mu \equiv A_\mu^{\mathfrak{a}}T^{\mathfrak{a}}, \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i\left[A_\mu, A_\nu\right], \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

$$\phi_i \equiv \phi_i^{\mathfrak{a}} T^{\mathfrak{a}}, \quad \mathcal{D}_\mu^{\mathfrak{ab}} \equiv \delta^{\mathfrak{ab}} \partial_\mu - i\epsilon^{\mathfrak{abc}} A_\mu^{\mathfrak{c}}, \quad i = 1,2,3,4,5,6, \quad \mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c} = 1,2,\dots N_c^2 - 1$$

$$\psi_{\mathrm{a},\alpha} \equiv \psi_{\mathrm{a},\alpha}^{\mathfrak{a}} T^{\mathfrak{a}}, \quad \bar{\psi}_{\mathrm{a},\dot{\alpha}} \equiv \bar{\psi}_{\mathrm{a},\dot{\alpha}}^{\mathfrak{a}} T^{\mathfrak{a}}, \quad \mathrm{a},\mathrm{b} = 1,2,3,4, \quad \alpha,\dot{\alpha} = 1,2$$

$$\not{\mathcal{D}} \equiv \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu, \quad \left(\sigma^\mu, \sigma^i\right) \equiv \text{projections of 10d Dirac matrices to 4d \& 6d respectively.}$$

The scaling dimensions of the fields appearing in $\mathcal{N}=4$ SYM Lagrangian are:

$$[F_{\mu\nu}] = 2, \quad [A_\mu] = [\mathcal{D}_\mu] = [\phi_i] = 1, \quad [\psi_{\mathrm{a}}] = \frac{3}{2}. \tag{3.7}$$

It is customary to combine the six scalar fields ϕ_i into three complex scalars as follows:

$$\mathcal{X} \equiv \phi_1 + i\phi_2, \quad \mathcal{Y} \equiv \phi_3 + i\phi_4, \quad \mathcal{Z} \equiv \phi_5 + i\phi_6. \tag{3.8}$$

Let us also define the light-cone derivatives:

$$\mathcal{D}_+ \equiv \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_3, \quad \mathcal{D}_- \equiv \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2. \tag{3.9}$$

For more, the reviews by Sohnius and Kovacs [37] are recommended.

3.4 IIB String Theory on AdS$_5 \times$S^5

The IIB superstring action on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ was first written down in 1998 by Metsaev and Tseytlin [38]. It is given by the action of the Green-Schwarz superstring on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$, which is a nonlinear sigma model (NLSM) in the coset space:

$$\frac{F}{G} = \frac{\mathfrak{psu}\,(2,2|4)}{\mathfrak{so}\,(4,1) \times \mathfrak{so}\,(5)} = \frac{\mathfrak{psu}\,(2,2|4)}{\mathfrak{sp}\,(2,2) \times \mathfrak{sp}\,(4)}. \tag{3.10}$$

Let us start from the superalgebra $\mathfrak{su}\,(2,2|4)$ which is spanned by the 8×8 matrices $\mathbb{M}$:

$$\mathbb{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_1 & \mathbb{F}_1 \\ \hline \mathbb{F}_2 & \mathbb{B}_2 \end{array}\right). \tag{3.11}$$

4×4 matrices $\mathbb{B}_{1,2}$ and $\mathbb{F}_{1,2}$ are respectively bosonic and fermionic. $\mathbb{M}$ have vanishing supertrace:

$$\mathrm{Str}\mathbb{M} \equiv \mathrm{Tr}\mathbb{B}_1 - \mathrm{Tr}\mathbb{B}_2 = 0. \tag{3.12}$$

$\mathfrak{psu}\,(2,2|4)$ is obtained as the quotient algebra of $\mathfrak{su}\,(2,2|4)$ over the identity element. Without going into much more details, the Lagrangian of IIB superstring on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ is given by the following expression:

$$\mathcal{L}_{\text{string}} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\left[\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ab}\,\mathrm{Str}\left(A_a^{(2)} A_b^{(2)}\right) + \kappa\epsilon^{ab}\,\mathrm{Str}\left(A_a^{(1)} A_b^{(3)}\right)\right], \tag{3.13}$$

where the first term is the kinetic and the second's a Wess-Zumino term, multiplied by the real number κ to make $\mathcal{L}_{\text{string}}$ real. Decompose the elements $\mathfrak{g}$ of the supergroup $\mathfrak{psu}\,(2,2|4)$ into a bosonic and a fermionic part as follows:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{g}_{\mathfrak{b}}. \tag{3.14}$$

Then A's defined as:

$$A_a = \sum_{i=0}^{3} A_a^{(i)} \equiv -\mathfrak{g}^{-1}\partial_a \mathfrak{g} = -\mathfrak{g}_{\mathfrak{b}}^{-1}\mathfrak{g}_{\mathfrak{f}}^{-1}\left(\partial_a \mathfrak{g}_{\mathfrak{f}}\right)\mathfrak{g}_{\mathfrak{b}} - \mathfrak{g}_{\mathfrak{b}}^{-1}\partial_a \mathfrak{g}_{\mathfrak{b}}. \tag{3.15}$$

The decomposition of A in terms of $A^{(i)}$'s is possible because of the so-called $\mathbb{Z}_4$ grading of $\mathfrak{psu}\,(2,2|4)$. As it turns out, we may write (3.13) as follows:

$$\mathcal{L}_{\text{string}} = -\frac{1}{16\pi\alpha'}\,\mathrm{Str}\Big[\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ab}\left(\mathcal{B}_a + \mathcal{G}\mathcal{B}_a\mathcal{G}^{-1} + \partial_a\mathcal{G}\mathcal{G}^{-1}\right)\left(\mathcal{B}_b + \mathcal{G}\mathcal{B}_b\mathcal{G}^{-1} + \partial_b\mathcal{G}\mathcal{G}^{-1}\right) - \tag{3.16}$$

$$-2i\kappa\epsilon^{ab}\mathcal{F}_a\mathcal{G}\mathcal{F}_b^{st}\mathcal{G}^{-1}\Big], \tag{3.17}$$

where $\mathcal{B}$ and $\mathcal{F}$ are respectively the even $(0,2)$ and odd $(1,3)$ fermionic components of $\mathfrak{g}_{\mathfrak{f}}^{-1}\partial_a\mathfrak{g}_{\mathfrak{f}}$. $\mathcal{G}$ is given by

$$\mathcal{G}=\begin{pmatrix} i\mathcal{G}_{\mathrm{AdS}} & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_{\mathrm{S}} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{g}_{\mathfrak{f}}^{-1}\partial_a\mathfrak{g}_{\mathfrak{f}}\equiv\mathcal{B}_a+\mathcal{F}_a \tag{3.18}$$

with

$$\mathcal{G}_{\mathrm{AdS}}=\begin{pmatrix} 0 & -Y_{05} & Y_{12}^* & Y_{34}^* \\ Y_{05} & 0 & -Y_{34} & Y_{12} \\ -Y_{12}^* & Y_{34} & 0 & -Y_{05}^* \\ -Y_{34}^* & -Y_{12} & Y_{05}^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}_{\mathrm{S}}=\begin{pmatrix} 0 & -X_{56} & -iX_{12}^* & -iX_{34}^* \\ X_{56} & 0 & iX_{34} & -iX_{12} \\ iX_{12}^* & -iX_{34} & 0 & -X_{56}^* \\ iX_{34}^* & iX_{12} & iX_{56}^* & 0 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

and the anti-de Sitter and sphere coordinates are combined into pairs as

$$\begin{aligned} Y_{05}&=Y_0+iY_5 & & X_{12}=X_1+iX_2 \\ Y_{12}&=Y_1+iY_2 & \& \quad & X_{34}=X_3+iX_4 \\ Y_{34}&=Y_3+iY_4 & & X_{56}=X_5+iX_6. \end{aligned} \tag{3.20}$$

The upshot is that the bosonic part of (3.17) ($B=F=0$) is given by the string Polyakov action:

$$S_P=-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau d\sigma\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ab}\partial_a\mathbf{X}^m\partial_b\mathbf{X}^n G_{mn}(\mathbf{X}), \tag{3.21}$$

where $\mathbf{X}_m$ and G_{mn} are the $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ coordinates and metric tensor. The κ-fixed fermionic part is:

$$S_F=-\frac{i}{2\pi\alpha'}\int d\tau d\sigma\left(\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ab}\delta_{\alpha\beta}-\epsilon^{ab}s_{\alpha\beta}\right)\bar{\theta}^\alpha\rho_a\mathcal{D}_b\theta^\beta+O\left(\theta^4\right), \tag{3.22}$$

where θ are Majorana-Weyl spinors and

$$\begin{aligned} &\rho_a\equiv\Gamma_\mu e_m^\mu\partial_a\mathbf{X}^m, \quad G_{mn}=e_m^\mu e_n^\nu\eta_{\mu\nu}, \quad a,b=0,1, \quad m,n=0,1,\ldots,9 \\ &s_{\alpha\beta}\equiv\mathrm{diag}\,(1,-1), \quad \alpha,\beta=1,2, \quad \mu,\nu=0,1,\ldots,9 \\ &\mathcal{D}_m\equiv\partial_m+\frac{1}{4}\omega_m^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}-\frac{1}{8\cdot 5!}\Gamma^{m_1\ldots m_5}\Gamma_m F_{m_1\ldots m_5}, \quad \mathcal{D}_a\equiv\text{projection of }\mathcal{D}_m \\ &\Gamma_\mu=e_\mu^m\Gamma_m,\ \text{(10d Dirac matrices)}. \end{aligned}$$

e_m^μ is the zehnbein, $\eta_{\mu\nu}$ is the 10d Lorentz metric, $\omega_m^{\mu\nu}$ is the Lorentz connection and $F_{m_1\ldots m_5}$ is the 5-form Ramond-Ramond (RR) field. More can be found in the review [39].

3.5 Parameter Matching

When two theories are equal, their fundamental parameters are expected to be in one-to-one correspondence. Because of AdS/CFT, this must be the case for $\mathcal{N}=4$, $\mathfrak{su}(N_c)$ SYM theory and IIB string theory on $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$. The former depends on two fundamental parameters, the rank of the gauge group/number of colors and the 't Hooft/SYM coupling constant:

$$N_c, \quad \lambda=g_{\mathrm{YM}}^2N_c. \tag{3.23}$$

On the string theory side the basic parameters are the AdS_5/5-sphere radius, the fundamental string length/Regge slope and the 10-dimensional Newton's constant/Planck length:

$$\ell=R, \quad \ell_s^2=\alpha', \quad G_{10}=\ell_p^8=\ell_s^8g_s^2. \tag{3.24}$$

The AdS/CFT correspondence links the fundamental parameters of the two theories as follows:

$$\boxed{\text{AdS/CFT Parameter Matching:}\quad \left(\frac{\ell_p}{\ell}\right)^4 = \frac{1}{4\pi N_c}\,, \qquad \left(\frac{\ell_s}{\ell}\right)^4 = \frac{1}{\lambda}}\,. \tag{3.25}$$

We also have for the couplings:

$$g_{\text{YM}}^2 = 4\pi g_s. \tag{3.26}$$

There are two interesting limits that one usually encounters when dealing with AdS/CFT. One is the strong-coupling limit in which, according to (3.25), the fundamental string length tends to zero and the strings are effectively point-like:[10]

$$\lambda \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \ell_s \to 0. \tag{3.28}$$

The second is the large-N_c/planar/'t Hooft limit which, by (3.25), corresponds to free strings:

$$N_c \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad g_s \to 0. \tag{3.29}$$

Combining the two limits (3.28)–(3.29), we obtain the so-called classical (super)gravity approximation:

$$\boxed{\text{Classical Supergravity Approximation:}\quad (\lambda, N_c) \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad (\ell_s, g_s) \to 0}\,, \tag{3.30}$$

in which type IIB string theory reduces to classical IIB supergravity on $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ that is dual to planar strongly coupled $\mathcal{N} = 4$ SYM theory.

3.6 The BMN Sector

Solving the full quantum IIB superstring sigma model on $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ is an extremely difficult and so far impossible task.[11] Instead, the quantum string sigma model can be solved on a plane-wave background (see appendix C for the definition of plane-wave backgrounds and their basic properties), in which the superstring action simplifies significantly [41].

Pp-wave spacetimes are a special class of spacetimes that are α'-exact solutions of supergravity [42]. A particular type of pp-wave is the plane wave which serves as a background in certain maximally supersymmetric solutions of type IIB supergravity. Plane waves can be obtained by taking the Penrose limit of $\text{AdS}_{p+2} \times \text{S}^{q+2}$ and its orbifolds (see appendixes C.2.1–C.2.2). To take the Penrose limit, the radii of AdS_{p+2} and the $(q+2)$-sphere (ℓ and R respectively) must be sent to infinity, while their ratio must be kept fixed:

$$\ell,\; R \to \infty \quad \& \quad \frac{\ell}{R} = \text{fixed}. \tag{3.31}$$

A completely analogous limit, the Berenstein-Maldacena-Nastase (BMN) limit [43], may also be taken on the gauge theory side of the AdS/CFT correspondence, if we consider any operator of $\mathcal{N} = 4$ SYM with scaling dimension Δ and R-charge J, such that:[12]

$$N_c,\; J \to \infty \quad \& \quad \frac{N_c}{J^2} = \text{fixed}, \quad \Delta - J = \text{fixed}. \tag{3.33}$$

[10] In the opposite limit $\lambda \to 0$ the SYM theory is free, while the strings become tensionless since the string tension,

$$\lambda \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{1}{2\pi\alpha'} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi\ell^2} \to 0 \tag{3.27}$$

becomes very small [40].

[11] As it will be explained in more detail in §4.2, solving a theory basically means computing its spectrum.

[12] The scaling dimension Δ of an operator $\mathcal{O}(x)$ determines its behavior under dilations:

$$x' = \alpha x \quad \to \quad \mathcal{O}(\alpha x) = \alpha^{-\Delta}\mathcal{O}(x)\,. \tag{3.32}$$

We're thus led to the so-called (BMN) sector of $\mathcal{N}=4$ SYM which is dual to the Penrose-reduced IIB superstring theory on a plane-wave. The correspondence between these two limiting cases of AdS/CFT is known as the plane-wave/super Yang-Mills duality:

$$\boxed{\begin{tikzcd}
\text{IIB String Theory on } \mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5 \arrow[r, leftrightarrow, "\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4"] \arrow[d, "\text{Penrose Limit}"] & \mathcal{N}=4,\ \mathfrak{su}\,(N_c)\ \text{SYM Theory} \arrow[d, "\text{BMN Limit}"] \\
\text{IIB String Theory on plane-wave} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{plane-wave/SYM}"] & \text{BMN Sector of } \mathcal{N}=4 \text{ SYM}
\end{tikzcd}}$$

The plane-wave/super Yang-Mills duality has been exhaustively studied (see [44] for reviews).

For later purposes it would be useful to define a very similar limit on the string theory side of AdS/CFT, that is known as the Frolov-Tseytlin (FT) limit [45]:

$$\lambda,\ J\to\infty \quad \& \quad \lambda'=\frac{\lambda}{J^2}\ll 1, \tag{3.34}$$

where J is the angular momentum of a string state of IIB string theory on $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$.

3.7 Maldacena Dualities

The arguments of §3.1 and §3.2 may be repeated for other systems of branes besides the D3 system. Low-energy limits lead to decouplings analogous to (3.3)–(3.5) and give rise to a multitude of dualities between 10 or 11-dimensional theories that live in a spacetime that contains an anti-de Sitter part times a compact manifold (or a product thereof) and conformal field theories on a flat spacetime of one dimension less. The results are summarized in the following table.

Gravity Theory	**Spacetime**	**#Dim.**	**Brane System**	**Gauge Theory**	**#Dim.**
IIB String Theory	$\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$	$5+5$	D3	$\mathcal{N}=4$ SYM	$3+1$
IIB String Theory	$\mathrm{AdS}_3\times\mathrm{S}^3\times\mathrm{M}^4$	$3+3$	D1 + D5	$\mathcal{N}=(4,4)$ SCFT	$1+1$
IIB String Theory	$\mathrm{AdS}_2\times\mathrm{S}^2\times\mathrm{M}^6$	$2+2+6$	D3	Conformal QM	$0+1$
M-Theory	$\mathrm{AdS}_7\times\mathrm{S}^4$	$7+4$	M5	$\mathrm{A}_{N_c-1}(2,0)$ SCFT	$5+1$
M-Theory	$\mathrm{AdS}_4\times\mathrm{S}^7$	$4+7$	M2	$\mathcal{N}=8$ SCFT	$2+1$
M-Theory	$\mathrm{AdS}_3\times\mathrm{S}^2\times\mathrm{M}^6$	$3+2+6$	M5	$\mathcal{N}=(0,4)$ SCFT	$1+1$

For the manifold M, $M^4=K3$ or T^4 and $M^6=T^6$, $T^2\times K3$ or CY_3. In all cases containing a p-sphere ($p=3,4,5,7$), there are always N_c units of p-form RR flux on S^p:

$$\int_{\mathrm{S}^p} F_p = N_c, \quad p=3,4,5,7. \tag{3.35}$$

The near-horizon limit results in various values for the ratio $\mathfrak{k}\equiv\ell/R$ of the radius of AdS over that of the corresponding sphere. These are tabulated in the following table for each of the Maldacena dualities:

	$\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$	$\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^3 \times \mathrm{M}^4$	$\mathrm{AdS}_2 \times \mathrm{S}^2 \times \mathrm{M}^6$	$\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$	$\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$	$\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^2 \times \mathrm{M}^6$
$\mathfrak{k} =$	1	1	1	2	1/2	2

3.8 ABJM Correspondence

More recently, another group of dualities between 10 or 11-dimensional theories on AdS_4 spacetime times a compact manifold and a superconformal 3-dimensional field theory has been constructed.[13]

$$\boxed{\left\{\mathcal{N}=6,\ U\left(N_1\right)_k \times U\left(N_2\right)_{-k}\ \text{Super C-S Theory}\right\} \xrightarrow{N_{1,2}\to\infty} \left\{\text{M-Theory on } \mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k\right\}} \tag{3.36}$$

For $N_1 \neq N_2$, (3.36) is the Aharony-Bergman-Jafferis (ABJ) correspondence, while for $N_1 = N_2 = N_c$, it reduces to the Aharony-Bergman-Jafferis-Maldacena (ABJM) duality [46]. For $k = 1$ we obtain the Maldacena duality with M-theory on $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$, dual to $\mathcal{N} = 8$ SCFT. In the case of $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$ gauge group, the left-hand side of (3.36) becomes the $\mathcal{N} = 8$ Bagger-Lambert-Gustavsson (BLG) theory [47]. By doubly dimensionally reducing ABJM, we're led to the following duality:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{N}=6,\ U\left(N_c\right)_k \times U\left(N_c\right)_{-k}\ \text{Super C-S Theory} \\ k^5 \gg N_c \to \infty\ \&\ \lambda \equiv 2\pi^2 N_c/k = \text{const.} \end{array} \longleftrightarrow \text{IIA String Theory on } \mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{CP}^3} \tag{3.37}$$

As for the flux counterparts of the above dualities, there are N_2 units of 4-form RR flux through AdS_4 in (3.36), while in (3.37) there are N_c units of 4-form RR flux through AdS_4 and k units of 2-form RR flux through $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^3$.

3.9 Field/Operator Correspondence

It is often said that in conformal field theories there can be no asymptotic states/particles (consequently no traditional S-matrix) and it is operators that must assume this role.[14] The role of operators in AdS/CFT is the content of the field/operator correspondence. Let us consider the following deformation of the conformal field theory:

$$S' = S + \int d^d x\, \phi\left(x\right) \mathcal{O}\left(x\right), \tag{3.38}$$

where $\mathcal{O}(x)$ is a local gauge-invariant operator and $\phi(x)$ is its source. According to the field/operator correspondence, to each local gauge-invariant operator $\mathcal{O}(x)$ of the (deformed) boundary theory, there corresponds a dual bulk field $\Phi(x, y)$ such that the value of Φ at the boundary ($y \to 0$ in the conformal frame (A.23)) is the source of $\mathcal{O}(x)$:

$$\phi\left(x\right) = \Phi\Big|_{\partial\mathrm{AdS}}\left(x\right) = \lim_{y\to 0} \Phi\left(x, y\right). \tag{3.39}$$

There exists no generic algorithm which maps arbitrary boundary operators to their dual bulk fields or vice-versa. Therefore, a relatively small number of such (heuristic) identifications is known.

[13] In (3.36), super C-S stands for super Chern-Simons theory.

[14] The corresponding S-matrix goes by the name 'world sheet' S-matrix. There's also a 'space-time' S-matrix defined in terms of n-gluon amplitudes. Refer to [48] for more.

As an illustrative example of the field/operator correspondence, let us take a free scalar field in the bulk of AdS_{p+2}:

$$S_\phi = -\frac{1}{2}\int d^{p+2}x\sqrt{-g}\left(\partial_m\Phi\partial^m\Phi + m^2\Phi^2\right) \quad \& \quad ds^2 = \frac{\ell^2}{y^2}\left(-dt^2 + d\mathbf{x}_p^2 + dy^2\right). \tag{3.40}$$

If we solve the equations of motion of this field, we will find out that its behavior near the boundary of AdS ($y \to 0$) is the following:

$$\Phi\left(x,y\right) = \underbrace{A\left(x\right)y^{\Delta_-}}_{\substack{\text{non-normalizable}\\ \text{term}}} + \underbrace{B\left(x\right)y^{\Delta_+}}_{\substack{\text{normalizable}\\ \text{term}}}, \quad y \to 0, \tag{3.41}$$

where

$$\Delta_\pm = \frac{1}{2}\left(d \pm \sqrt{d^2 + 4m^2\ell^2}\right), \qquad d = p+1.^{15} \tag{3.42}$$

For $m^2 > 0$ the behavior of (3.41) at the boundary is dominated by the first term, which blows up as $y \to 0$. Therefore

$$\phi\left(x\right) = A\left(x\right) \tag{3.43}$$

and the *non-normalizable coefficient* $A\left(x\right)$ determines the boundary Lagrangian through (3.38). We may go on and prove that Δ_+ is equal to the scaling dimension Δ of Φ's dual (scalar) operator $\mathcal{O}\left(x\right)$, which is defined as:

$$x' = \alpha x \quad \to \quad \mathcal{O}\left(\alpha x\right) = \alpha^{-\Delta}\mathcal{O}\left(x\right). \tag{3.44}$$

Now notice that since the bulk field $\Phi\left(x,y\right)$ is a scalar, it is invariant under dilatations and

$$\Phi\left(\alpha x, \alpha y\right) = \Phi\left(x,y\right) \quad \Rightarrow \quad A\left(\alpha x\right) = \alpha^{-\Delta_-}A\left(x\right) \quad \& \quad B\left(\alpha x\right) = \alpha^{-\Delta_+}B\left(x\right). \tag{3.45}$$

Therefore, (3.38)–(3.42) imply that

$$\Delta_- = d - \Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta_+ = d - \Delta_- = \Delta. \tag{3.46}$$

As it turns out, the *normalizable coefficient* $B\left(x\right)$ can be put into 1-1 correspondence with states in the Hilbert space of the boundary theory. It can also be shown that $B\left(x\right)$ is related to the expectation value of the boundary operator $\langle\mathcal{O}\left(x\right)\rangle$. Summing up,

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Bulk Renormalizable Modes} \longleftrightarrow \text{Boundary States} \\[2ex] \text{Bulk Non-Renormalizable Modes} \longleftrightarrow \text{Boundary Lagrangian.} \end{array}\right\}$$

The previous analysis may be repeated for gauge theory operators of any spin. The following table is from reference [9]:

Field	Spin	Scaling Dimensions
Scalar	0	$\frac{1}{2}\left[d \pm \sqrt{d^2 + 4m^2\ell^2}\right]$
Spinor	1/2, 3/2	$\frac{1}{2}\left(d + 2\lvert m\rvert\ell\right)$
Vector	1	$\frac{1}{2}\left[d \pm \sqrt{\left(d-2\right)^2 + 4m^2\ell^2}\right]$
Massless Spin-2	2	d
q-form	-	$\frac{1}{2}\left[d \pm \sqrt{\left(d-2q\right)^2 + 4m^2\ell^2}\right]$.

[15] Note that for real $\Delta_\pm$, negative masses squared are allowed to a certain extent ($4m^2\ell^2 \geq -d^2$), a condition that is known as the Breitenlohner-Freedman (BF) bound.

3.10 Testing $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ Correspondence

We are going to finish this section with a concise discussion of the main tests of the AdS/CFT correspondence. Although our treatment will focus on the $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ correspondence, all the tests that will be discussed can be appropriately generalized to any of the gauge/gravity dualities.

The $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ correspondence (3.1) implies that the partition function of type IIB string theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ and the partition function of $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N)$ super Yang-Mills (SYM) theory are equal:

$$\mathcal{Z}_{\text{string}} \left[\Phi \Big|_{\partial\mathrm{AdS}} (x) \right] = \mathcal{Z}_{\mathrm{CFT}} \left[\phi (x) \right], \tag{3.47}$$

where ϕ are the sources of all gauge-invariant operators of $\mathcal{N} = 4$ SYM and Φ are their dual bulk fields. Statement (3.47) constitutes a generalization of the field/operator correspondence (3.39), according to which not only the boundary operators but every boundary observable (spectra, correlation functions, scattering amplitudes, Wilson loops, etc.) possesses a dual and equal observable in the bulk. The next level of generalization is the existence of a one-to-one mapping between the properties of type IIB superstring theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ and those of $\mathcal{N} = 4$ SYM. This map is colloquially known as the AdS/CFT "DICTIONARY". Deciphering and building the dictionary of AdS/CFT correspondence is one of the most significant problems in theoretical physics.

At the time of speaking, the official status of the AdS/CFT correspondence is "conjecture". It is not known whether a rigorous mathematical argument exists with which we can credibly prove or disprove the correspondence, neither has a theoretical algorithm of any sort been devised that, if faithfully followed, it can lead to an accepted proof or disproof of it. Remarkably, the problem of rigorously proving the AdS/CFT correspondence appears in A. Strominger's Strings 2014 list of "deep and interesting" questions that can be solved within the next 5-10 years.[16] To date, there exist three basic formulations of the $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ correspondence:

- Weak Formulation of AdS/CFT: the correspondence is valid only for $N_c,\ \lambda \to \infty$.
- Medium Formulation of AdS/CFT: the correspondence is valid only for $N_c \to \infty$.
- Strong Formulation of AdS/CFT: the correspondence is valid for all $N_c,\ \lambda$.

However, the landscape is not 100% clear with any of them. As we will also discuss in §4.2 (dealing with $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ integrability) there are indications that the correspondence is valid in its two weakest formulations but, in its present form, not in the strong formulation. E.g. in the tensionless limit $\lambda \to 0$, the picture is far from clear [40]. For the time being, the mainstream strategy for proving or disproving AdS/CFT, consists in computing the observables of both theories as accurately as possible and looking for agreement or disagreements. At the same time, significant effort is dedicated to completing the AdS/CFT dictionary. In the next section, a very powerful tool for computing and identifying the AdS/CFT observables will be presented: integrability.

Beyond computing/comparing and matching the observables, there exist various other tests that permit to compare the two theories of AdS/CFT, namely type IIB string theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ and $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N)$ SYM theory. In what follows we will briefly present some of these tests. Our emphasis however will be on the matching of the spectra, since this is directly related with the scope and content of this thesis.

[16] See `http://physics.princeton.edu/strings2014/slides/Strominger.pdf`, page 13. E. Kiritsis' clue is to study the symmetries of the generalized Schwinger source functional and then try to map it in string field theory...

3.10.1 Symmetries

Type IIB superstrings are defined on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ and thus they share its symmetries, namely the global bosonic isometry $\mathfrak{so}(4,2) \times \mathfrak{so}(6)$ that is extended to the AdS_5 supergroup $\mathfrak{psu}(2,2|4)$.

As we have said, $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N_c)$ SYM theory is conformally invariant and therefore it has the $d = 4$ conformal group $\mathfrak{so}(4,2)$ as a symmetry. Lagrangian (3.6) also has a manifest $\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6)$ R-symmetry related to the compactification from $d = 10$ down to $d = 4$ dimensions, under which the six scalars ϕ_i transform as vectors. Again, the $\mathfrak{so}(4,2) \times \mathfrak{so}(6)$ symmetry is extended to the super AdS_5 group $\mathfrak{psu}(2,2|4)$. All in all there are $15 + 15$ bosonic generators (15 conformal and 15 R-symmetries) and $16 + 16$ fermionic generators (16 Poincaré and 16 superconformal) in $\mathfrak{psu}(2,2|4)$:

Bosonic Generators	Fermionic Generators	
$D,\ P_\mu,\ K_\mu,\ L_{\mu\nu}$	$Q^{\mathrm{a}}_{\alpha},\ \bar{Q}^{\mathrm{a}}_{\dot{\alpha}}$	$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad \mathrm{a} = 1, 2, 3, 4$
$T^{\mathfrak{a}}$	$S^{\mathrm{a}}_{\alpha},\ \bar{S}^{\mathrm{a}}_{\dot{\alpha}}$	$\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2, \quad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, 15$

For later use, let us also write down the scaling dimensions of these generators:

$$[D] = [L_{\mu\nu}] = [T^{\mathfrak{a}}] = 0, \quad [P_\mu] = 1, \quad [K_\mu] = -1, \quad [Q] = \frac{1}{2}, \quad [S] = -\frac{1}{2}. \tag{3.48}$$

In addition to the above symmetries, both theories share a non-perturbative $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{Z})$ symmetry or S-duality. String theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ is also invariant under a certain T-duality [49]. The study of scattering amplitudes in planar $\mathcal{N} = 4$ SYM theory revealed the existence of dual superconformal symmetry, a hidden symmetry that corresponds to the symmetry of $\mathcal{N} = 4$ SYM Wilson loops and incorporates T-duality within $\mathcal{N} = 4$ SYM. Both dual and ordinary superconformal symmetries combine into the Yangian symmetry, which generalizes $\mathfrak{psu}(2,2|4)$ and it is a symmetry that is typically exhibited by integrable systems.

3.10.2 Spectra

Perhaps the most important prediction of the AdS/CFT correspondence is the equality between the spectra of $\mathcal{N} = 4$ SYM and type IIB string theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. As we have already said, the role of particles in CFTs is played by operators, the spectrum of which is composed by their scaling (and possibly anomalous) dimensions. On the other hand we have string states and their corresponding energies. Matching the spectra of the two theories generally involves the following steps:

1. Compute the scaling dimensions Δ of all gauge-invariant operators of $\mathcal{N} = 4$ SYM.

2. Compute the energies E of IIB superstring states in $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$.

3. Map the operators of $\mathcal{N} = 4$ SYM to IIB string states in $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$.

4. Compare the operator dimensions Δ with the dual string energies E and find agreement.

Steps 1 and 2 are less complicated in the planar limit ($N_c \to \infty$), in which IIB string theory contains only free closed string states on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. Another limitation is that, except from relatively few cases, there's no general method by which to perform the state/operator mapping of step 3. That is mainly due to two reasons: (a) it is hard to quantize the string sigma model on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ and (b) the spectrum of gauge-invariant operators is rather difficult to compute.

Progress in step 4 is drastically hindered by the weak/strong coupling nature of AdS/CFT. For small 't Hooft coupling ($\lambda \to 0$), $\mathcal{N} = 4$ SYM theory is weakly coupled and the spectrum may be computed perturbatively. However, the perturbative regime of IIB string theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ covers only large values of the 't Hooft coupling ($\lambda \to \infty$), where the dual gauge theory is strongly coupled and far from its perturbative region. This means that we cannot directly compare the operator scaling dimensions with the energies of their dual string states, unless we find some reliable way of extrapolating our results from weak to strong coupling and vice-versa.

Let us first try to describe the spectral problem on the gauge theory side. We will consider only local gauge-invariant operators, the constituent fields of which depend on just one point in spacetime. All such operators can be divided into single and multiple-trace operators which are dual to single and multi-particle states respectively. Only the former will concern us here. In order to classify all the local gauge-invariant single-trace operators of $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N_c)$ SYM, it is useful to introduce the notion of superconformal primary operators and their descendants.

Conformal primary operators are annihilated by the conformal generators K_μ, while superconformal primary operators are annihilated by the superconformal generators S_α^{a} and have the lowest dimension in a given superconformal multiplet of a unitary representation of $\mathfrak{psu}(2,2|4)$. Superconformal descendant operators are obtained by the action of Poincaré generators on another operator of the same multiplet. Chiral superconformal primaries (aka BPS operators) are annihilated by at least one of the Poincaré supercharges and fall in short representations of the algebra. This means that BPS operators (and their descendants) are unrenormalized i.e. their scaling dimensions are protected against quantum corrections. Depending on the number of Q's that annihilate them, chiral primaries are dubbed 1/2 BPS, 1/4 BPS or 1/8 BPS. These are annihilated by half, 1/4 or 1/8 of the Poincaré supercharges respectively. A very useful corollary is that chiral primaries are composed solely out of the scalar fields of $\mathcal{N} = 4$ SYM:[17]

$$\mathcal{O}^{j_1 j_2 \ldots j_n} = \mathrm{Tr}\left[\phi^{(j_1}\phi^{j_2}\ldots\phi^{j_n)}\right]. \tag{3.49}$$

All unitary representations of $\mathfrak{psu}(2,2|4)$ have been classified by Dobrev and Petkova according to the quantum numbers of the following bosonic subgroup of $\mathfrak{so}(4,2) \times \mathfrak{so}(6)$:

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{\begin{array}{ccc}\mathfrak{so}(1,1) & \times & \mathfrak{so}(1,3) \\ \Delta & & s_\pm\end{array}}^{\mathfrak{so}(4,2)} & \times & \overbrace{\begin{array}{c}\mathfrak{su}(4)\\ [r_1,r_2,r_3]\end{array}}^{\mathfrak{so}(6)} \end{array}, \tag{3.50}$$

where $[r_1, r_2, r_3]$ are the Dynkin labels of the $\mathfrak{su}(4)$ representation. There exist four distinct series of representations, three of which are BPS (i.e. they contain a chiral primary) and one is non-BPS (without any chiral operator). All local gauge-invariant single-trace operators of $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N_c)$ SYM theory are classified according to the Dobrev-Petkova scheme (3.50).

On the string theory side, a similar classification applies. String states on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ are characterized by six conserved charges: their energy E, their AdS spins $S_{1,2}$ and their S^5 spins $J_{1,2,3}$. These charges correspond to the cyclic coordinates (5.6) of the bosonic string action on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ and are in one-to-one correspondence with the operator classification (3.50) of $\mathcal{N} = 4$ SYM:

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{\begin{array}{ccc}\mathfrak{so}(1,1) & \times & \mathfrak{so}(1,3) \\ E & & S_1, S_2\end{array}}^{\mathrm{AdS}_5 \sim \mathfrak{so}(4,2)} & \times & \overbrace{\begin{array}{c}\mathfrak{su}(4)\\ J_1, J_2, J_3\end{array}}^{\mathrm{S}^5 \sim \mathfrak{so}(6)} \end{array}. \tag{3.51}$$

[17] In (3.49), parentheses ( ) denote symmetrization with respect to the indices $j_1, j_2, \ldots, j_n$.

In the classical supergravity limit ($N_c, \lambda \to \infty$) the spectrum of 1/2 BPS operators of $\mathcal{N} = 4$ SYM is completely matched by that of IIB supergravity compactified on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. Thus BPS operators are dual to free point-like strings ($g_s, \ell_s \to 0$). For details and further references, the reader is referred to the reviews [9, 24].

Spectra have also been found to match in the BMN limit (3.33). As we have already explained, the string sigma model can be solved on plane-wave backgrounds and the energies of the free string states that are found are in complete agreement with the calculated dimensions of their dual gauge theory operators. BMN operators are 'almost' protected—therefore 'almost' BPS—and their dual free string states are 'nearly' point-like. For more on this topic, the reader is referred to the original paper [43] and the reviews [44] of the plane-wave/SYM duality.

Beyond the BPS and BMN operators, it is integrability that comes into play, providing the tools for a complete solution of the spectral problem. We will have more to say about this in the next section. Even such a powerful technique as integrability has its shortcomings and an input from other methods is still necessary. For example there exist some regimes where the equations coming from integrability are completely intractable. What is more, the state/operator correspondence gets a bit blurred with integrability. Also, only a few methods have so far been able to provide closed formulas for the calculated spectra. In part II of this thesis we are going to describe the state of affairs in precisely these regions where integrability by itself is not enough and propose a possible method to proceed.

3.10.3 Correlation Functions

The computation of correlation functions in AdS/CFT essentially makes use of the fact that conformal symmetry completely determines 2 and 3-point correlation functions. For example, the correlator of two scalar (single-trace) primary operators $\mathcal{O}_{(i,j)}(x)$, having scaling dimensions Δ_i and Δ_j is given by [50]:

$$\langle \mathcal{O}_i(x_i)\, \mathcal{O}_j(x_j) \rangle = \frac{\delta_{ij}}{x_{ij}^{2\Delta_i}}. \tag{3.52}$$

The corresponding 3-point function is:

$$\langle \mathcal{O}_i(x_i)\, \mathcal{O}_j(x_j)\, \mathcal{O}_k(x_k) \rangle = \frac{C_{ijk}}{|x_{ij}|^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}\, |x_{jk}|^{\Delta_j+\Delta_k-\Delta_i}\, |x_{ki}|^{\Delta_k+\Delta_i-\Delta_j}}, \tag{3.53}$$

where C_{ijk} are the structure constants and Δ_k are the scaling dimension of $\mathcal{O}_k(x)$. At the planar limit ($N_c \to \infty$), the constants C_{ijk} generally admit the following weak-coupling expansion:

$$C_{ijk} = c_{ijk}^{(0)} + \lambda \cdot c_{ijk}^{(1)} + \lambda \cdot c_{ijk}^{(2)} + \ldots, \tag{3.54}$$

Higher-point correlation functions are computed from the 2 and 3-point ones by using the operator product expansion (OPE). The problem of actually computing correlation functions in the AdS/CFT correspondence therefore reduces to that of computing OPE coefficients of the form (3.54), at either weak ($\lambda \to 0$) or strong coupling ($\lambda \to \infty$).

While at weak coupling one may proceed perturbatively by computing the corresponding Feynman diagrams, the evaluation of correlation functions at strong coupling is done by using the string description through (3.47). Denoting by W the generating functional of connected gauge theory Green's functions and by S_{string} the IIB string theory action on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$, we have:

$$e^{-S_{\text{string}}[\Phi(x,y=0)]} = \mathcal{Z}_{\text{string}}\left[\Phi(x, y=0)\right] = \mathcal{Z}_{\text{CFT}}\left[\phi(x)\right] = e^{-W[\phi(x)]}, \tag{3.55}$$

with the boundary of AdS located at $y = 0$. The next step involves the renormalization of the Euclideanized bulk action $S^{(\text{ren})}_{\text{string}}$ and solution of the bulk equations of motion that are obtained by minimizing it. Imposing the proper boundary conditions at $y = 0$ and substituting the solution into the renormalized action we get:

$$W[\phi(x)] \approx S^{(\text{ren})}_{\text{string}}\left[\Phi^{(\text{E})}_{\text{C}}(x,0)\right] = S^{(\text{ren})}_{\text{sugra}}\left[\Phi^{(\text{E})}_{\text{C}}(x,0)\right] + O\left(\alpha'\right), \tag{3.56}$$

since S_{string} is just the IIB supergravity action on $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ plus α' corrections. Thus in the classical supergravity approximation (3.30),

$$W[\phi(x)] \approx S^{(\text{ren})}_{\text{sugra}}\left[\Phi^{(\text{E})}_{\text{C}}(x,0)\right]. \tag{3.57}$$

The n-point connected correlation function between the boundary operators $\mathcal{O}(x)$ is then calculated by the formula:

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\,\mathcal{O}_2(x_2)\ldots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle = \left.\frac{\delta S^{(\text{ren})}_{\text{string}}\left[\Phi^{(\text{E})}_{\text{C}}\right]}{\delta\phi(x_1)\,\delta\phi(x_2)\ldots\delta\phi(x_n)}\right|_{\phi=0}. \tag{3.58}$$

The matching of correlation functions as calculated from both sides of the AdS/CFT correspondence has been achieved in many cases, e.g. for correlators of BPS operators. But since this is largely a subject of intense current interest, we will defer any further discussion of it and refer the interested reader to the existing literature.

3.10.4 Anomalies, Moduli Spaces, etc.

Another test of the $\text{AdS}_5/\text{CFT}_4$ correspondence is the matching of the anomalies[18] that arise when $\mathcal{N} = 4$ SYM is coupled to external gravitational or gauge fields. Deforming the gauge theory by an $\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6)$ global current, an (axial) anomaly of the Adler-Bell-Jackiw type ensues, while $\mathfrak{so}(4,2)$ currents produce a Weyl/conformal anomaly. Both anomalies may be reproduced on both sides of the duality to leading order in $1/N_c$, providing a valuable confirmation of the correspondence.

Many more compatibility tests between the two theories exist, e.g. the matching of the moduli space of $\mathcal{N} = 4$ SYM, namely $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{6(N_c-1)}/\mathcal{S}_{N_c}$[19] with that of string theory on $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$, the behavior of the two theories under deformations or finite temperature, etc. For more, a nice starting point is the review [9].

[18] An anomaly is the violation of a classical symmetry at the quantum level.
[19] $\mathcal{S}_{N_c}$ is the permutation group of N_c elements.

4 AdS/CFT Integrability

4.1 Classical & Quantum Integrability

4.1.1 Classical Integrability

We will consider classical integrability in the sense of *Liouville integrability*. Generally speaking, a classical Hamiltonian system is Liouville integrable when it possesses a maximal set of Poisson commuting invariants. In a finite, even-dimensional symplectic phase space, the coordinates q_i and the momenta p_i satisfy:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M \in \mathbb{Z}, \tag{4.1}$$

where the Poisson bracket $\{\_, \_\}$ is defined as

$$\{f\,,\,g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}. \tag{4.2}$$

The coordinates q_i and the momenta p_i also satisfy Hamilton's equations of motion:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{4.3}$$

We will say that an autonomous $2M$-dimensional Hamiltonian system with Hamiltonian H is completely integrable if and only if (iff) there exist M independently conserved quantities I_i such that:[20]

$$\{I_i, H\} = \{I_i, I_j\} = 0, \quad \forall\ i, j = 1, 2, \ldots, M \in \mathbb{Z}. \tag{4.4}$$

Due to a theorem of 1855 by Bour and Liouville, the solution of every classically integrable system may be obtained by finitely many algebraic operations (including inversions) and quadratures (i.e. integrations). We note however that no general criterion for deciding whether a given system is completely integrable exists. For more on the topic of classical integrability we refer the interested reader to the book by Perelomov [51].

4.1.2 Quantum Integrability

Quantum integrability comes up when we canonically quantize a classical system. Replacing all the functions of coordinates by local operators and Poisson brackets { , } by commutators [,] so that

$$\{f\,,\,g\} \to i\hbar\left[\hat{F}\,,\,\hat{G}\right], \tag{4.5}$$

the position and momentum observables $\hat{\mathbf{q}}$ and $\hat{\mathbf{p}}$ satisfy the canonical commutation relation:

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M \in \mathbb{Z}. \tag{4.6}$$

A $2M$-dimensional Hamiltonian system with Hamiltonian $\hat{H}$ is quantum integrable iff there exist M mutually commuting operators $\hat{I}_i$ such that:

$$\left[\hat{I}_i, \hat{H}\right] = \left[\hat{I}_i, \hat{I}_j\right] = 0, \quad \forall\ i, j = 1, 2, \ldots, M \in \mathbb{Z}. \tag{4.7}$$

As argued in [52], this definition of quantum integrability is incomplete because it is at odds with the classical expectation (following the Bour-Liouville theorem) that integrability implies complete solvability of a system. A more precise definition of quantum integrability for systems that support particle scattering, precludes diffractive scattering between particles [53]. This definition of quantum

[20] If only the first of these two conditions holds but not the second, the system is called integrable.

integrability is very closely related to the absence of particle production/annihilation and the factorizability of the corresponding scattering matrix that will be discussed below.

Yet another more precise definition of quantum integrability may be given in terms of a Lax pair. If two operators $\hat{A}$ and $\hat{L}$ (Lax pair) can be found so that (henceforth $\hbar = 1$)

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = i\left[\hat{L}, \hat{H}\right] = i\left[\hat{A}, \hat{L}\right], \tag{4.8}$$

it can be proved that the matrix

$$\hat{D}(u) \equiv \det\left(u\hat{\mathbb{I}} + \hat{L}(t)\right), \tag{4.9}$$

satisfies

$$\left[\hat{D}(u), \hat{H}\right] = \left[\hat{D}(u), \hat{D}(u')\right] = 0. \tag{4.10}$$

If in addition,

$$\hat{D}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{Q}_n u^n. \tag{4.11}$$

$\hat{Q}_n(u)$ are local conserved charges:

$$\left[\hat{Q}_n, \hat{H}\right] = \left[\hat{Q}_m, \hat{Q}_n\right] = 0, \quad m, n = 1, 2, \ldots. \tag{4.12}$$

Hence this method offers the possibility of constructing all the conserved charges that appear in the definition (4.7).

4.2 Integrability in $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$

Coset space sigma models have been known to be classically integrable since the work of Lüscher and Pohlmeyer [54, 55], Zakharov and Mikhailov [56] and Eichenherr and Forger [57] in the late 1970's. Classical integrability of the bosonic sector of IIB superstring theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ was established by Mandal, Suryanarayana and Wadia in [58]. Bena, Polchinski and Roiban [10] proved that the full kappa-invariant IIB superstring action on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$, defined as a two-dimensional nonlinear sigma model on the coset

$$\frac{\mathfrak{psu}(2,2|4)}{\mathfrak{so}(4,1) \times \mathfrak{so}(5)}, \tag{4.13}$$

is classically integrable.

According to what has been said in the previous subsection, in order to establish integrability at the quantum level, non-diffractive scattering or equivalently the absence of particle production/annihilation and factorization of the S-matrix have to be proven. Although it is generally very difficult, and so far it has been impossible to formally prove quantum integrability for either the planar $(N_c \to \infty)$ $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N_c)$ SYM theory or the free $(g_s \to 0)$ IIB superstring theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$, it is usually assumed that either theory is quantum integrable. The implications of this assumption are then investigated for agreement or possible discrepancies. There is currently a consensus that both theories are quantum integrable at the planar/free string limit. Beyond the planar level, there exist indications that integrability breaks down for finite values of N_c.

Solving a theory means that we are able to compute all of its observables: spectrum, correlation functions, scattering amplitudes, Wilson loops. In the $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ correspondence, integrability provides computational methods for solving the theory in the above sense. Moreover, it is claimed that the spectral problem of both planar $\mathcal{N} = 4$ SYM and free IIB string theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ is fully solved by the assumption of integrability [59]. "Solving" the spectral problem is taken to mean that the full set of algebraic equations that is needed in order to determine the scaling dimensions of all the local gauge-invariant operators of planar $\mathcal{N} = 4$ SYM or the energies of all the free superstring states on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ as a function of the 't Hooft coupling λ, is known.

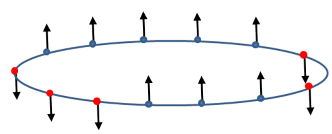
4.3 Integrability in the $\mathfrak{su}(2)$ Sector

In this subsection we are going to briefly review integrability in the $\mathfrak{su}(2)$ sector of $\mathcal{N} = 4$ SYM, following the very nice pedagogical reviews of Plefka [60], Dorey [61] and Minahan [62]. The $\mathfrak{su}(2)$ sector consists of the single-trace operators

$$\mathcal{O}^{(J,M)} = \mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}^J \mathcal{X}^M\right] + \ldots, \quad L \equiv J + M, \tag{4.14}$$

where $\mathcal{Y}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Z}$ are the three complex scalar fields of $\mathcal{N} = 4$ SYM, composed out of the six real scalars ϕ of the theory (3.8). As we will see below, where we will explicitly construct the exact form of the operators (4.14), the dots stand for the permutations of the fields inside the trace while each term must be multiplied by a suitable coefficient. We will also see below that this sector is dual to (closed) strings that rotate in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^3 \subset \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$.

For reasons that will become apparent in what follows, it is very practical to regard the complex fields $\mathcal{Z}$ in (4.14) as the ground state fields (spin up) and $\mathcal{X}$ as some sort of impurities (spin down) in a spin chain. Owing to the cyclic property of traces this spin chain must be closed. Its length is L, its spin J, while M is its number of magnons. E.g. a permutation of a $(L, J, M) = (13, 8, 5)$ spin chain is

$\mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}^5 \mathcal{X}^2 \mathcal{Z}^3 \mathcal{X}^3\right] \quad \longleftrightarrow$  $= \quad |\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\rangle.$

In order to solve the spectral problem in the $\mathfrak{su}(2)$ sector of planar $\mathcal{N} = 4$ SYM we have to compute the scaling dimensions of the operators (4.14) for all the values of the coupling λ. One way to proceed is to compute their two-point function:

$$\langle \mathcal{O}(x)\, \mathcal{O}(y) \rangle = \frac{\mathrm{const.}}{|x - y|^{2\Delta}}, \tag{4.15}$$

where Δ are the scaling dimensions of $\mathcal{O}(x)$ since by definition,

$$x' = \alpha x \quad \rightarrow \quad \mathcal{O}(\alpha x) = \alpha^{-\Delta} \mathcal{O}(x)\,. \tag{4.16}$$

Note however that the exact form of the operators $\mathcal{O}$ has not been specified yet. We only know that they have to be of the form (4.14).

The two-point function (4.15) may be evaluated in perturbation theory by the standard Feynman-diagrammatic methods. To deal with the divergences that appear from one loop on, we introduce a UV cutoff Λ and subtract the divergent parts. Effectively we define a renormalized operator

$$\mathcal{O}^A_{\mathrm{ren}} = Z^A_B \cdot \mathcal{O}^B_{\mathrm{bare}}, \tag{4.17}$$

that mixes all the $\mathfrak{su}(2)$ bare operators. The matrix of scaling dimensions is then given by

$$\mathbb{D} = \frac{dZ}{d \log \Lambda} \cdot Z^{-1} \tag{4.18}$$

and generates dilatations in the $\mathfrak{su}(2)$ sector

$$\mathbb{D} \cdot \mathcal{O}^{(J,M)} = \Delta\, \mathcal{O}^{(J,M)}, \tag{4.19}$$

in the sense that its eigenvectors are well-defined operators of the form (4.14) and the corresponding eigenvalues are their scaling dimensions. As we have just said these get renormalized at one loop order, so that their bare/tree-level values typically receive loop-corrections:[21]

$$\Delta = \Delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \gamma_n. \tag{4.20}$$

The renormalized minus the bare part of the scaling dimensions is known as the anomalous dimension of the corresponding operator and is usually denoted by γ:

$$\gamma \equiv \Delta - \Delta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \gamma_n. \tag{4.21}$$

Each loop correction contributes an extra λ term, so that the n-th loop gets multiplied by λ^n. Since the scaling dimension of $\mathcal{N} = 4$ scalars is equal to one, the bare dimension of the operators (4.14) is just equal to their length L. To obtain the anomalous part, Minahan and Zarembo followed the steps that were outlined above and proved in 2002 [63] that the one-loop dilatation operator of the $\mathfrak{su}(2)$ sector of $\mathcal{N} = 4$ SYM is the Hamiltonian of the Heisenberg $\text{XXX}_{1/2}$ quantum spin chain:

$$\mathbb{D} = L \cdot \mathbb{I} + \frac{\lambda}{8\pi^2} \mathbb{H} + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^n \mathbb{D}_n, \quad \mathbb{H} = \sum_{j=1}^{L} \left(\mathbb{I}_{j,j+1} - \mathbb{P}_{j,j+1}\right) = 2 \sum_{j=1}^{L} \left(\frac{1}{4} - \mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_{j+1}\right). \tag{4.22}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ are the standard Pauli matrices

$$\mathbf{S} \equiv \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\right), \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

and the indices j or $j+1$ in (4.22) indicate that the corresponding matrix acts only on positions j or $j+1$ of the corresponding spin vector:

$$|\uparrow \ldots \underset{j}{\uparrow} \underset{j+1}{\downarrow} \ldots \uparrow\rangle, \quad \uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

$\mathbb{I}_{i,j}$ and $\mathbb{P}_{i,j}$ are the spin-identity and spin-exchange operators defined respectively as

$$\left(\mathbb{I}_{i,j}\right)_{abcd} \equiv \left(\delta_{ab}\right)_i \left(\delta_{cd}\right)_j, \qquad \mathbb{P}_{i,j} \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbb{I}_{i,j} + \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j\right). \tag{4.25}$$

One may prove that their action is the following:

$$\mathbb{I}_{i,j}|\uparrow \ldots \underset{i}{\uparrow} \ldots \underset{j}{\downarrow} \ldots \uparrow\rangle = |\uparrow \ldots \underset{i}{\uparrow} \ldots \underset{j}{\downarrow} \ldots \uparrow\rangle, \tag{4.26}$$

$$\mathbb{P}_{i,j}|\uparrow \ldots \underset{i}{\uparrow} \ldots \underset{j}{\downarrow} \ldots \uparrow\rangle = |\uparrow \ldots \underset{i}{\downarrow} \ldots \underset{j}{\uparrow} \ldots \uparrow\rangle. \tag{4.27}$$

4.3.1 Coordinate Bethe Ansatz

The spin chain (4.22) may be diagonalized by the (coordinate) Bethe ansatz (BA), found by Bethe in 1931 [64]. It is convenient at first to ignore the trace condition in (4.14) and temporarily replace the corresponding closed spin chain with a periodic one having period equal to its (finite or infinite) length $L = J + M$. When we are done with the calculation we shall impose the trace condition by demanding that our results are invariant under cyclic permutations of the spin chain.

The vacuum state of the Heisenberg ferromagnet corresponds to $\mathbf{M} = 0$ magnon operators:

$$\text{Tr}\left[\mathcal{Z}^L\right] \sim |0\rangle = |\uparrow \ldots \uparrow\uparrow\uparrow \ldots \uparrow\rangle. \tag{4.28}$$

[21] Also known as curvature or α' corrections.

$\mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}^L\right]$ are in fact protected operators (a.k.a. chiral primary or BPS) so that their scaling dimensions are unrenormalized:

$$\Delta = J = L. \tag{4.29}$$

The BA is applied to $\mathbf{M} = 1$ magnon operators:

$$\mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}^J \mathcal{X}\right] \sim |x\rangle = |\uparrow \ldots \uparrow \underset{x}{\downarrow} \uparrow \ldots \uparrow\rangle. \tag{4.30}$$

These are diagonalized by the following Fourier transformation:

$$|p\rangle = \sum_{x=1}^{J+1} e^{ipx}|x\rangle \quad \longrightarrow \quad \Delta = J + 1 + \frac{\lambda}{2\pi^2}\sin^2\frac{p}{2} + O\left(\lambda^2\right), \tag{4.31}$$

where the scaling dimensions Δ are the eigenvalues of the dilatation operator (4.22) with corresponding eigenvector $|p\rangle$. Because of the periodicity of the spin chain, the Fourier coefficients should be periodic

$$e^{ipL} = 1. \tag{4.32}$$

$\mathbf{M} = 2$ magnon operators,

$$\mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}^J \mathcal{X}^2\right] \sim |x_1, x_2\rangle = |\uparrow \ldots \uparrow \underset{x_1}{\downarrow} \uparrow \ldots \uparrow \underset{x_2}{\downarrow} \uparrow \ldots \uparrow\rangle \tag{4.33}$$

are diagonalized by the eigenvectors:

$$|p_1, p_2\rangle = \sum_{x_2 > x_1 = 1}^{J+2} \left(e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} + S_{21} e^{ip_1 x_2 + ip_2 x_1}\right)|x_1, x_2\rangle. \tag{4.34}$$

This wave function is the sum of two terms. The first represents two incoming magnons with momenta p_1, p_2, while in the second term the magnons have scattered by exchanging their momenta and have acquired a phase shift S_{21}. S_{21} is known as the S-matrix of the scattering process. This and the corresponding eigenvalues/scaling dimensions are found to be:

$$\Delta = J + 2 + \frac{\lambda}{2\pi^2}\sum_{j=1,2}\sin^2\frac{p_j}{2} + O\left(\lambda^2\right), \quad S_{12} = \frac{u_1 - u_2 + i}{u_1 - u_2 - i} = S_{21}^{-1}, \quad u_j = \frac{1}{2}\cot\frac{p_j}{2}, \tag{4.35}$$

where u_j is known as the rapidity of the jth magnon. The periodic b.c.'s give what is known as the Bethe ansatz equations (BAEs):

$$e^{ip_1 L} = S_{12}, \quad e^{ip_2 L} = S_{21}. \tag{4.36}$$

For operators with $\mathbf{M} > 2$ magnons,

$$\mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}^J \mathcal{X}^M\right] \sim |x_1, x_2, \ldots, x_M\rangle = |\uparrow \ldots \uparrow \underset{x_1}{\downarrow} \uparrow \ldots \uparrow \underset{x_2}{\downarrow} \uparrow \ldots \uparrow \underset{x_M}{\downarrow} \uparrow \ldots \uparrow\rangle \tag{4.37}$$

the Bethe ansatz generalizes the previous ones:

$$|p_1, p_2, \ldots, p_M\rangle = \sum_{x_M > \ldots > x_1 = 1}^{J+M}\left[\sum_{\sigma} S_{\sigma(1,2,\ldots,M)} e^{ip_j x_{\sigma_j}}\right]|x_1, x_2, \ldots, x_M\rangle, \tag{4.38}$$

where $\sigma\left(1, 2, \ldots, M\right)$ stands for a permutation of $\left(1, 2, \ldots, M\right)$ and the sum is over all permutations.[22] The corresponding eigenvalues are:

$$\Delta = J + M + \frac{\lambda}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{M}\sin^2\frac{p_j}{2} + O\left(\lambda^2\right). \tag{4.39}$$

[22]Note also that $S_{12\ldots M} = 1$.

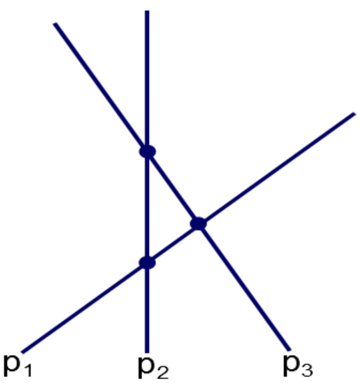
The periodicity of the spin chain leads to the following Bethe ansatz equations:

$$e^{ip_j L} = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M} S_{jk}\,,\ j = 1, 2, \ldots, M. \tag{4.40}$$

The important new feature here is the factorization of the M-magnon S-matrix into a product of 2-magnon S-matrices. This in particular implies that the system is quantum integrable. To see how this comes about, note that in 2-magnon scattering the individual particle momenta are conserved and not just their sum. The same must hold true for M-magnon scattering, whenever the S-matrix factorizes:

$$\{p'_1, p'_2, \ldots, p'_M\} = \{p_1, p_2, \ldots, p_M\}\,, \tag{4.41}$$

therefore we obtain M conservation laws with $0 \leq M \leq L$, meaning that the system is integrable. Integrability also has many other interesting consequences on the properties of the S-matrix, such as the Yang-Baxter relation.



We are now ready to impose the trace condition that we have suspended so far. Because of the cyclic property of traces, the Bethe eigenvectors (4.38) must be invariant under cyclic permutations of the spin chain. Thanks to factorized scattering, we only have to examine the two-magnon case. The result is that the total magnon momentum should vanish:

$$\sum_{j=1}^{M} p_j = 0. \tag{4.42}$$

Thus the only physical one-magnon states have vanishing momentum

$$|1\rangle = \sum_{k=0}^{J} \mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}^k \mathcal{X} \mathcal{Z}^{J-k}\right], \qquad \Delta = J + 1, \qquad p = 0 \tag{4.43}$$

and are protected (BPS) operators. Two-magnon states may also be constructed by plugging $p = p_1 = -p_2$ into the BAEs (4.36):

$$|2\rangle = Le^{-i\pi n/L-1} \cdot \sum_{k=0}^{J} \cos\left[\frac{\pi n}{L-1}(2k+1)\right] \cdot \mathrm{Tr}\left[\mathcal{X}\mathcal{Z}^k \mathcal{X} \mathcal{Z}^{J-k}\right], \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.44}$$

The scaling dimensions and the quantized momentum are

$$\Delta = L + \frac{\lambda}{\pi^2}\sin^2\left(\frac{\pi n}{L-1}\right) + O\left(\lambda^2\right), \quad p = \frac{2\pi n}{L-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.45}$$

4.3.2 Asymptotic Bethe Ansatz

Higher-loop contributions to the dilatation operator have been explicitly calculated in perturbation theory up to four-loops:

$$\mathbb{D}_2 = \frac{1}{64\pi^4}\sum_{j=1}^{L}\left(-\mathbf{S}_j\cdot\mathbf{S}_{j+2}+4\,\mathbf{S}_j\cdot\mathbf{S}_{j+1}-\frac{3}{4}\right) \tag{4.46}$$

$$\mathbb{D}_3 = \frac{1}{1024\pi^6}\sum_{j=1}^{L}\Big\{-\mathbf{S}_j\cdot\mathbf{S}_{j+3}+4\left(\mathbf{S}_j\cdot\mathbf{S}_{j+2}\right)\left(\mathbf{S}_{j+1}\cdot\mathbf{S}_{j+3}\right)-4\left(\mathbf{S}_j\cdot\mathbf{S}_{j+3}\right)\left(\mathbf{S}_{j+1}\cdot\mathbf{S}_{j+2}\right)+ \\ +10\,\mathbf{S}_j\cdot\mathbf{S}_{j+2}-29\,\mathbf{S}_j\cdot\mathbf{S}_{j+1}+5\Big\}. \tag{4.47}$$

Obviously these become more and more complicated as the loop-order is increased, involving non-neighboring as well as higher-order interactions (e.g. $\mathbf{S}^4$ in $\mathbb{D}_3$). Details about these calculations and many original references may be found in the reviews [65].

As we have said however, integrability is thought to be an all-loop property of planar $\mathcal{N}=4$ SYM. Based on this fundamental assumption and using the properties of the dilatation operator in the BMN limit (3.33), Beisert, Kristjansen and Staudacher [66] calculated it in two, three and four loops. With the same assumptions, the five-loop formula was also computed by Beisert, Dippel and Staudacher (BDS) in [67]. BDS's bold new proposal was that the form of the planar $\mathcal{N}=4$ SYM dilatation operator is completely determined by integrability and BMN scaling. Based on that they provided an all-loop, asymptotic Bethe ansatz (ABA):

$$\Delta = J+M+\frac{\lambda}{8\pi^2}\sum_{j=1}^{M}E\left(p_j\right)\ , \quad E\left(p_j\right)=\frac{8\pi^2}{\lambda}\left[\sqrt{1+\frac{\lambda}{\pi^2}\sin^2\frac{p_j}{2}}-1\right], \quad j=1,2,\ldots,M \tag{4.48}$$

$$e^{ip_jL}=\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M}S_{jk}\ , \quad S_{jk}=\frac{u_j-u_k+i}{u_j-u_k-i}\cdot\mathcal{S}^D_{jk}\ , \quad u\left(p_j\right)=\frac{1}{2}\cot\frac{p_j}{2}\sqrt{1+\lambda\sin^2\frac{p_j}{2}}. \tag{4.49}$$

Asymptotic means that there's a *critical* loop order equal to the length of the spin-chain L at which the ABA ceases to hold. At this loop order the range of the spin chain interactions first exceeds the length of the chain (virtual particles start circulating around the spin chain) and the so-called wrapping corrections have to be taken into account. In fact they correspond to higher genus corrections to the dilatation operator that we neglect in the planar approximation. In the dual string theory side, the wrapping effects are due to the finite circumference of the cylindrical worldsheet.[23]

$\mathcal{S}^D_{jk}$ in equation (4.49) is known as the dressing phase/factor:

$$\mathcal{S}^D_{jk}=\sigma^2\left(p_j,p_k\right). \tag{4.50}$$

The dressing phase is introduced in order to reconcile the weak and strong coupling limits in the ABA. At weak coupling it is equal to unity up to 3-loops:

$$\sigma^2_{jk(\text{weak})}=1+O\left(\lambda^3\right). \tag{4.51}$$

At strong coupling it is given by the so-called Arutyunov-Frolov-Staudacher (AFS) [68] phase:

$$\sigma^2_{jk(\text{strong})}=\sigma^2_{jk(\text{AFS})}. \tag{4.52}$$

[23]For more on this issue, see footnote 37.

For $M = 2$ magnons at strong coupling ($\lambda \to \infty$) we may calculate the AFS phase exactly, finding

$$\sigma^2_{(\mathrm{AFS})}\left(p_1, p_2\right) = \exp\left\{ i\,\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\left(\cos\frac{p_1}{2} - \cos\frac{p_2}{2}\right)\cdot\log\left[\frac{\sin^2\left(p_1 - p_2\right)/4}{\sin^2\left(p_1 + p_2\right)/4}\right]\right\}. \tag{4.53}$$

Part II

Spinning Strings in $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$

5 Introduction and Motivation

As we have explained in the introduction, the AdS/CFT correspondence (3.1) implies that the spectra of $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N_c)$ SYM theory and IIB string theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ should match, at least in the planar/free-string approximation. Indeed the two spectra have been found to agree in both the BPS and the BMN limits, providing substantial support to AdS/CFT. Beyond the BPS and BMN limits, planar integrability (thermodynamic BA, Y-system, quantum spectral curve) completely solves the spectral problem of AdS/CFT by producing the complete system of equations that fully determine it.

This is a very powerful verification of the planar AdS/CFT correspondence. The spectra of $\mathcal{N} = 4$ SYM and IIB string theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ are described by the same system of functional equations, meaning that they coincide. However, when it comes to actually computing the common spectrum, there are cases where the procedure turns out to be rather technically involved. Besides that, we would also like to have at our disposal tools for computing the spectra of non-integrable models and in cases where integrability is known to break down (e.g. QCD, non-planar $\mathcal{N} = 4$ SYM, p-branes).

Secondly we would like to address some of the traditional questions of AdS/CFT, like what's the AdS/CFT dictionary. From the state/operator correspondence we know that to each operator of the gauge theory there corresponds a dual IIB string state. As we have already mentioned, there are two main obstructions with the state/operator mapping, the elusive quantization of strings on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ and the technical difficulties with the computation of the SYM spectrum. Therefore no systematic procedure which assigns a gauge theory operator to every string state exists and the state/operator identification proceeds so far only heuristically.

This means that we could use our option and compute the spectra in order to conclude that a certain string state is dual to a gauge theory operator. The bonus is that we simultaneously test the AdS/CFT correspondence explicitly. As it will become apparent in what follows, the spectra must be expressed in an appropriate form to actually be of use. String energies and operator dimensions must be expressed in terms of the conserved charges and the corresponding quantum numbers. Only in this way can the energies of classical strings, valid at strong coupling λ, accommodate quantum corrections (i.e. α' or curvature corrections) and be compared to the corresponding weak-coupling results.

Finally, our approach brings closer the possibility of obtaining closed formulas for the string energies and the dual operator dimensions at strong coupling. While for the moment this appears very ambitious (even at the classical level), with sufficient ingenuity it could become more tractable. It is not at all obvious that we will always be able to transform chaotic expressions with uncorrelated random coefficients that follow a completely unpredictable and irregular pattern into an ordered and structured ensemble. Even in those happy circumstances where such an eventuality is allowed from the problem itself, it is not at all evident that it is also feasible with the computational and analytical tools that we have at our disposal.

In §3.10.2, we have described 4 steps to obtain the matching between the spectra of the two theories. As we have just argued, even before wanting to compare the AdS/CFT spectra, we have to develop techniques that permit us to explicitly compute them (in appropriate form!). The purpose of part II of this thesis is therefore twofold:

1. Compute the anomalous dimensions of $\mathcal{N} = 4$ SYM operators at strong coupling using strings.
2. If possible, find closed formulas in the dual string spectrum.

5.1 Classical Bosonic Strings in $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$

Since we are going to heavily employ them in what follows, let us set our conventions for the study of strings right away. Consider the motion of classical closed and uncharged bosonic strings in $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$:

$$\begin{aligned} Y_{05} &= Y_0 + iY_5 = \ell \cosh\rho\, e^{it} & \qquad & X_{12} = X_1 + iX_2 = R\cos\overline{\theta}_1\, e^{i\overline{\phi}_1} \\ Y_{12} &= Y_1 + iY_2 = \ell \sinh\rho \cos\theta\, e^{i\phi_1} & \& \qquad & X_{34} = X_3 + iX_4 = R\sin\overline{\theta}_1 \cos\overline{\theta}_2\, e^{i\overline{\phi}_2} \\ Y_{34} &= Y_3 + iY_4 = \ell \sinh\rho \sin\theta\, e^{i\phi_2} & \qquad & X_{56} = X_5 + iX_6 = R\sin\overline{\theta}_1 \sin\overline{\theta}_2\, e^{i\overline{\phi}_3}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

where Y^μ and X^i are the embedding coordinates of $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ and $\rho \geq 0$, $t \in [0,\, 2\pi)$, $\overline{\theta}_1 \in [0,\, \pi]$, and θ, ϕ_1, ϕ_2, $\overline{\theta}_2$, $\overline{\phi}_1$, $\overline{\phi}_2$, $\overline{\phi}_3 \in [0,\, 2\pi)$. The corresponding line element is given by:[24]

$$\begin{aligned} ds^2 = \ell^2 \Big[-\cosh^2\rho\, dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho \left(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\phi_1^2 + \sin^2\theta\, d\phi_2^2\right)\Big] + \\ + R^2 \left[d\overline{\theta}_1^2 + \cos^2\overline{\theta}_1\, d\overline{\phi}_1^2 + \sin^2\overline{\theta}_1 \left(d\overline{\theta}_2^2 + \cos^2\overline{\theta}_2\, d\overline{\phi}_2^2 + \sin^2\overline{\theta_2}\, d\overline{\phi}_3^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.2}$$

The Polyakov action in the conformal gauge ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) reads:[25]

$$\begin{aligned} S_P &= -\frac{T}{2}\int \sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ab}\Big[G^{AdS}_{mn}(y)\partial_a y^m \partial_b y^n + G^S_{mn}(x)\partial_a x^m \partial_b x^n\Big] d\tau\, d\sigma = \\ &= \frac{T}{2}\int \Big[G^{AdS}_{mn}(y)\left(\dot{y}^m\dot{y}^n - y'^{\,m} y'^{\,n}\right) + G^S_{mn}(x)\left(\dot{x}^m\dot{x}^n - x'^{\,m}x'^{\,n}\right)\Big] d\tau\, d\sigma, \end{aligned} \tag{5.3}$$

where $y^m \equiv (t,\, \rho,\, \theta,\, \phi_1,\, \phi_2)$ and $x^m \equiv \left(\overline{\theta}_1,\, \overline{\theta}_2,\, \overline{\phi}_1,\, \overline{\phi}_2,\, \overline{\phi}_3\right)$. The Virasoro constraints are:

$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2}\Big[G^{AdS}_{mn}(y)\left(\dot{y}^m\dot{y}^n + y'^{\,m}y'^{\,n}\right) + G^S_{mn}(x)\left(\dot{x}^m\dot{x}^n + x'^{\,m}x'^{\,n}\right)\Big] = 0 \tag{5.4}$$

$$T_{01} = T_{10} = G^{AdS}_{mn}(y)\,\dot{y}^m y'^{\,n} + G^S_{mn}(x)\,\dot{x}^m x'^{\,n} = 0. \tag{5.5}$$

The cyclic coordinates of the action t, ϕ_1, ϕ_2, $\overline{\phi}_1$, $\overline{\phi}_2$, $\overline{\phi}_3$, give rise to the following conserved charges:

$$\begin{aligned} E &= \left|\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right| = T\ell^2 \int_0^{2\pi} \dot{t}\cosh^2\rho\, d\sigma & \qquad J_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{\phi}}_1} = TR^2 \int_0^{2\pi} \dot{\overline{\phi}}_1 \cos^2\overline{\theta}_1\, d\sigma \\ S_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = T\ell^2 \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_1 \sinh^2\rho\, \cos^2\theta\, d\sigma & \qquad J_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{\phi}}_2} = TR^2 \int_0^{2\pi} \dot{\overline{\phi}}_2 \sin^2\overline{\theta}_1 \cos^2\overline{\theta}_2\, d\sigma \\ S_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = T\ell^2 \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_2 \sinh^2\rho\, \sin^2\theta\, d\sigma & \qquad J_3 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{\phi}}_3} = TR^2 \int_0^{2\pi} \dot{\overline{\phi}}_3 \sin^2\overline{\theta}_1 \sin^2\overline{\theta}_2\, d\sigma, \end{aligned} \tag{5.6}$$

on-shell charges consistent with the $\mathfrak{so}\,(4,2) \times \mathfrak{so}\,(6)$ global isometry of $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$.

[24] As we have seen, $R = \ell$ in $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. However, let us keep our discussion completely general for the time being.
[25] T denotes the string tension, $T \equiv T_1 = 1/2\pi\alpha'$.

Let us also set up the bosonic string formalism in the system of embedding coordinates.[26]

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dY^\mu dY^\nu + \delta_{ij} dX^i dX^j = -dY_0^2 + \sum_{i=1}^{p+1} dY_i^2 - dY_{p+2}^2 + \sum_{i=1}^{q+1} dX_i^2 \tag{5.7}$$

$$-\eta_{\mu\nu} Y^\mu Y^\nu = Y_0^2 - \sum_{i=1}^{p+1} Y_i^2 + Y_{p+2}^2 = \ell^2 \qquad \& \qquad \delta_{ij} X^i X^j = \sum_{i=1}^{q+1} dX_i^2 = R^2, \tag{5.8}$$

where $\eta_{\mu\nu} = (-, +, \ldots, +, -)$ and $\delta_{ij} = (+, +, \ldots, +, +)$. The string Polyakov action in the conformal gauge ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) is given by:

$$S_P = \frac{T}{2} \int \Big[\eta_{\mu\nu} \left(\dot{Y}^\mu \dot{Y}^\nu - \acute{Y}^\mu \acute{Y}^\nu \right) + \left(\dot{X}^i \dot{X}^i - \acute{X}^i \acute{X}^i \right) + \tag{5.9}$$

$$+ \Lambda \left(\eta_{\mu\nu} Y^\mu Y^\nu + \ell^2 \right) + \widetilde{\Lambda} \left(X^i X^i - R^2 \right) \Big] d\tau d\sigma. \tag{5.10}$$

The equations of motion and the constraints (Virasoro and Lagrange) in the embedding system of coordinates are:

<u>Equations of Motion</u>	<u>Virasoro Constraints</u>	<u>Lagrange Constraints</u>	
$\ddot{Y}^\mu - (Y^\mu)'' = \Lambda \, Y^\mu,$	$\eta_{\mu\nu} \left(\dot{Y}^\mu \dot{Y}^\nu + \acute{Y}^\mu \acute{Y}^\nu \right) + \dot{X}^i \dot{X}^i + \acute{X}^i \acute{X}^i = 0,$	$\eta_{\mu\nu} Y^\mu Y^\nu = -\ell^2$	(5.11)
$\ddot{X}^i - \left(X^i \right)'' = \widetilde{\Lambda} \, X^i,$	$\eta_{\mu\nu} \dot{Y}^\mu \acute{Y}^\nu + \dot{X}^i \acute{X}^i = 0,$	$X^i X^i = R^2.$	(5.12)

System (5.10) has the following $15 + 15$ conservation laws,

$$S^{\mu\nu} = T \int \left(Y^\mu \dot{Y}^\nu - Y^\nu \dot{Y}^\mu \right) d\sigma, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \tag{5.13}$$

$$J^{ij} = T \int \left(X^i \dot{X}^j - X^j \dot{X}^i \right) d\sigma, \qquad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \tag{5.14}$$

which are compatible with the global isometry $\mathfrak{so}\,(4,2) \times \mathfrak{so}\,(6)$ of $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ and the action (5.10).

A very convenient alternative way to express the action (5.10) along with its equations of motion and constraints (5.11)–(5.12) is via the worldsheet light-cone coordinates $\xi_\pm$ that are defined as follows:

$$\xi_\pm = \frac{1}{2} \left(\tau \pm \sigma \right) \qquad\qquad \partial_\pm = \partial_\tau \pm \partial_\sigma \tag{5.15}$$

[26] The following index conventions have been used so far and will also be applied in what follows. For a p-dimensional extended object (p-brane) in $D = d + 1$ dimensional spacetime, the brane coordinates, $\sigma_a = \{\tau, \sigma, \delta, \ldots\}$ are denoted by small Latin indices in the series $(a, b, c, \ldots)$. Series $(m, n, r, s, \ldots)$ denotes spacetime coordinates (taking values in the range $0, 1, 2, \ldots d$). The series of Greek letters $(\mu, \nu, \ldots)$ will generally be used in case of a metric with a Minkowski signature, while spatial parts and Euclidean metrics, e.g. the spatial part of spacetime (taking values $1, 2, \ldots d$), the spatial part of world-sheet/volume $(\sigma, \delta, \ldots)$, scalar fields ϕ, etc. will generally use the indices of the series $(i, j, k, \ldots)$. Small Greek letter coordinates in the series ($\alpha, \beta, \ldots$, dotted or not) usually denote Weyl spinor coordinates, while Fraktur letters $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots)$ label Lie group generators. As for units, $c = 1$ is used.

$$\tau = \xi_+ + \xi_- \qquad \longrightarrow \qquad \partial_\tau = \frac{1}{2}\left(\partial_+ + \partial_-\right) \tag{5.16}$$

$$\sigma = \xi_+ - \xi_- \qquad \qquad \partial_\sigma = \frac{1}{2}\left(\partial_+ - \partial_-\right). \tag{5.17}$$

The action is

$$S_P = \frac{T}{2}\int\Big[\eta_{\mu\nu}\partial_+Y^\mu\partial_-Y^\nu + \partial_+X^i\partial_-X^i + \Lambda\left(\eta_{\mu\nu}Y^\mu Y^\nu + \ell^2\right) + \widetilde{\Lambda}\left(X^iX^i - R^2\right)\Big]d\tau d\sigma, \tag{5.18}$$

while the equations of motion and Virasoro/Lagrange constraints (5.11)–(5.12) become:

Equations of Motion	Virasoro Constraints	Lagrange Constraints	
$\partial_+\partial_-Y^\mu = \Lambda\, Y^\mu,$	$\eta_{\mu\nu}\partial_+Y^\mu\partial_+Y^\nu + \partial_+X^i\partial_+X^i = 0,$	$\eta_{\mu\nu}Y^\mu Y^\nu = -\ell^2$	(5.19)
$\partial_+\partial_-X^i = \widetilde{\Lambda}\, X^i,$	$\eta_{\mu\nu}\partial_-Y^\mu\partial_-Y^\nu + \partial_-X^i\partial_-X^i = 0,$	$X^iX^i = R^2.$	(5.20)

The formalism we have developed is very useful in proving some important reductions of the classical string sigma model.

5.2 Pohlmeyer Reduction

According to the Pohlmeyer reduction [54], the classical string sigma model in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ can be reduced to the classical sine-Gordon (sG) equation[27] and the string sigma model in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^3$ is classically equivalent to the complex sine-Gordon (CsG) equation. Similar reductions [70, 71] have been carried out for the string sigma models in $\mathrm{AdS}_{2/3/4}$, which can be reduced to the Liouville, sinh-Gordon and B_2-Toda equations respectively. These reductions are summarized in the following table:

String σ-Model	Pohlmeyer Reduction	equation
$\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$	sine-Gordon (sG)	$\partial_+\partial_-\phi + \frac{\ell^2}{R^2}\sin\phi = 0$
$\mathbb{R}\times\mathrm{S}^3$	Complex sine-Gordon (CsG)	$\partial_+\partial_-\psi + \frac{\psi^*}{\ell^2R^2}\frac{\partial_+\psi\partial_-\psi}{\ell^2-\lvert\psi\rvert^2} + \frac{\psi}{R^2}\left(\ell^2-\lvert\psi\rvert^2\right) = 0$
AdS_2	Liouville	$\partial_+\partial_-a - e^a = 0$
AdS_3	sinh-Gordon	$\partial'_+\partial'_-\hat{a} - 2\sinh\hat{a} = 0$
AdS_4	B_2-Toda	$\partial'_+\partial'_-\hat{a} - e^{\hat{a}} - e^{-\hat{a}}\cos b = 0$ $\partial'_+\partial'_-b - e^{-\hat{a}}\sin b = 0$

The Pohlmeyer fields ϕ, ψ, a and $\hat{a}$ are defined by the formulas:[28]

$$\partial_+X^i\partial_-X^i \equiv \ell^2\cos\phi, \quad \psi \equiv \ell\sin\frac{\phi}{2}\,e^{i\chi/2}\cos\phi \tag{5.21}$$

[27] Mikhailov has shown that the two models are inequivalent at the quantum level [69].
[28] The definition of b can be found in references [70].

$$K_i \partial_\pm^2 X_i = \pm \ell^2 \partial_\pm \chi \tan \frac{\phi}{2} \sin \phi, \quad K_i \equiv e_{ijkl} X_j \partial_+ X_k \partial_- X_l \tag{5.22}$$

$$\eta_{\mu\nu} \partial_+ Y^\mu \partial_- Y^\nu \equiv e^a, \quad \hat{a} \equiv a - \frac{1}{2} \ln \left(-u \cdot v/\ell^2\right), \tag{5.23}$$

where $u = u\left(\xi_+\right)$, $v = v\left(\xi_-\right)$. The primed coordinates $\xi'_\pm$ are given by

$$\xi'_+ \equiv \xi_+ \sqrt{\frac{-u\left(\xi_+\right)}{\ell}} \quad \& \quad \xi'_- \equiv \xi_- \sqrt{\frac{v\left(\xi_-\right)}{\ell}}. \tag{5.24}$$

As shown by Bakas in 1993 [72], the complex sine-Gordon equation (CsG) can be written as a gauged Wess-Zumino-Witten (gWZW) model in the coset space $\mathfrak{su}\left(2\right)/\mathfrak{u}\left(1\right)$. As we have seen, the CsG equation is the Pohlmeyer reduction of classical strings in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^3$. One could then ask whether we could take advantage of the fact that the IIB superstring on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ has the supercoset parametrization (3.10), in order to write down a gWZW model for it on some relevant coset space. This would correspond to the Pohlmeyer reduction of the classical IIB superstring sigma model on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. The latter has been carried out along the lines we just described in [73, 74]. The gWZW model is defined upon the coset

$$\frac{G}{H} = \frac{\mathfrak{so}\left(4,1\right) \times \mathfrak{so}\left(5\right)}{\mathfrak{su}\left(2\right)^4} \tag{5.25}$$

that is deformed by an integrable potential and fermionic terms.

5.3 Neumann-Rosochatius Reduction in $\mathbb{R} \times \mathbf{S}^5$

There exists a large class of classical rotating strings in $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ that can be reduced to a certain one-dimensional integrable system that describes a particle that oscillates upon a sphere: the Neumann system [75, 76]. A subclass of the Neumann system consists of all rigidly rotating strings in $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ and is known as the Neumann-Rosochatius (NR) system. The NR system is of course again integrable and describes a particle on a sphere subject to the potential $r^2 + r^{-2}$.

We are now going to go through a generalization of the Neumann and the Neumann-Rosochatius ansätze (set up in [77]) that will allow us to obtain two non-rigid string configurations in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$, the (infinite-size) giant magnon and the single spike. Consider the following ansatz in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^5$:

$$\Big\{t = \kappa\tau,\ \rho = \theta = \phi_1 = \phi_2 = 0\Big\} \times \Big\{Z_i = z_i\left(\xi\right) e^{i\omega_i\tau}\Big\}, \quad \xi = \alpha\sigma + \beta\tau \ \&\ z_i\left(\xi + 2\pi\alpha\right) = z_i\left(\xi\right), \tag{5.26}$$

where $Z_i = \{X_{12}, X_{34}, X_{56}\}$, $i = 1, 2, 3$ are the 5-sphere embedding coordinates (5.1) and $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ansatz (5.26) is the generalized Neumann ansatz. The conformal string action (5.10) becomes:

$$S_P = \frac{T}{2} \int \Big[-\ell^2\kappa^2 + \left(\dot{Z}^i \dot{\bar{Z}}^i - \acute{Z}^i \acute{\bar{Z}}^i\right) + \widetilde{\Lambda}\left(Z^i \bar{Z}^i - R^2\right) \Big] d\tau d\sigma. \tag{5.27}$$

Ansatz (5.26) gives rise to the following equation of motion and Largrange constraint:

$$\left(\alpha^2 - \beta^2\right) z_i'' - 2i\beta\omega_i z_i' + \omega_i^2 z_i + \widetilde{\Lambda} z_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} |z_i|^2 = R^2, \tag{5.28}$$

where all the derivatives of z are w.r.t. the variable ξ. The Virasoro constraints are given by

$$\sum_{i=1}^{3} 2\beta \left|z_i'\right|^2 + i\,\omega_i \left(z_i \bar{z}_i' - \bar{z}_i z_i'\right) = 0 \tag{5.29}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left|z_i'\right|^2+\omega_i^2\left|z_i\right|^2+i\,\beta\,\omega_i\left(z_i\bar{z}_i'-\bar{z}_i z_i'\right)=\ell^2\kappa^2. \tag{5.30}$$

Using these constraints, the Neumann system Lagrangian and Hamiltonian density become:

$$\mathcal{L}=-\ell^2\kappa^2+\sum_{i=1}^{3}\left(\beta^2-\alpha^2\right)\left|z_i'\right|^2+i\,\beta\,\omega_i\left(z_i\bar{z}_i'-\bar{z}_i z_i'\right)+\omega_i^2\left|z_i\right|^2+\widetilde{\Lambda}\left(\left|z_i\right|^2-R^2\right) \tag{5.31}$$

$$\mathcal{H}=-\ell^2\kappa^2+\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left|z_i'\right|^2+\omega_i^2\left|z_i\right|^2\right]=0. \tag{5.32}$$

In the Neumann-Rosochatius ansatz, z_i has the following form:

$$z_i\left(\xi\right)=r_i\left(\xi\right)e^{i\mu_i(\xi)}. \tag{5.33}$$

With (5.33), the equations of motion (5.28) become:

$$\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(r_i''-r_i\mu_i'^{\,2}\right)+2\beta\omega_i r_i\mu_i'+\omega_i^2 r_i+\widetilde{\Lambda}r_i=0 \quad \& \quad \mu_i'=\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[\frac{C_i}{r_i^2}+\beta\omega_i\right], \tag{5.34}$$

where C_i are some real constants of integration. The (Lagrange and Virasoro) constraints of the system become:

$$\sum_{i=1}^{3}2\beta\left(r_i'^{\,2}+r_i^2\mu_i'^{\,2}\right)+2\omega_i r_i^2\mu_i'=0 \quad \& \quad \sum_{i=1}^{3}r_i^2=R^2 \tag{5.35}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(r_i'^{\,2}+r_i^2\mu_i'^{\,2}\right)+\omega_i^2 r_i^2+2\beta\omega_i r_i^2\mu_i'=\ell^2\kappa^2. \tag{5.36}$$

The NR Lagrangian and Hamiltonian are given by:

$$\mathcal{L}=\sum_{i=1}^{3}\left\{\left(\beta^2-\alpha^2\right)\left[r_i'^{\,2}+\left(\mu_i'+\frac{\beta\omega_i}{\beta^2-\alpha^2}\right)^2 r_i^2\right]-\frac{\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}\,\omega_i^2 r_i^2\right\}+\widetilde{\Lambda}\left[\sum_{i=1}^{3}r_i^2-R^2\right]-\ell^2\kappa^2 \tag{5.37}$$

$$\mathcal{H}=\sum_{i=1}^{3}\left\{\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(r_i'^{\,2}+r_i^2\mu_i'^{\,2}\right)+R^2\omega_i^2\right\}-\ell^2\kappa^2=0. \tag{5.38}$$

Equations (5.34)–(5.38) can be further simplified by using the value for μ_i' in (5.34):

$$\left(\alpha^2-\beta^2\right)r_i''-\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\frac{C_i^2}{r_i^3}+\left[\frac{\alpha^2\omega_i^2}{\alpha^2-\beta^2}+\widetilde{\Lambda}\right]r_i=0 \quad \& \quad \sum_{i=1}^{3}r_i^2=R^2. \tag{5.39}$$

The Virasoro constraints are:

$$\sum_{i=1}^{3}\left\{\left(\alpha^2-\beta^2\right)r_i'^{\,2}+\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[\frac{C_i^2}{r_i^2}+\alpha^2\omega_i^2 r_i^2+2\beta C_i\omega_i\right]\right\}=\ell^2\kappa^2 \quad \& \quad \ell^2\beta\kappa^2+\sum_{i=1}^{3}C_i\omega_i=0. \tag{5.40}$$

The Lagrangian and Hamiltonian density of the system with the equations of motion (5.39) are:

$$\mathcal{L}=\sum_{i=1}^{3}\left\{\left(\beta^2-\alpha^2\right)r_i'^{\,2}-\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\frac{C_i^2}{r_i^2}-\frac{\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}\,\omega_i^2 r_i^2\right\}+\widetilde{\Lambda}\left[\sum_{i=1}^{3}r_i^2-R^2\right]-\ell^2\kappa^2 \tag{5.41}$$

$$\mathcal{H}=\sum_{i=1}^{3}\left\{\left(\alpha^2-\beta^2\right)r_i'^{\,2}+\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[\frac{C_i^2}{r_i^2}+\alpha^2\omega_i^2 r_i^2+2\beta C_i\omega_i\right]\right\}-\ell^2\kappa^2=0. \tag{5.42}$$

6 The Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP) String

In 2002, Gubser, Klebanov and Polyakov (GKP) [11], proposed to study closed bosonic and uncharged strings that spin, rotate or pulsate in $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$, in order to obtain the (anomalous) scaling dimensions of their dual SYM operators at strong coupling, a regime inaccessible to perturbation theory from the gauge theory side. The paper of Gubser, Klebanov and Polyakov contains three prototype string ansätze for which the energy-spin relation[29] is calculated:

I. a closed string rigidly rotating in $\text{AdS}_3 \subset \text{AdS}_5 \times \text{S}^5$.

II. a closed string rigidly rotating around the pole of S^2 in $\mathbb{R} \times \text{S}^2 \subset \text{AdS}_5 \times \text{S}^5$.

III. a closed string pulsating inside $\text{AdS}_3 \subset \text{AdS}_5 \times \text{S}^5$.

Each of these string configurations is dual to a local gauge-invariant single-trace operator of $\mathcal{N} = 4$ SYM the (anomalous) scaling dimensions of which at strong coupling are equal to the energy of the closed string state.

In this section we are going to analyze the three basic string setups of GKP (I, II, III). As we have mentioned, all the GKP configurations are bosonic and uncharged so that the formalism that we set up in §5.1 is going to come very handy. As it will be explained in more detail below, long GKP strings belong to a category of configurations where integrability methods that have been developed so far are not very efficient. This means that traditional methods (namely quadratures) will have to be used in order to compute the spectra in this case. In §7 we are going to see how the predictive power of the standard spectral methods can be significantly enhanced by systemizing the computation of classical string energies. In §10 these methods are going to be applied to yet another classical string system, the giant magnon (GM).

The GKP case (I) of the AdS_3 rotating folded string is probably the most popular and has been exhaustively analyzed ever since it appeared. GKP's key observation was that the energy minus the spin of long folded strings that rotate inside AdS_3, scales like the logarithm of the spin:

$$E - S = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \ln \frac{S}{\sqrt{\lambda}}, \quad S, \lambda \to \infty. \tag{6.1}$$

This behavior is very familiar from the study of anomalous dimensions of twist-2 Wilson operators in perturbative QCD. Indeed, GKP proceeded to reproduce this logarithmic scaling behavior by calculating the anomalous dimensions of the following twist-2, high-spin operators of $\mathcal{N} = 4$ SYM:[30]

$$\mathcal{O}_S = \text{Tr}\left[\mathcal{Z}\,\mathcal{D}_+^S\,\mathcal{Z}\right] + \ldots, \quad S \to \infty \tag{6.2}$$

where, in analogy with formula (4.14) for $\mathfrak{su}(2)$ operators, dots in (6.2) stand for all possible distributions of the light-cone derivative $\mathcal{D}_+$ among the two fields $\mathcal{Z}$, while each term in the sum is multiplied by a suitable coefficient. Actually the calculation is almost identical to the one in QCD. However the perturbative result only scales as λ instead of $\sqrt{\lambda}$ in (6.1). GKP posited that this difference could be recompensed by the quantum corrections that the gauge theory result receives. We'll have more to say about the anomalous dimensions of twist-2 operators in QCD, $\mathcal{N} = 4$ SYM and the AdS_3 rotating GKP string in the §7.

The GKP case (II) of the $\mathbb{R} \times \text{S}^2$ rotating folded string has also been very extensively studied. In

[29] Aka dispersion relation. The term anomalous dimension will also be used interchangeably in this thesis, since the energy minus the spin of the string is equal to the anomalous dimensions of the dual gauge theory operator.

[30] Twist-J operators, $\text{Tr}\left[\mathcal{D}_+^{S_1}\,\mathcal{Z}\,\mathcal{D}_+^{S_2}\,\mathcal{Z}\ldots\mathcal{D}_+^{S_J}\,\mathcal{Z}\right]$, with $S_1 + S_2 + \ldots + S_J = S$ belong to the closed non-compact $\mathfrak{sl}(2)$ sector of $\mathcal{N} = 4$ SYM. The $\mathfrak{sl}(2)$ sector is dual to strings that rotate in $\text{AdS}_3 \times \text{S}^1$ and its dilatation operator is given by the Hamiltonian of the ferromagnetic $\text{XXX}_{-1/2}$ Heisenberg spin chain.

their original treatment [11], Gubser, Klebanov and Polyakov derived the following formula for the strong coupling value of the anomalous dimensions of the $\mathcal{N}=4$ SYM operator that is dual to the $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ closed and folded string (II):

$$E-J=\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}, \quad J=\infty,\ \lambda\to\infty. \tag{6.3}$$

Closed folded single-spin strings rotating in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ can be decomposed into more elementary string theory excitations, known as giant magnons (GMs). These are open single-spin strings rotating in $\mathrm{S}^2\subset\mathrm{S}^5$ that were identified in 2006 by Hofman and Maldacena [78] as the string theory duals of $\mathcal{N}=4$ SYM magnon excitations that we saw in §4.3. The energy-spin relation of one giant magnon of angular extent $\Delta\varphi$ is:

$$E-J=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right|, \quad J=\infty,\ \lambda\to\infty, \tag{6.4}$$

with $\Delta\varphi=p$ being equal to the dual magnon's momentum. Superimposing two giant magnons of maximum angular extent $\Delta\varphi=\pi$ and angular momenta $J/2$, gives the GKP formula (6.3). The GKP string (II) is therefore dual to the 2-magnon operators of $\mathcal{N}=4$ SYM (4.33)–(4.44):

$$\mathcal{O}_J=\mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}^J\mathcal{X}^2\right]+\ldots, \quad J\to\infty. \tag{6.5}$$

More on the giant magnon and its relationship with the GKP string (II) will be said in §8–§9, where GMs will be studied in detail.

The two rotating GKP string configurations (I–II) obey short-long strings dualities that connect the classical values of their conserved energies and spins in the regime of short strings to the values of these charges in the regime of long strings. These dualities are very interesting because it might be possible to upgrade them to the quantum level. Such a prospect will offer the possibility of using the energies of short strings, for which amazing results from integrability are available (Basso slope function, QSC, etc..), to compute the energies of long strings, for which the existing methods are not equally predictive as we have said.

The GKP case (III) consists of a string that pulsates inside AdS_3. The study of pulsating strings in anti-de Sitter spacetime was initiated long time ago by de Vega, Larsen and Sánchez [79] in the context of string cosmology. Gubser, Klebanov and Polyakov [11] approximated the energy of small pulsating strings in AdS_3 with the following formula:

$$E\sim\sqrt{\sqrt{\lambda}\cdot n}, \tag{6.6}$$

where n is the string excitation level. However at the time it was unclear how to extend this formula to large values of the energy E and level n, but also it was not known to which gauge theory operators the pulsating GKP string is dual. Both of these questions were answered by Minahan in [80]. The $\mathcal{N}=4$ SYM operators that are dual to pulsating GKP strings are

$$\mathcal{O}_n=\mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}\mathcal{D}_+^n\mathcal{D}_-^n\mathcal{Z}\right]+\ldots, \tag{6.7}$$

where again dots stand for all possible permutations of the light-cone derivatives $\mathcal{D}_\pm$, sandwiched between the two complex scalars, and each term in the sum is multiplied by a suitable coefficient. The exact form of the operators $\mathcal{O}_n$ will be given in §6.3.1 where we will also quantize the pulsating GKP string à la WKB and derive a semiclassical dispersion relation that is valid for all values of the string level n. The one-loop correction to the energy of the pulsating string has been computed in [81].

This section is organized as follows. In §6.1 the rotating GKP string in AdS_3 (case I) is going to be

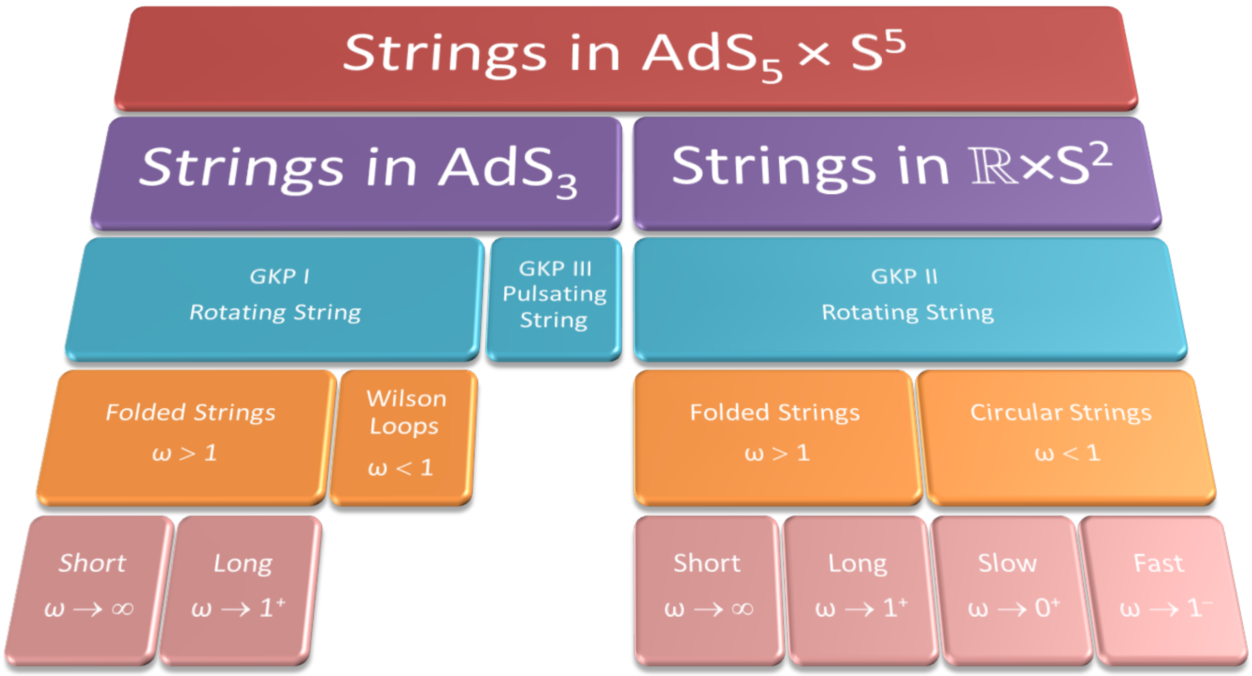


Figure 1: The GKP Strings.

presented. Depending on whether the string's angular velocity ω is greater or smaller than unity, the string either folds at the edges and rotates rigidly within AdS_3 ($\omega > 1$) or touches the AdS boundary ($\omega < 1$). In the former case ($\omega > 1$) there exist two interesting limiting cases, that of "short" strings with $\omega \to \infty$ and that of "long" strings for which $\omega \to 1^+$. Analytic expressions for the conserved string charges (namely the energy E and the spin S) of short and long folded GKP strings are given in §6.1.1 and §6.1.2. The short-long strings duality for the GKP string (I) will be derived in §6.1.3. GKP strings that touch the boundary of AdS (Wilson loops) will be omitted.

The $\mathbb{R} \times S^2$ rotating GKP string (case II) is presented in §6.2. Again there exist two main regimes depending on the value of the angular velocity ω, folded strings ($\omega > 1$), either short ($\omega \to \infty$) or long ($\omega \to 1^+$), and circular strings ($\omega < 1$) which extend along a great circle of the 2-sphere and are either "slow" ($\omega \to 0^+$) or "fast" ($\omega \to 1^-$). §6.2.1–§6.2.2 deal with the conserved charges (energy E and spin J) of the former and in §6.2.3–§6.2.4 the latter configuration is presented. Dualities between short-long and fast-slow strings are proved in §6.2.5.

This section ends with the presentation of the AdS pulsating GKP string (case III), in §6.3. The semiclassical quantization of this string is carried out in §6.3.1.

6.1 Gubser-Klebanov-Polyakov String in AdS_3

The ansatz for the GKP folded closed string (I) that rotates in $\mathrm{AdS}_3 \subset \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ is:

$$\Big\{t = \kappa\tau,\, \rho = \rho(\sigma),\, \theta = \kappa\omega\tau,\, \phi_1 = \phi_2 = 0\Big\} \times \Big\{\overline{\theta}_1 = \overline{\theta}_2 = \overline{\phi}_1 = \overline{\phi}_2 = \overline{\phi}_3 = 0\Big\}. \tag{6.8}$$

In embedding space the solution is given by

$$\begin{aligned}
&Y_0 = \ell \cosh\rho(\sigma)\cos\kappa\tau, && Y_2 = Y_4 = 0, && X_1 = R = \ell \\
&Y_1 = \ell \sinh\rho(\sigma)\cos\kappa\omega\tau && && X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = X_6 = 0 \\
&Y_3 = \ell \sinh\rho(\sigma)\sin\kappa\omega\tau && && \\
&Y_5 = \ell \cosh\rho(\sigma)\sin\kappa\tau. && &&
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Its Polyakov action in the conformal gauge ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) reads:

$$S_P = \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'}\int\left(-\dot{t}^2\cosh^2\rho - \rho'^{\,2} + \dot{\theta}^2\sinh^2\rho\right)d\tau d\sigma = \tag{6.10}$$

$$= \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'}\int\left(-\kappa^2\cosh^2\rho - \rho'^{\,2} + \kappa^2\omega^2\sinh^2\rho\right)d\tau d\sigma, \tag{6.11}$$

The equations of motion and the Virasoro constraints (5.4) become:

$$\rho'' + \kappa^2\left(\omega^2 - 1\right)\sinh\rho\cosh\rho = 0 \tag{6.12}$$

$$\rho'^{\,2} - \kappa^2\left(\cosh^2\rho - \omega^2\sinh^2\rho\right) = 0. \tag{6.13}$$

Both are essentially equivalent to the following equation:

$$\frac{d\sigma}{d\rho} = \frac{1}{\kappa\sqrt{\cosh^2\rho - \omega^2\sinh^2\rho}} = \frac{1}{\kappa\sqrt{1 - (\omega^2 - 1)\sinh^2\rho}} =$$

$$= \frac{1}{\kappa\sqrt{(\omega^2 - 1)\left(q - \sinh^2\rho\right)}}, \quad q \equiv \frac{1}{\omega^2 - 1}. \tag{6.14}$$

Depending on the value of the angular velocity ω, two basic cases are obtained:

(i). $\omega^2 > 1$: A folded closed rigidly rotating string with cusps at $d\sigma/d\rho\Big|_{\rho_0} = \infty$ and

$$0 \leq \sinh^2\rho \leq \sinh^2\rho_0 = \frac{1}{\omega^2 - 1} = q < \infty.$$

a. "Short" Strings: $\omega \to \infty$, $\rho_0 \sim 1/\omega$.

b. "Long" Strings: $\omega = 1 + 2\eta \to 1^+$, $\rho_0 \sim \ln 1/\eta \to \infty$.

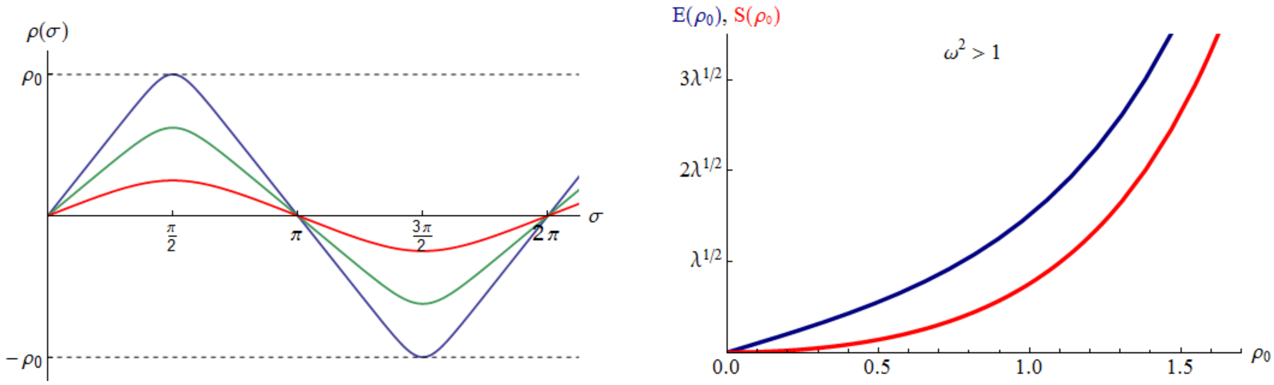


Figure 2: $\rho = \rho\,(\sigma)$ and energy/spin of the folded closed GKP string in AdS$_3$ (6.8) for $\omega > 1$.

(ii). $\omega^2 < 1$: Two oppositely oriented rigidly rotating Wilson loops[31] with

$$0 \le \sinh^2\rho \le \sinh^2\rho_0 = \infty.$$

The conserved charges that correspond to the two cyclic coordinates t and θ are given by the following integrals:

$$E = \left|\frac{\partial L}{\partial \dot t}\right| = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}\kappa\,\cosh^2\rho\,d\sigma = 4\cdot\frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{\rho_0}\frac{\cosh^2\rho\,d\rho}{\sqrt{1-(\omega^2-1)\sinh^2\rho}} \tag{6.15}$$

$$S = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}\kappa\,\omega\,\sinh^2\rho\,d\sigma = 4\cdot\frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{\rho_0}\frac{\omega\,\sinh^2\rho\,d\rho}{\sqrt{1-(\omega^2-1)\sinh^2\rho}}, \tag{6.16}$$

The string has four segments that extend between $\rho = 0$ and $\rho = \rho_0$ and this accounts for the factor of 4 in front of all the ρ-integrals. One also has to calculate the length of the string

$$\sigma\cdot\kappa = \int_0^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{1-(\omega^2-1)\sinh^2\rho}}, \tag{6.17}$$

where κ is a factor that fixes $\sigma\,(\rho_0) = \pi/2$. In order to calculate the integrals, we set $\omega\tanh\rho = \sin\varphi$. The results, briefly, are:

$$\sigma = \frac{1}{\kappa\,\omega}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\left(1-\frac{1}{\omega^2}\sin^2\varphi\right)^{1/2}} = \frac{1}{\kappa\,\omega}\cdot\mathbb{F}\left(\varphi\,\middle|\,\frac{1}{\omega^2}\right) \Rightarrow \rho(\sigma) = \operatorname{arctanh}\left[\frac{1}{\omega}sn\left(\kappa\omega\sigma\,\middle|\,\frac{1}{\omega^2}\right)\right], \tag{6.18}$$

where

$$\kappa = \frac{2}{\pi\omega}\,\mathbb{F}\left(\varphi_0\,\middle|\,\frac{1}{\omega^2}\right) \quad \& \quad \omega\cdot\tanh\rho_0 = \sin\varphi_0$$

[31] Wilson loops touch the boundary of anti-de Sitter space at $\rho = \infty$.

$$E = \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'\omega}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\left(1-\frac{1}{\omega^2}\sin^2\varphi\right)^{3/2}} = \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'\omega}\cdot\mathbf{\Pi}\left(\frac{1}{\omega^2},\varphi_0\,\middle|\,\frac{1}{\omega^2}\right) =$$

$$= \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'}\left(\frac{\omega}{\omega^2-1}\cdot\mathbb{E}\left(\varphi_0\,\middle|\,\frac{1}{\omega^2}\right) - \frac{1}{2\omega\left(\omega^2-1\right)}\frac{\sin 2\varphi_0}{\sqrt{1-\frac{1}{\omega^2}\sin^2\varphi_0}}\right) \tag{6.19}$$

$$S = \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'\omega^2}\int_0^{\varphi_0}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\left(1-\frac{1}{\omega^2}\sin^2\varphi\right)^{3/2}} = \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'}\left[\mathbf{\Pi}\left(\frac{1}{\omega^2},\varphi_0\middle|\frac{1}{\omega^2}\right) - \mathbb{E}\left(\varphi_0\,\middle|\,\frac{1}{\omega^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'}\left(\frac{\omega^2}{\omega^2-1}\cdot\mathbb{E}\left(\varphi_0\,\middle|\,\frac{1}{\omega^2}\right) - \mathbb{F}\left(\varphi_0\,\middle|\,\frac{1}{\omega^2}\right) - \frac{1}{2\left(\omega^2-1\right)}\frac{\sin 2\varphi_0}{\sqrt{1-\frac{1}{\omega^2}\sin^2\varphi_0}}\right). \tag{6.20}$$

The definitions of elliptic integrals of the first, second and third kind, $\mathbb{F}(\varphi\big|m)$, $\mathbb{E}(\varphi\big|m)$, $\mathbf{\Pi}(n,\varphi\big|m)$, as well as that of the Jacobian elliptic function $sn(u|m)$ are given in appendix H.

$\underline{\omega^2 > 1}$: Folded closed string (AdS_3).

For the case (i) of the closed folded string with $\omega^2 > 1$, it's $\varphi_0 = \pi/2$ so that the integrals (6.15)–(6.17) take simpler forms and can be expressed in terms of complete elliptic integrals:

$$\rho(\sigma) = \operatorname{arctanh}\left[\frac{1}{\omega}sn\left(\kappa\omega\sigma\,\middle|\,\frac{1}{\omega^2}\right)\right], \quad \kappa = \frac{2}{\pi\omega}\cdot\mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right), \quad \omega = \coth\rho_0 \tag{6.21}$$

$$E(\omega) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\,\frac{\omega}{\omega^2-1}\cdot\mathbb{E}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \Rightarrow \mathcal{E} \equiv \frac{\pi\, E}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\sqrt{1-x}}{x}\cdot\mathbb{E}\left(1-x\right) \tag{6.22}$$

$$S(\omega) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\left[\frac{\omega^2}{\omega^2-1}\cdot\mathbb{E}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) - \mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)\right] \Rightarrow \mathcal{S} \equiv \frac{\pi\, S}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{x}\,\mathbb{E}\left(1-x\right) - 2\mathbb{K}\left(1-x\right) \tag{6.23}$$

$$\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{S} = 2\left[\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}\cdot\mathbb{E}\left(1-x\right) + \mathbb{K}\left(1-x\right)\right], \tag{6.24}$$

where $x \equiv 1 - 1/\omega^2$ is the complementary parameter of $1/\omega^2$. In figures 2–3 we have plotted $\rho\left(\sigma\right)$ for various values of the angular velocity $\omega > 1$ and the string's energy and spin as functions of ρ_0, ω and x. Figure 4 contains the plot of the string's energy in terms of its spin, $E = E(S)$.

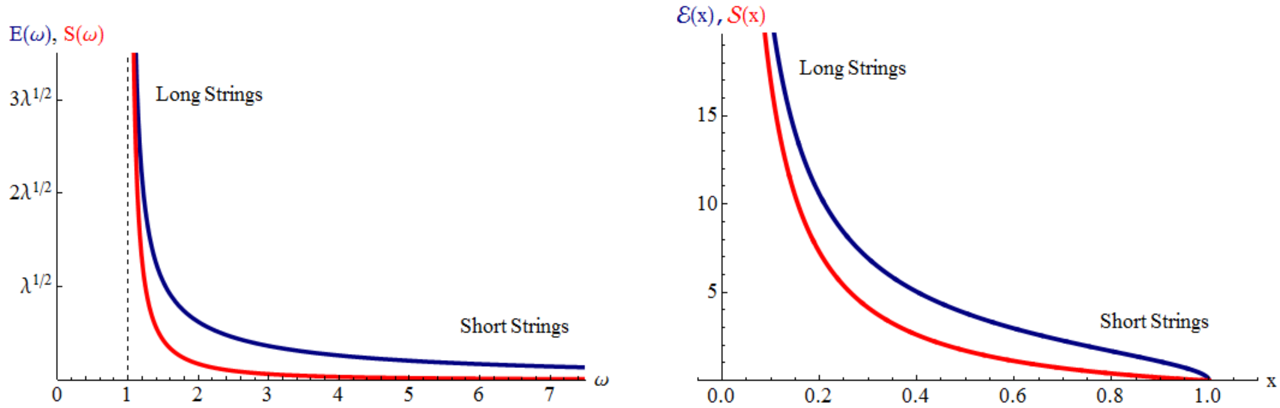


Figure 3: Energy/spin of the folded closed GKP string in AdS_3 (6.8) as functions of $\omega > 1$ and $x > 0$.

6.1.1 Short Strings in AdS_3: $\omega \to \infty$, $S \ll \sqrt{\lambda}$

In order to obtain the short-string limit, the expressions (6.22)–(6.23) may be expanded around $\omega \to \infty$ using the formulas of appendix H:

$$E = \sqrt{\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{2n+1}{\omega^{2n+1}} = \sqrt{\lambda} \cdot \left[\frac{1}{\omega} + \frac{3}{4\,\omega^3} + \frac{45}{64\,\omega^5} + \frac{175}{256\,\omega^7} + O\left(\frac{1}{\omega^9}\right)\right] \tag{6.25}$$

$$S = \sqrt{\lambda} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{2n}{\omega^{2n}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \cdot \left[\frac{1}{\omega^2} + \frac{9}{8\,\omega^4} + \frac{75}{64\,\omega^6} + \frac{1225}{1024\,\omega^8} + O\left(\frac{1}{\omega^{10}}\right)\right]. \tag{6.26}$$

To obtain series (6.25) we used the identity

$$(2n+1)\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k-1}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2 = 0. \tag{6.27}$$

With Mathematica we may also obtain the inverse spin function $x = x(\mathcal{S})$ and the energy $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{S})$ in terms of the spin $\mathcal{S}$:

$$x = 1 - \frac{2\,\mathcal{S}}{\pi} + \frac{9\,\mathcal{S}^2}{2\pi^2} - \frac{87\,\mathcal{S}^3}{8\pi^3} + \frac{1.765\,\mathcal{S}^4}{64\,\pi^4} - \frac{37.071\,\mathcal{S}^5}{512\,\pi^5} + \frac{199.815\,\mathcal{S}^6}{1024\,\pi^6} - \frac{4.397.017\,\mathcal{S}^7}{8192\,\pi^7} + \ldots \tag{6.28}$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{2} \cdot \left[\pi^{1/2}\mathcal{S}^{1/2} + \frac{3\,\mathcal{S}^{3/2}}{8\,\pi^{1/2}} - \frac{21\,\mathcal{S}^{5/2}}{128\,\pi^{3/2}} + \frac{187\,\mathcal{S}^{7/2}}{1024\,\pi^{5/2}} - \frac{9.261\,\mathcal{S}^{9/2}}{32.768\,\pi^{7/2}} + \frac{136.245\,\mathcal{S}^{11/2}}{262.144\,\pi^{9/2}} - \ldots\right]. \tag{6.29}$$

The dependence of (6.29) on the 't Hooft coupling λ can be made manifest as follows:

$$E = \left(2\sqrt{\lambda}\,S\right)^{1/2} \cdot \left[1 + \frac{3\,S}{8\sqrt{\lambda}} - \frac{21\,S^2}{128\,\lambda} + \frac{187\,S^3}{1\,024\,\lambda^{3/2}} - \frac{9\,261\,S^4}{32\,768\,\lambda^2} + \frac{136\,245\,S^5}{262\,144\,\lambda^{5/2}} - O\left(\frac{S^6}{\lambda^3}\right)\right]. \tag{6.30}$$

Quantum corrections to the short AdS_3 string have been calculated up to 1-loop in [82]:

$$E_{qc}=\left(2\sqrt{\lambda}\,S\right)^{1/2}\cdot\left[\left(\mathrm{a}_{00}+\frac{\mathrm{a}_{01}}{\sqrt{\lambda}}+\ldots\right)+\left(\mathrm{a}_{10}+\frac{\mathrm{a}_{11}}{\sqrt{\lambda}}+\ldots\right)\frac{S}{\sqrt{\lambda}}+\left(\mathrm{a}_{20}+\frac{\mathrm{a}_{21}}{\sqrt{\lambda}}+\ldots\right)\frac{S^2}{\lambda}+\ldots\right],$$

with the first few coefficients being,

$$\mathrm{a}_{00}=1\,,\qquad \mathrm{a}_{01}=3-4\ln 2\,,\qquad \mathrm{a}_{10}=\frac{3}{8}\,,\qquad \mathrm{a}_{11}=-\frac{1219}{576}+\frac{3}{2}\ln 2+\frac{3}{4}\zeta(3).$$

More recent results have been obtained by Basso [83] as well as with the $P\mu$ system, but we don't have time to report them here.

6.1.2 Long Strings in AdS_3: $\omega\to 1^+$, $S\gg\sqrt{\lambda}$

Going to the opposite regime $\omega\to 1^+$ ($S\gg\lambda$), let us summarize the results of [12]:

$$\begin{aligned}E=&\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi\omega}\cdot\left\{\frac{\omega^2}{\omega^2-1}+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(n+3/2)}{n!(n+1)!}\Big[2\psi(n+1)-2\psi(n+1/2)-\right.\\&\left.-\ln(1-1/\omega^2)-\frac{1}{(n+1)\,(2n+1)}\Big]\cdot(1-1/\omega^2)^n\right\}=\\=&\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi\omega}\cdot\left\{\frac{\omega^2}{\omega^2-1}-\frac{1}{4}\left[\ln\left(1-1/\omega^2\right)-4\ln 2+1\right]-\frac{3}{32}\left(1-1/\omega^2\right)\Big[\ln\left(1-1/\omega^2\right)-\right.\\&\left.-4\ln 2+\frac{13}{6}\Big]-\frac{15}{256}\left(1-1/\omega^2\right)^2\left[\ln\left(1-1/\omega^2\right)-4\ln 2+\frac{12}{5}\right]+\ldots\right\}\end{aligned}\qquad(6.31)$$

$$\begin{aligned}S=&\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\cdot\left\{\frac{\omega^2}{\omega^2-1}-\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\Gamma(n+1/2))^2}{n!(n+1)!}\Big[2\psi(n+1)-2\psi(n+1/2)-\ln(1-1/\omega^2)+\right.\\&\left.+\frac{1}{n+1}\Big]\cdot(1-1/\omega^2)^n\right\}=\\=&\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\cdot\left\{\frac{\omega^2}{\omega^2-1}+\frac{1}{4}\left[\ln\left(1-1/\omega^2\right)-4\ln 2-1\right]+\frac{1}{32}\left(1-1/\omega^2\right)\Big[\ln\left(1-1/\omega^2\right)-\right.\\&\left.-4\ln 2+\frac{3}{2}\Big]+\frac{3}{256}\left(1-1/\omega^2\right)^2\left[\ln\left(1-1/\omega^2\right)-4\ln 2+2\right]+\ldots\right\}.\end{aligned}\qquad(6.32)$$

The two series may also be expressed via the complementary parameter $x\equiv 1-1/\omega^2\to 0^+$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\equiv\frac{\pi\,E}{\sqrt{\lambda}}=&\,2\sqrt{1-x}\cdot\left\{\frac{1}{x}+\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(d_n\ln x+h_n\right)\right\}=\\&=\frac{2}{x}-2\sum_{n=0}^{\infty}x^n\cdot\left\{\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\left(d_{n-k}\ln x+h_{n-k}\right)\right\}\end{aligned}\qquad(6.33)$$

$$\mathcal{S}\equiv\frac{\pi\,S}{\sqrt{\lambda}}=\frac{2}{x}+2\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(c_n\ln x+b_n\right).\qquad(6.34)$$

The coefficients of the series (6.33) and (6.34) are given by:[32]

$$\begin{aligned}
d_n &= -\frac{1}{4}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \cdot \frac{2n+1}{n+1} \\
h_n &= -d_n \cdot \left[4\ln 2 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k-1}\right) + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+1}\right] \\
c_n &= \frac{1}{4}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{n+1} = -\frac{d_n}{2n+1} \\
b_n &= -c_n \cdot \left[4\ln 2 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k-1}\right) + \frac{1}{n+1}\right],
\end{aligned} \tag{6.35}$$

where $n = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots$. Explicitly, the first few of them are:

$$\begin{aligned}
d_0 &= -\frac{1}{4}\,, & d_1 &= -\frac{3}{32}\,, & d_2 &= -\frac{15}{256} \\
h_0 &= \ln 2 - \frac{1}{4}\,, & h_1 &= \frac{3}{8}\ln 2 - \frac{13}{64}\,, & h_2 &= \frac{15}{64}\ln 2 - \frac{9}{64} \\
c_0 &= \frac{1}{4}\,, & c_1 &= \frac{1}{32}\,, & c_2 &= \frac{3}{256} \\
b_0 &= -\ln 2 - \frac{1}{4}\,, & b_1 &= -\frac{1}{8}\ln 2 + \frac{3}{64}\,, & b_2 &= -\frac{3}{64}\ln 2 + \frac{3}{128}.
\end{aligned} \tag{6.36}$$

6.1.3 Short-Long Strings Duality

Following Georgiou and Savvidy [12], we will now derive a formula that links the conserved energy and spin of "short" strings ($\omega \to \infty$) with the energy and spin of "long" strings ($\omega \to 1^+$). Take Legendre's relation between complete elliptic integrals of the first and second kind (see e.g. [84, 85]):

$$\mathbb{E}(k)\mathbb{K}(k') + \mathbb{K}(k)\mathbb{E}(k') - \mathbb{K}(k)\mathbb{K}(k') = \frac{\pi}{2}, \tag{6.37}$$

where the arguments $k = 1/\omega^2$ and $k' = x = 1/\omega'^{\,2}$ satisfy $k + k' = 1$. Solve (6.22)–(6.23) for $\mathbb{E}(k)$ and $\mathbb{K}(k)$ and substitute their values in (6.37). We obtain the following relation between classical folded short and long strings that spin in AdS_3:

$$\frac{1}{\omega}ES' + \frac{1}{\omega'}E'S - SS' = \frac{2\lambda}{\pi}, \quad \lambda \to \infty. \tag{6.38}$$

There's an alternative expression of (6.38) in terms of the anomalous dimensions $\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{S}$:

$$\frac{1}{\omega}\gamma\,\mathcal{S}' + \frac{1}{\omega'}\gamma'\,\mathcal{S} + \left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega'} - 1\right)\mathcal{S}\mathcal{S}' = 2\pi, \quad \mathcal{E} \equiv \frac{\pi\,E}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathcal{S} \equiv \frac{\pi\,S}{\sqrt{\lambda}}. \tag{6.39}$$

It is not known whether short-long string dualities similar to (6.38)–(6.39) can also be formulated at the quantum level. A short-long strings duality will also be found in the GKP case (II) below. Even more short-long dualities will be constructed in appendix E.

[32] In double factorial notation, it's $0!! = 1$, $(-1)!! = 1$, $(-3)!! = -1$.

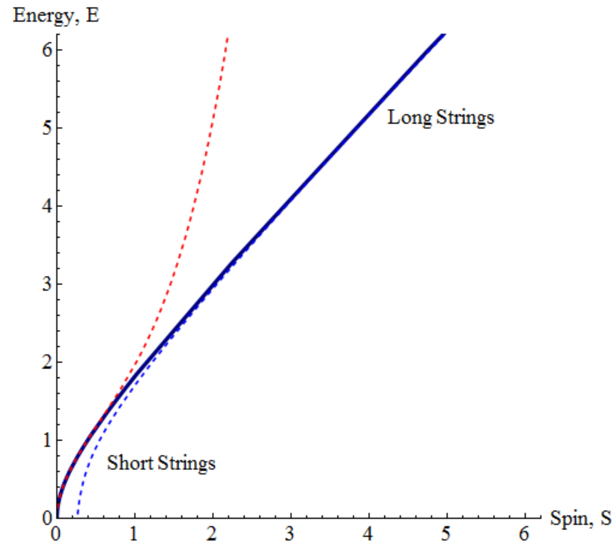


Figure 4: Energy versus spin of the folded closed AdS_3 string (6.8) for $\omega^2 > 1$. The red dashed line is the plot of the first 4 terms of the "short" approximation (6.30), while the blue dashed line corresponds to the string's leading "long" approximation (determined by the coefficients (7.104)–(7.105)).

6.2 Gubser-Klebanov-Polyakov String in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$

The GKP folded closed string (II) has its center at the pole of S^2 and rotates around it:

$$\Big\{t = \kappa\tau,\ \rho = \theta = \phi_1 = \phi_2 = 0\Big\} \times \Big\{\overline{\theta}_1 = \overline{\theta}_1(\sigma),\ \overline{\theta}_2 = \kappa\omega\tau,\ \overline{\phi}_1 = \overline{\phi}_2 = \overline{\phi}_3 = 0\Big\}. \tag{6.40}$$

In embedding coordinates the ansatz reads:

$$\begin{aligned}
&Y_0 = \ell\cos\kappa\tau\,, \quad Y_5 = \ell\sin\kappa\tau\,, && X_1 = \ell\cos\overline{\theta}_1(\sigma)\,, && X_2 = X_4 = X_6 = 0\\
&Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4 = 0 && X_3 = \ell\sin\overline{\theta}_1(\sigma)\cos\kappa\omega\tau &&\\
& && X_5 = \ell\sin\overline{\theta}_1(\sigma)\sin\kappa\omega\tau. &&
\end{aligned} \tag{6.41}$$

In the conformal gauge ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) the string has the following Polyakov action:

$$S_P = \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'}\int\left(-\dot{t}^2 + \dot{\overline{\theta}}_2^2\sin^2\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_1'^2\right)d\tau d\sigma = \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'}\int\left(-\kappa^2 + \kappa^2\omega^2\sin^2\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_1'^2\right)d\tau d\sigma. \tag{6.42}$$

This action gives rise to the following equations of motion and Virasoro constraints (5.4):

$$\overline{\theta}_1'' + \kappa^2\omega^2\sin\overline{\theta}_1\cos\overline{\theta}_1 = 0 \tag{6.43}$$

$$\overline{\theta}_1'^{\,2} - \kappa^2\left(1 - \omega^2\sin^2\overline{\theta}_1\right) = 0, \tag{6.44}$$

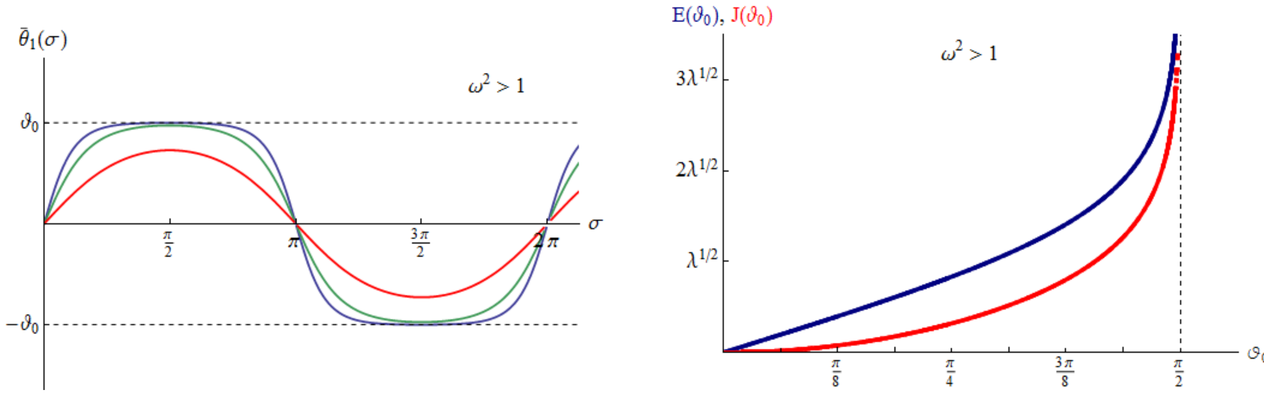


Figure 5: $\overline{\theta} = \theta_1(\sigma)$ and energy/spin of the closed folded GKP string in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ (6.40) for $\omega^2 > 1$.

both of which are equivalent to:

$$\frac{d\sigma}{d\overline{\theta}_1} = \frac{1}{\kappa\sqrt{1-\omega^2\sin^2\overline{\theta}_1}}. \tag{6.45}$$

Depending on the value of $\omega \neq 1$, the following cases are obtained:

(i). $\omega^2 > 1$: A folded closed string rigidly rotating around the pole of S^2,

$$\overline{\theta}_1 \in [0\,, \arcsin 1/\omega = \vartheta_0].$$

a. "Short" Strings: $\omega \to \infty$, $\vartheta_0 \sim 1/\omega$.

b. "Long" Strings: $\omega = 1 + 2\eta \to 1^+$, $\vartheta_0 \to \pi/2$.

(ii). $\omega^2 < 1$: A circular string stretched along an S^2 polar great circle, rotating rigidly around the poles,[33]

$$\overline{\theta}_1 \in [0\,, \pi/2 = \vartheta_0].$$

The integrals for the string length and conserved charges are given by:

$$\sigma\left(\overline{\theta}_1\right) = \int_0^{\overline{\theta}_1} \frac{d\overline{\theta}_1}{\kappa\sqrt{1-\omega^2\sin^2\overline{\theta}_1}} = \frac{1}{\kappa}\cdot\mathbb{F}\left(\overline{\theta}_1|\omega^2\right) \tag{6.46}$$

$$E = \left|\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right| = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}\kappa\, d\sigma = \frac{\kappa\,\ell^2}{\alpha'} = 4\cdot\frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{\vartheta_0}\frac{d\overline{\theta}_1}{\sqrt{1-\omega^2\sin^2\overline{\theta}_1}} = \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'}\cdot\mathbb{F}\left(\vartheta_0|\omega^2\right) \tag{6.47}$$

$$J = \frac{\partial L}{\partial\dot{\overline{\theta}}_2} = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}\kappa\,\omega\,\sin^2\overline{\theta}_1\, d\sigma = 4\cdot\frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{\vartheta_0}\frac{\omega\,\sin^2\overline{\theta}_1\, d\overline{\theta}_1}{\sqrt{1-\omega^2\sin^2\overline{\theta}_1}} = \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'\omega}\left(\mathbb{F}\left(\vartheta_0|\omega^2\right) - \mathbb{E}\left(\vartheta_0|\omega^2\right)\right). \tag{6.48}$$

[33] In this case the string has no cusp at ϑ_0 ($d\sigma/d\overline{\theta}_1|_{\vartheta_0} \neq \infty$). Its four pieces unfold to form a great circle.

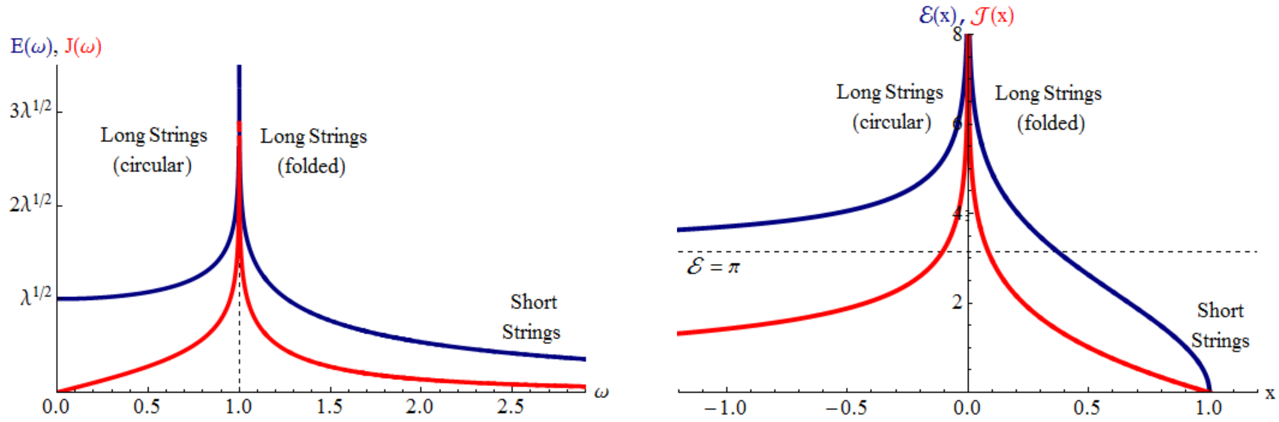


Figure 6: Energy/spin of the closed folded/circular string in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ (6.40) as function of ω and x.

These integrals all diverge for $\omega = 1$. Setting $\sigma(\vartheta_0) = \pi/2$ yields:

$$\bar{\theta}_1(\sigma) = am\left[\kappa\,\sigma\,\middle|\,\omega^2\right] \quad , \quad \kappa = \frac{2}{\pi}\cdot\mathbb{F}\left(\vartheta_0|\omega^2\right). \tag{6.49}$$

From (6.47)–(6.49) the following results are obtained:

<u>$\omega^2 < 1$</u>: Circular string ($\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$).

$$\bar{\theta}_1(\sigma) = am\left[\kappa\,\sigma\,\middle|\,\omega^2\right] \quad , \quad \kappa = \frac{2}{\pi}\cdot\mathbb{K}\left(\omega^2\right) \tag{6.50}$$

$$E(\omega) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\cdot\mathbb{K}\left(\omega^2\right) \Rightarrow \mathcal{E} \equiv \frac{\pi\,E}{\sqrt{\lambda}} = 2\,\mathbb{K}\left(1-\widetilde{x}\right) \tag{6.51}$$

$$J(\omega) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi\,\omega}\cdot\Big[\mathbb{K}\left(\omega^2\right) - \mathbb{E}\left(\omega^2\right)\Big] \Rightarrow \mathcal{J} \equiv \frac{\pi\,J}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{\sqrt{1-\widetilde{x}}}\cdot\Big[\mathbb{K}\left(1-\widetilde{x}\right) - \mathbb{E}\left(1-\widetilde{x}\right)\Big]. \tag{6.52}$$

$$\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{J} = \frac{2}{\sqrt{1-\widetilde{x}}}\left[\left(\sqrt{1-\widetilde{x}}-1\right)\mathbb{K}\left(1-\widetilde{x}\right) + \mathbb{E}\left(1-\widetilde{x}\right)\right], \tag{6.53}$$

<u>$\omega^2 > 1$</u>: Folded closed string ($\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$).

$$\bar{\theta}_1(\sigma) = am\left[\kappa\,\sigma\,\middle|\,\omega^2\right], \quad \kappa = \frac{2}{\pi\,\omega}\cdot\mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right), \quad \omega = \csc\vartheta_0 \tag{6.54}$$

$$E(\omega) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi\,\omega}\cdot\mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \Rightarrow \mathcal{E} \equiv \frac{\pi\,E}{\sqrt{\lambda}} = 2\sqrt{1-x}\cdot\mathbb{K}\left(1-x\right) \tag{6.55}$$

$$J(\omega) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\cdot\left[\mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) - \mathbb{E}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)\right] \Rightarrow \mathcal{J} \equiv \frac{\pi\,J}{\sqrt{\lambda}} = 2\left[\mathbb{K}\left(1-x\right) - \mathbb{E}\left(1-x\right)\right] \tag{6.56}$$

$$\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{J} = 2\left[\left(\sqrt{1-x}-1\right)\cdot\mathbb{K}\left(1-x\right) + \mathbb{E}\left(1-x\right)\right], \tag{6.57}$$

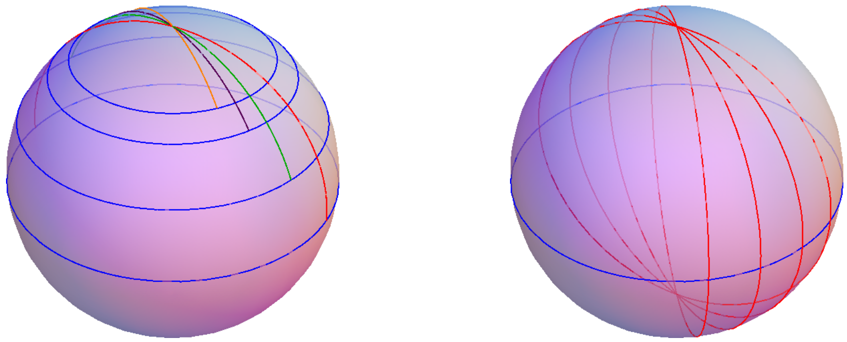


Figure 7: Plots of the $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ GKP string (II). On the left, various snapshots of the closed folded string on the sphere have been plotted, for four different values of the angular velocity $\omega > 1$ (each with a different color). This string rotates rigidly around its fixed polar point. On the right, we have plotted four snapshots of a circular string ($\omega < 1$), which rotates rigidly around the polar axis.

where $x \equiv 1 - 1/\omega^2$ and $\widetilde{x} \equiv 1 - \omega^2$ are the complementary parameters of $1/\omega^2$ and ω^2 respectively. In figures 5–6, $\overline{\theta}_1 = \overline{\theta}_1(\sigma)$ has been plotted for various values of $\omega > 1$, while the energy/spin of the $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ string have been plotted in terms of the variables ϑ_0, ω and x. In figure 7, both the folded (left) and the circular (right) GKP strings have been plotted on a 2-sphere.

For $\omega > 1$, there are two interesting regimes where we would like to obtain $E = E(J)$ and the anomalous dimensions $\gamma = \gamma(J)$, the short-string limit $\omega\to\infty$ and the long-string limit $\omega\to 1^+$.

6.2.1 Short Folded Strings in $\mathbb{R}\times\mathbf{S}^2$: $\omega\to\infty$, $J \ll \sqrt{\lambda}$

The expansions of the energy and spin of short $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ strings ($\omega\to\infty$) in terms of the angular frequency ω are given by (cf. appendix H):

$$E = \sqrt{\lambda}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{1}{\omega^{2n+1}} = \sqrt{\lambda}\cdot\left[\frac{1}{\omega} + \frac{1}{4\,\omega^3} + \frac{9}{64\,\omega^5} + \frac{25}{256\,\omega^7} + O\left(\frac{1}{\omega^9}\right)\right] \tag{6.58}$$

$$J = \sqrt{\lambda}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{2n}{2n-1}\frac{1}{\omega^{2n}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\cdot\left[\frac{1}{\omega^2} + \frac{3}{8\,\omega^4} + \frac{15}{64\,\omega^6} + O\left(\frac{1}{\omega^8}\right)\right]. \tag{6.59}$$

We may invert series (6.59) with e.g. Mathematica and then plug the obtained inverse spin function $x = x(\mathcal{J})$ into the expression for energy (6.58). This yields $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{J})$:

$$x = 1 - \frac{2\mathcal{J}}{\pi} + \frac{3\mathcal{J}^2}{2\pi^2} - \frac{3\mathcal{J}^3}{8\pi^3} - \frac{5\mathcal{J}^4}{64\pi^4} + \frac{9\mathcal{J}^5}{512\pi^5} + \frac{21\mathcal{J}^6}{1024\pi^6} + \frac{35\mathcal{J}^7}{8192\pi^7} - \frac{459\mathcal{J}^8}{131.072\pi^8} - \ldots \tag{6.60}$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{2}\cdot\left[\pi^{1/2}\mathcal{J}^{1/2} + \frac{\mathcal{J}^{3/2}}{8\,\pi^{1/2}} + \frac{3\,\mathcal{J}^{5/2}}{128\,\pi^{3/2}} + \frac{\mathcal{J}^{7/2}}{1024\,\pi^{5/2}} - \frac{61\,\mathcal{J}^{9/2}}{32.768\,\pi^{7/2}} - \frac{201\,\mathcal{J}^{11/2}}{262.144\,\pi^{9/2}} + \ldots\right]. \tag{6.61}$$

The short string coefficients of the energy of closed folded $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ strings (6.58) differ from ones of the AdS_3 strings (6.25) by a factor of $(2n+1)$, $n = 0, 1, \ldots$ Also, the coefficients of the angular momentum J in (6.59) differ from the ones of the spin S in (6.26) by $1/(2n-1)$. This is due to the fact that (6.22) and (6.23) may be obtained from (6.55), (6.56) by differentiation/integration. (6.61) may also be written as follows:

$$E=\left(2\sqrt{\lambda}\,J\right)^{1/2}\cdot\left[1+\frac{J}{8\sqrt{\lambda}}+\frac{3J^2}{128\,\lambda}+\frac{J^3}{1\,024\,\lambda^{3/2}}-\frac{61J^4}{32\,768\,\lambda^2}-\frac{201J^5}{262\,144\,\lambda^{5/2}}+O\left(\frac{J^6}{\lambda^3}\right)\right]. \tag{6.62}$$

6.2.2 Long Folded Strings in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$: $\omega\to 1^+$, $J\gg\sqrt{\lambda}$

The energy and the spin of long $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ strings ($\omega\to 1^+$) become (using the formulas of appendix H):

$$\begin{aligned}E=&\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2\omega}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\Gamma\left(n+1/2\right)}{n!}\right)^2\left[2\psi\left(n+1\right)-2\psi\left(n+1/2\right)-\ln\left(1-1/\omega^2\right)\right]\cdot\left(1-1/\omega^2\right)^n=\\&=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi\omega}\cdot\left\{\left[4\ln 2-\ln\left(1-1/\omega^2\right)\right]+\frac{1}{4}\left(1-1/\omega^2\right)\left[4\ln 2-2-\ln\left(1-1/\omega^2\right)\right]+\ldots\right\}\end{aligned} \tag{6.63}$$

$$\begin{aligned}J=&\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\cdot\left\{4\ln 2-2-\ln\left(1-1/\omega^2\right)-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+1/2\right)\Gamma\left(n+3/2\right)}{\left((n+1)!\right)^2}\Big[2\,\psi\left(n+1\right)-\right.\\&\left.-2\,\psi\left(n+1/2\right)-\ln\left(1-1/\omega^2\right)+\frac{2n}{\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}\Big]\cdot\left(1-1/\omega^2\right)^{n+1}\right\}=\\&=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\cdot\left\{\left[4\ln 2-2-\ln\left(1-1/\omega^2\right)\right]-\frac{1}{4}\left(1-1/\omega^2\right)\left[4\ln 2-\ln\left(1-1/\omega^2\right)\right]+\ldots\right\}.\end{aligned} \tag{6.64}$$

Using the complementary parameter $x\equiv 1-1/\omega^2\to 0^+$ we may write the above series as follows:

$$\mathcal{E}\equiv\frac{\pi\,E}{\sqrt{\lambda}}=2\sqrt{1-x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(d_n\ln x+h_n\right)=-2\sum_{n=0}^{\infty}x^n\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\left(d_{n-k}\ln x+h_{n-k}\right) \tag{6.65}$$

$$\mathcal{J}\equiv\frac{\pi\,J}{\sqrt{\lambda}}=2\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(c_n\ln x+b_n\right). \tag{6.66}$$

The coefficients of (6.65) and (6.66) are given by:

$$\begin{aligned}d_n&=-\frac{1}{2}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\\h_n&=-d_n\cdot\left[4\ln 2+2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{2k-1}\right)\right]\\c_n&=\frac{1}{2}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n-1}=-\frac{d_n}{2n-1}\\b_n&=-c_n\cdot\left[4\ln 2+2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{2k-1}\right)+\frac{2}{2n-1}\right],\end{aligned} \tag{6.67}$$

for $n = 0\,,1\,,2\,,\ldots$ The first few of them are:

$$\begin{aligned}
&d_0 = -\frac{1}{2}\,, && d_1 = -\frac{1}{8}\,, && d_2 = -\frac{9}{128} \\
&h_0 = 2\ln 2\,, && h_1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\,, && h_2 = \frac{9}{32}\ln 2 - \frac{21}{128} \\
&c_0 = -\frac{1}{2}\,, && c_1 = \frac{1}{8}\,, && c_2 = \frac{3}{128} \\
&b_0 = 2\ln 2 - 1\,, && b_1 = -\frac{1}{2}\ln 2\,, && b_2 = -\frac{3}{32}\ln 2 + \frac{5}{128}.
\end{aligned} \tag{6.68}$$

6.2.3 Slow Circular Strings in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$: $\omega \to 0^+$, $J \ll \lambda$

Despite the fact that the GKP strings on the sphere for which $\omega < 1$ (circular strings) are unstable,[34] they're very similar to the GKP strings with $\omega > 1$ (folded strings) that were studied in §6.2.1–§6.2.2. In this subsection and the next we will obtain the expressions for $E = E\,(J)$ for slow (small J) and fast (large J) circular strings in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$. In the case of slow circular strings ($\omega \to 0^+$) the expansions of the energy (6.51) and the spin (6.52) in terms of the angular frequency ω, are given by:

$$E = \sqrt{\lambda}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\omega^{2n} = \sqrt{\lambda}\cdot\left[1 + \frac{\omega^2}{4} + \frac{9\,\omega^4}{64} + \frac{25\,\omega^6}{256} + \frac{1225\,\omega^8}{16\,384} + O\left(\omega^{10}\right)\right] \tag{6.69}$$

$$J = \sqrt{\lambda}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{2n}{2n-1}\cdot\omega^{2n-1} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\cdot\left[\omega + \frac{3\,\omega^3}{8} + \frac{15\,\omega^5}{64} + \frac{175\,\omega^7}{1024} + O\left(\omega^9\right)\right]. \tag{6.70}$$

Inverting the series (6.70) and then plugging the inverse spin function $\widetilde{x} \equiv 1-\omega^2 = \widetilde{x}\,(\mathcal{J})$ into the expression for the energy (6.69), we are lead to $\mathcal{E} = \mathcal{E}\,(\mathcal{J})$:

$$\widetilde{x} = 1 - \frac{4\,\mathcal{J}^2}{\pi^2} + \frac{12\,\mathcal{J}^4}{\pi^4} - \frac{33\,\mathcal{J}^6}{\pi^6} + \frac{175\,\mathcal{J}^8}{2\pi^8} - \frac{1821\,\mathcal{J}^{10}}{8\pi^{10}} + \frac{4683\,\mathcal{J}^{12}}{8\pi^{12}} - \ldots \tag{6.71}$$

$$\mathcal{E} = \pi + \frac{\mathcal{J}^2}{\pi} - \frac{3\,\mathcal{J}^4}{4\pi^3} + \frac{\mathcal{J}^6}{\pi^5} - \frac{103\,\mathcal{J}^8}{64\pi^7} + \frac{183\,\mathcal{J}^{10}}{64\pi^9} - \frac{1383\,\mathcal{J}^{12}}{256\pi^{11}} + \frac{2725\,\mathcal{J}^{14}}{256\pi^{13}} - \ldots \tag{6.72}$$

The latter may also be written as follows:

$$E = \sqrt{\lambda}\cdot\left[1 + \frac{J^2}{\lambda} - \frac{3\,J^4}{4\,\lambda^2} + \frac{J^6}{\lambda^3} - \frac{103\,J^8}{64\,\lambda^4} + \frac{183\,J^{10}}{64\,\lambda^5} - \frac{1383\,J^{12}}{256\,\lambda^6} + \frac{2725\,J^{14}}{256\,\lambda^7} - O\left(\frac{J^{16}}{\lambda^8}\right)\right]. \tag{6.73}$$

[34] As GKP put it, $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ strings with $\omega < 1$ are unstable towards "slipping of the side" of S^2. In the section for giant magnons we will see that GKP strings on the sphere can be formed by two giant magnons (having maximum momentum) which are stable in their "elementary" region and unstable in their "doubled" region. Circular GKP strings are unstable because they are formed by two "doubled" GMs.

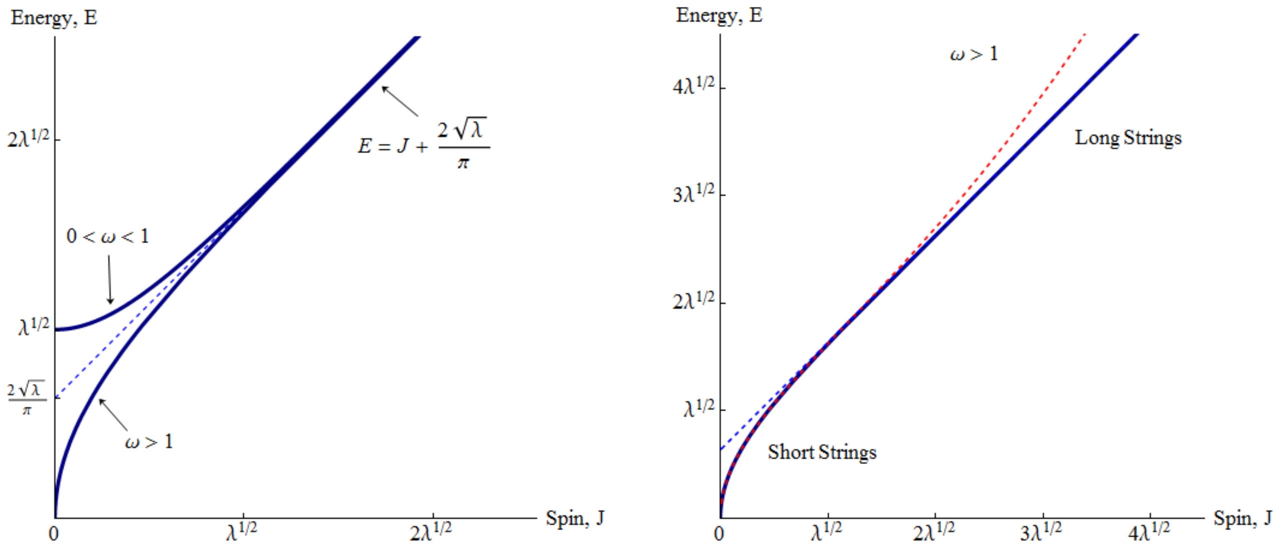


Figure 8: Energy versus the angular momentum of the closed folded/circular $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ string (6.40). In the right graph ($\omega > 1$), the red dashed line plots the first 4 terms of the "short" approximation (6.62) and the blue dashed line corresponds to the first two terms of the "long" approximation (G.3).

6.2.4 Fast Circular Strings in $\mathbb{R} \times \mathbf{S}^2$: $\omega \to 1^-$, $J \gg \lambda$

The case $\omega \to 1^-$ of fast circular strings on the sphere should be treated similarly to the $\omega \to 1^+$ case:

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{x}^n \left(d_n \ln \widetilde{x} + h_n \right) \tag{6.74}$$

$$\mathcal{J} \equiv \frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{\sqrt{1-\widetilde{x}}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{x}^n \left(c_n \ln \widetilde{x} + b_n \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{x}^n \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(c_{n-k} \ln \widetilde{x} + b_{n-k} \right), \tag{6.75}$$

where the complementary parameter is $\widetilde{x} \equiv 1 - \omega^2 \to 0^-$, b_n and the coefficients c_n, d_n, h_n are the same as those defined in (6.67)–(6.68).

6.2.5 Short-Long Strings Duality

As we have already mentioned, a short-long strings duality (more precisely a fast/slow folded strings duality) may also be formulated in the case of $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ strings. If we solve (6.55)–(6.56) for $\mathbb{E}(k)$ and $\mathbb{K}(k)$ and plug them into Legendre's relation (6.37), we're led to the following duality relation between classical folded short and long strings in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$:

$$\omega \, \omega' \, E E' - \omega \, E J' - \omega' \, E' J = \frac{2\lambda}{\pi}, \qquad \omega > 1, \quad \lambda \to \infty, \tag{6.76}$$

where the arguments of the elliptic functions are $k = 1/\omega^2$ and $k' = x = 1/\omega'^{\,2}$ respectively and satisfy $k + k' = 1$. Since large values of $\omega' \to \infty$ ("short/slow" strings) correspond to values of $\omega \to 1^+$ near unity ("long/fast" strings), (6.76) provides a map between the corresponding energies and spins. (6.76) is completely analogous to the short-long duality (6.38), found for closed folded strings spinning inside AdS_3 [12]. It is a classical duality between strings that rotate in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ but again, it would be interesting to investigate whether it can be generalized to the quantum level. We can also write (6.76) in terms of $\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{J}$. A completely analogous relation may be formulated for fast and slow circular strings, using (6.51)–(6.52). The result is:

$$E E' - \omega' \, E J' - \omega \, E' J = \frac{2\lambda}{\pi}, \qquad \omega < 1, \quad \lambda \to \infty, \tag{6.77}$$

where $\widetilde{k} = \omega^2$, $\widetilde{k}' = \widetilde{x} = \omega'^2$ and $\widetilde{k} + \widetilde{k}' = 1$. More about short-long string dualities can be found in appendix E.

6.3 Pulsating Gubser-Klebanov-Polyakov String

Let us complete our brief overview of the GKP bosonic string configurations by presenting setup (III). This consists of a closed folded string that pulsates inside the AdS_3 part of $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ and is given by the following ansatz:

$$\Big\{t = t\,(\tau)\,,\, \rho = \rho(\tau),\, \theta = 0,\, \phi_1 = w\sigma,\, \phi_2 = 0\Big\} \times \Big\{\overline{\theta}_1 = \overline{\theta}_2 = \overline{\phi}_1 = \overline{\phi}_2 = \overline{\phi}_3 = 0\Big\}. \tag{6.78}$$

In embedding space the above ansatz is expressed as follows:

$$\begin{aligned}
&Y_0 = \ell \cosh \rho(\tau) \cos t(\tau), \qquad Y_3 = Y_4 = 0, \qquad X_1 = R = \ell \\
&Y_1 = \ell \sinh \rho(\tau) \cos w\sigma \qquad\qquad\qquad\qquad\quad X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = X_6 = 0 \\
&Y_2 = \ell \sinh \rho(\tau) \sin w\sigma \\
&Y_5 = \ell \cosh \rho(\tau) \sin t(\tau).
\end{aligned} \tag{6.79}$$

The string Polyakov action (in the conformal gauge $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) takes the following form, if we also perform the integral with respect to the σ variable ($\sigma \in [0\,, 2\pi)$):[35]

$$S_P = \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'} \int \left(-\dot{t}^2 \cosh^2 \rho + \dot{\rho}^2 - \phi_1'^2 \sinh^2 \rho\right) d\tau d\sigma = \tag{6.80}$$

$$= \frac{\ell^2}{2\alpha'} \int \left(-\dot{t}^2 \cosh^2 \rho + \dot{\rho}^2 - w^2 \sinh^2 \rho\right) d\tau. \tag{6.81}$$

The equations of motion and the Virasoro constraints then become:

$$\ddot{t} \cosh^2 \rho + 2\,\dot{t}\,\dot{\rho}\, \cosh \rho \sinh \rho = 0 \tag{6.82}$$

$$\ddot{\rho} + \sinh \rho \cosh \rho \left(\dot{t}^2 + w^2\right) = 0 \tag{6.83}$$

$$\dot{\rho}^2 - \dot{t}^2 \cosh^2 \rho + w^2 \sinh^2 \rho = 0. \tag{6.84}$$

The following equations are obtained:

$$\frac{d\tau}{d\rho} = \frac{\cosh \rho}{w\sqrt{e^2 - \sinh^2 \rho \cosh^2 \rho}}\,, \qquad e = \frac{\dot{t}}{w} \cdot \cosh^2 \rho\,(\tau) \equiv \sinh \rho_0 \cosh \rho_0 = \text{const.}, \tag{6.85}$$

[35] Because the conformal gauge $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$, is incompatible with the static time gauge $t = \tau$ (the t-equation of motion (6.82) is not satisfied), we are obliged to use $t = t\,(\tau)$.

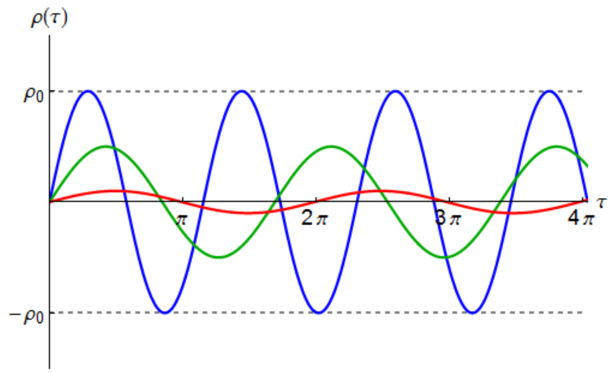


Figure 9: $\rho = \rho\,(\tau)$ of the pulsating GKP string in AdS_3, given by (6.78).

from which we infer that $\rho < \rho_0$. The conserved energy as well as the string's length are given by:

$$E = \left|\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right| = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi} \dot{t}\cosh^2\rho\, d\sigma = \frac{\ell^2}{\alpha'}\cdot\dot{t}\,\cosh^2\rho = \frac{w\,e\,\ell^2}{\alpha'} = w\sqrt{\lambda}\,e \tag{6.86}$$

$$\tau\,(\rho) = \int_0^{\rho}\frac{\cosh\rho\, d\rho}{w\sqrt{e^2 - \cosh^2\rho\sinh^2\rho}} = \int_0^{\sinh\rho}\frac{dx}{w\sqrt{e^2 - x^2 - x^4}}. \tag{6.87}$$

Performing the length integral we obtain $\tau\,(\rho)$ and, by inversion, $\rho\,(\tau)$:

$$\tau\,(\rho) = \frac{\mathbb{F}\left[\arcsin\left(\frac{\sinh\rho}{\sinh\rho_0}\right)\Big| - \tanh^2\rho_0\right]}{w\cosh\rho_0} \Leftrightarrow \tag{6.88}$$

$$\rho\,(\tau) = \left|\operatorname{arcsinh}\left[\sinh\rho_0\cdot sn\left(w\tau\cosh\rho_0\Big| - \tanh^2\rho_0\right)\right]\right|. \tag{6.89}$$

This is an oscillatory time-periodic solution that we have plotted for various ρ_0's in figure 9.

6.3.1 Semiclassical Quantization

Following [79, 80], we are now going to semiclassically quantize the pulsating GKP string in AdS_3. To facilitate the process, let us switch from global variables to $\tanh\rho = \sin\xi$, with $\xi \in [0, \pi/2]$. Polyakov's action (6.81) becomes:

$$S_P = \frac{\ell^2}{2\alpha'}\int\left(-\dot{t}^2\cosh^2\rho + \dot{\rho}^2 - w^2\sinh^2\rho\right)d\tau = \frac{\ell^2}{2\alpha'}\int\sec^2\xi\left(-\dot{t}^2 + \dot{\xi}^2 - w^2\sin^2\xi\right)d\tau. \tag{6.90}$$

The Hamiltonian density is equal to zero, according to the constraint (6.84):

$$\mathcal{H} = \pi_t\dot{t} + \pi_\xi\dot{\xi} - \mathcal{L} = \frac{\ell^2}{2\alpha'}\left(-\dot{t}^2\cosh^2\rho + \dot{\rho}^2 + w^2\sinh^2\rho\right) = \frac{\ell^2}{2\alpha'}\sec^2\xi\left(-\dot{t}^2 + \dot{\xi}^2 + w^2\sin^2\xi\right) = 0.$$

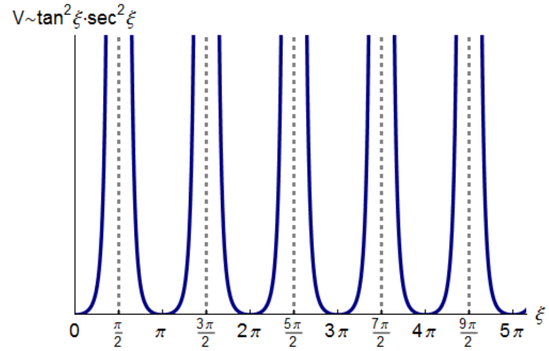


Figure 10: Plot of the effective potential $V = w^2\lambda\,\tan^2\xi\,\sec^2\xi$.

In terms of the canonical variables,

$$\pi_t = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = -\frac{\ell^2}{\alpha'}\,\dot{t}\,\sec^2\xi \qquad \& \qquad \pi_\xi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}} = \frac{\ell^2}{\alpha'}\,\dot{\xi}\,\sec^2\xi, \tag{6.91}$$

the Hamiltonian density can be written as:

$$\mathcal{H} = \frac{\alpha'}{2\ell^2}\cos^2\xi\,\left(-\pi_t^2 + \pi_\xi^2\right) + \frac{w^2\ell^2}{2\alpha'}\tan^2\xi = 0 \tag{6.92}$$

or equivalently,

$$H^2 = \pi_t^2 = \pi_\xi^2 + \left(\frac{w\,\ell^2}{\alpha'}\right)^2\tan^2\xi\,\sec^2\xi = \pi_\xi^2 + w^2\lambda\,\tan^2\xi\,\sec^2\xi. \tag{6.93}$$

(6.93) is the Hamiltonian of a Klein-Gordon particle inside the periodic potential (plotted in figure 10) $V = w^2\lambda\,\tan^2\xi\,\sec^2\xi$. This potential typically implies a band structure, however we are going to consider only its classical region here. Start by first-quantizing (6.93) ($\pi_\mu \to i\hbar\partial_\mu$) as follows:

$$-\hbar^2\,\partial_t^2\Psi(t,\xi) = -\hbar^2\,\partial_\xi^2\Psi(t,\xi) + w^2\lambda\,\tan^2\xi\,\sec^2\xi\cdot\Psi(t,\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\hbar^2\,\psi''(\xi) = \left(E^2 - w^2\lambda\,\tan^2\xi\,\sec^2\xi\right)\cdot\psi(\xi)\,, \quad \Psi(t,\xi) = e^{-i\,E\,t/\hbar}\cdot\psi(\xi)\,. \tag{6.94}$$

The allowed energies and wave functions may be found approximately by the WKB method (see e.g. [86]) for $\psi(0) = \pm 1$:

$$\int_0^{\xi_0}\sqrt{E_n^2 - w^2\lambda\,\tan^2\xi\,\sec^2\xi}\cdot d\xi = \hbar\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi + O\left(\hbar^2\right)\,, \quad n = 0\,,1\,,2\,,\ldots \tag{6.95}$$

$$\psi_n(\xi) = (-1)^n\left[1 - \frac{w^2\lambda}{E_n^2}\tan^2\xi\,\sec^2\xi\right]^{-\frac{1}{4}}\cdot\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_0^{\xi}\sqrt{E_n^2 - w^2\lambda\,\tan^2\xi'\,\sec^2\xi'}\cdot d\xi'\right), \tag{6.96}$$

in the physical optics approximation. The integral may be performed and the result is:

$$w\sqrt{\lambda}\cosh\rho_0\cdot\Big\{\sinh^2\rho_0\,\mathbf{\Pi}(-\sinh^2\rho_0;-\tanh^2\rho_0)+\mathbb{K}(-\tanh^2\rho_0)+\mathbb{E}(-\tanh^2\rho_0)\Big\}= \\ =\hbar\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi+O\left(\hbar^2\right), \tag{6.97}$$

where from the definition (6.85) of $e=\sinh\rho_0\cosh\rho_0$, the single classical turning point $\tanh\rho_0=\sin\xi_0$ satisfies

$$\sinh\rho_0=\left[\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+4e^2}\right)\right]^{1/2}\ \&\ \cosh\rho_0=\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4e^2}\right)\right]^{1/2},\ e\equiv\frac{E\alpha'}{w\ell^2}=\frac{E}{w\sqrt{\lambda}}. \tag{6.98}$$

If we expand around $E=\infty$, we retrieve the result of [80]:

$$\hbar\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi+O\left(\hbar^2\right)=\pi E-\frac{2\left(2\pi\right)^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}\cdot w^{1/2}\lambda^{1/4}E^{1/2}+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{12\left(2\pi\right)^{1/2}}\cdot w^{3/2}\lambda^{3/4}E^{-1/2}- \\ -\frac{3\pi^{3/2}}{20\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}\cdot w^{5/2}\lambda^{5/4}E^{-3/2}+O\left(w^{7/2}\lambda^{7/4}E^{-5/2}\right). \tag{6.99}$$

We may revert (6.99) for large values of n, obtaining the following double series of n and λ:[36]

$$E=2\,n+\frac{8\sqrt{w\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}\cdot\lambda^{1/4}n^{1/2}+\left[\frac{1}{2}+\frac{16w\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4}\cdot\lambda^{1/2}\right]+\left[\frac{\sqrt{w\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}\cdot\lambda^{1/4}+\left(\frac{16\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^6}-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{24\pi^{\frac{3}{2}}}\right)w^{3/4}\lambda^{3/4}\right]\cdot n^{-1/2} \\ +O\left(n^{-3/2}\right). \tag{6.100}$$

We can also expand around $E=0$:

$$\hbar\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi+O\left(\hbar^2\right)=\frac{E^2}{4\,w\,\lambda^{1/2}}-\frac{5\,E^4}{32\,w^3\,\lambda^{3/2}}+\frac{63\,E^6}{256\,w^5\,\lambda^{5/2}}-\frac{2145\,E^8}{4096\,w^7\,\lambda^{7/2}}+O\left(w^{-9}\,\lambda^{-9/2}\,E^{10}\right) \tag{6.101}$$

Upon inverting for small n we obtain ($\hbar\rightarrow 1$):

$$E=2\left(\sqrt{\lambda}\,w\right)^{1/2}\left(n+\frac{1}{4}\right)^{1/2}+\frac{5\left(n+\frac{1}{4}\right)^{3/2}}{2\left(\sqrt{\lambda}\,w\right)^{1/2}}-\frac{77\left(n+\frac{1}{4}\right)^{5/2}}{16\left(\sqrt{\lambda}\,w\right)^{3/2}}+\frac{1365\left(n+\frac{1}{4}\right)^{7/2}}{64\left(\sqrt{\lambda}\,w\right)^{5/2}}+ \\ +O\left(w^{-7/2}\,\lambda^{-7/4}\,n^{9/2}\right), \tag{6.102}$$

[36] We set $\hbar=1$.

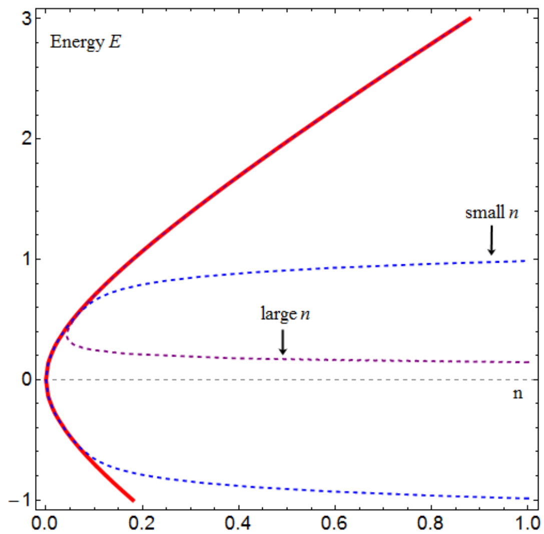


Figure 11: Implicit plot of the energy E versus the level n of the AdS_3 pulsating string, according to (6.97). The blue dashed line corresponds to the "small" n approximation (6.100) and the purple dashed line to the approximation (6.102) for "large" values of n.

which obviously agrees with the GKP formula (6.6). Leading behaviors $\sim \lambda^{1/4} n^{1/2}$ are characteristic of the small-spin limit in which the spacetime is approximately flat. Compare with the other small-spin limits (6.30)–(6.62) as well as with the string energies in flat spacetimes of appendix D.

According to [80], the operators that correspond to the above string states are of the following form:

$$\frac{n!}{\sqrt{(2n)!}} \sum_{\text{perms}} \mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}\mathcal{D}_{+}^{n_1^+}\mathcal{D}_{-}^{n_1^-}\ldots\mathcal{D}_{+}^{n_k^+}\mathcal{D}_{-}^{n_k^-}\mathcal{Z}\right]\cdot\exp\left(\mathrm{i}\varphi\left(n_1^{\pm},\ldots,n_k^{\pm}\right)\right) \tag{6.103}$$

and the phase is given by

$$\varphi\left(n_1^{\pm},\ldots,n_k^{\pm}\right) = -\frac{2\pi w}{n}\sum_{i\leq j}^{k} n_i^+ n_j^- \quad \& \quad \sum_{i=1}^{k} n_i^{\pm} = 2n. \tag{6.104}$$

7 Dispersion Relations of GKP Strings

Having presented the basics of GKP strings, we are now going to derive the classical energy-spin relation (aka dispersion relation or anomalous dimensions) of the two rigidly rotating configurations I (6.8) and II (6.40), for large values of the spin. As we have argued above, long rotating strings belong to an exceptional class of configurations where integrability methods are not as impressive as they are at weak coupling, or when strings and operators are short. Therefore, until it is known precisely how integrability works in the regime of long operators and strings, more traditional methods (namely quadratures) have to be used in order to be able to calculate the corresponding spectra. One such method was put forward in paper [3] following an earlier attempt by Georgiou and Savvidy [12].

The objective of this section is the calculation of the classical dispersion relation of GKP strings (I) and (II) by using the method of [3]. Since we will be working exclusively on the string theory side of the planar AdS/CFT correspondence, our results will be valid for large values of the 't Hooft coupling constant $\lambda \to \infty$ and for $N_c = \infty$. In this limit, all $1/N_c$ corrections are suppressed. In addition, we shall only be concerned with classical GKP strings, i.e. we are not going to consider any quantum corrections (α' corrections) that these strings generally receive. Formally this also means that $\lambda = \infty$.

As we have said, we are going to deal exclusively with long strings, i.e. strings that have large (yet not infinite) values of conserved charges, $\mathcal{E}, \mathcal{J}, \mathcal{S} \to \infty$. This is one of the few remaining cases where integrability cannot yet offer much help. The results for the string spectra that we shall obtain by using the method of [3] have not been obtained by any other (integrability) method, e.g. Lüscher corrections, the algebraic curve, the TBA, the Y-system or the quantum spectral curve (QSC). We also feel necessary to emphasize that these results are semi-analytical, so that it is impossible to obtain them by using a computer.

There are many reasons why we need to know the dispersion relation of long rigidly rotating GKP strings. First, although integrability tells us that the planar spectra of $\mathcal{N} = 4$ SYM theory and IIB string theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ must match because they are described by the same system of algebraic equations, we want to explicitly verify this matching in all possible regimes. Secondly, we want to be able to actually calculate the spectra in order to address some traditional questions of AdS/CFT, but also because we would like to improve the way integrability works in certain limits and possibly even go beyond integrability. Thirdly, we want to investigate the possibility of describing the string and gauge theory spectra by means of closed formulae that are ideally valid for all values of the 't Hooft coupling λ.

Long GKP strings that rotate in AdS_3 (case I) and $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ (case II) are respectively dual to the following (long) operators of $\mathcal{N} = 4$ SYM:

$$\mathcal{O}_S = Tr\left[\mathcal{D}_+^m \mathcal{Z} \mathcal{D}_+^{S-m} \mathcal{Z}\right] + \ldots \quad \& \quad \mathcal{O}_J = \mathrm{Tr}\left[\mathcal{X}\mathcal{Z}^m \mathcal{X}\mathcal{Z}^{J-m}\right] + \ldots, \quad S, J \to \infty, \tag{7.1}$$

where $N_c, \lambda = \infty$ and the dots stand for permutations of the fields within the trace, multiplied by an appropriate coefficient. Twist-2 ($\mathcal{O}_S$) and 2-magnon ($\mathcal{O}_J$) operators belong respectively to the $\mathfrak{sl}(2)$ and $\mathfrak{su}(2)$ sectors of $\mathcal{N} = 4$ SYM. At one loop the dilatation operator of these two sectors coincides with the Hamiltonian of the Heisenberg ferromagnetic $\mathrm{XXX}_{\pm 1/2}$ spin chain. Neither of the operators (7.1) is BPS so that the corresponding scaling dimensions contain an anomalous part.

We have already mentioned that "wrapping corrections" appear on the gauge theory side of AdS/CFT when the loop-order becomes greater than the length of the SYM operator. Increasing the number of loops theoretically takes us closer to strong coupling where the string description becomes valid. Tree-level on the string theory side (classical strings) corresponds to ∞ gauge theory loops and, as long as the SYM operator has not an infinite length (or "size"), its dispersion relation is expected to receive wrapping corrections.[37] Conversely, increasing the number of loops from the string theory side by adding $\alpha' \sim \sqrt{\lambda}$ (quantum) corrections to the classical result, moves us towards $\mathcal{N} = 4$ SYM.

Let us start from twist-2 operators and the GKP case (I) of the AdS_3 rotating string. From the QCD point of view, twist operators of high spin S play a very important role in deep inelastic scattering (DIS), where their anomalous scaling dimensions are responsible for the (logarithmic) violation of Bjorken scaling. The anomalous dimensions of twist-2 operators have been calculated in perturbative QCD[38] at one-loop [88], two-loops [89] and three loops [90]. The QCD results can be used to compute the corresponding anomalous dimensions in perturbative $\mathcal{N} = 1, 2, 4$ SYM theories. At weak 't Hooft coupling λ, the anomalous dimensions of twist-2, high-spin S operators $\mathrm{Tr}\big[\mathcal{Z}\,\mathcal{D}_+^S\,\mathcal{Z}\big]$ of $\mathcal{N} = 4$ SYM, have been calculated at one-loop [91], two-loops [92] and, using the property of transcedentality, to three-loops [93]. We end up with the following logarithmic behavior that is also known as Sudakov scaling:

$$\gamma\,(S\,, g) = \Delta - (S+2) = f(g)\ln S + \ldots\;, \qquad g = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} \to 0, \tag{7.2}$$

where $f(g)$ is the cusp anomalous dimension or the universal scaling function of $\mathcal{N} = 4$ SYM. It can be computed from the Beisert-Eden-Staudacher (BES) equation at weak [94, 48] and strong coupling [95, 96]. The strong-coupling result agrees with the explicit 2-loop calculation from the string theory side [45, 97, 98].

The general structure of the large-spin expansion of anomalous dimensions of twist-2 operators $\mathcal{O}_S$ of $\mathcal{N} = 4$ SYM theory is identical at weak and strong coupling [99]:

$$E - S = f\ln(S/\sqrt{\lambda}) + \sum_{n=1}^{\infty} f_{(nn)}\frac{\ln^n(S/\sqrt{\lambda})}{S^n} + \sum_{n=2}^{\infty} f_{(nn-1)}\frac{\ln^{n-1}(S/\sqrt{\lambda})}{S^n} + \ldots + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{S^n}, \tag{7.3}$$

albeit with a different set of coefficients $f_{(nk)}(\sqrt{\lambda})$ in each case:

$$f_{(nk)} = \sum_m^{\infty} \tilde{\mathrm{f}}_{nkm}\lambda^m\,, \quad \text{(weak coupling)} \quad \& \quad f_{(nk)} = \sum_m^{\infty}\frac{\mathrm{f}_{nkm}}{\left(\sqrt{\lambda}\right)^m}\,, \quad \text{(strong coupling)}. \tag{7.4}$$

Various other methods can be applied to the computation of the anomalous dimensions (7.2) of twist-2 operators (6.2) in perturbative $\mathcal{N} = 4$ SYM theory. By analytically solving the Baxter equation, three-loop [100] and four-loop [101] expressions have been obtained. By computing wrapping corrections after three-loops, the anomalous dimensions to four and five-loops have been computed in [102, 103].

At strong coupling λ, all $f_{(nk)}$ can theoretically be obtained from the thermodynamic Bethe ansatz (TBA) [104]. In [99, 105], the coefficients f_0, f_1, $f_{(11)}$, of (7.3) were calculated at one loop using string perturbation theory. It is rather straightforward to compute the first few classical coefficients of

[37] Wrapping corrections are known as "finite-size" corrections because they first appear at the critical loop order L, where L is the size of the system and they vanish for infinite system sizes, $L = \infty$. On the gauge theory side, the size of the system is equal to the length of the spin chain, typically determined by its bare scaling dimension Δ_0, spins S and J, or the number of magnons M. On the string theory side, the size of the system is determined by the circumference $2\pi r$ of the cylindrical worldsheet, $(\tau, \sigma) \in (-\infty, +\infty) \times [-r, +r]$. It can be shown (see e.g. equation (8.20)) that there exists a parametrization of the periodic spatial worldsheet coordinate $\sigma\,(-r) = \sigma\,(+r)$, such that the conserved string energy $\mathcal{E} \propto r$. Therefore, whenever the energy $\mathcal{E}$ is (in)finite, so is the worldsheet circumference $2\pi r$. Since it is almost always the case that the string's energy $\mathcal{E}$ is an increasing function of the conserved charges $\mathcal{S}$ and $\mathcal{J}$, these can also serve as a measure of the system's size, which will be infinite whenever either of them is infinite and finite whenever both of them are finite.

[38] For further references along with a concise historical perspective, see [87].

(7.3) at strong coupling with a symbolic computations program, e.g. Mathematica (see appendix G.1). However, computer methods are generally limited by the available computer power. No one has ever managed to calculate all the coefficients of (7.3) analytically. In [12] Georgiou and Savvidy succeeded in calculating all the classical leading ($f_{(nn)}$) and subleading ($f_{(nn-1)}$) terms at strong coupling, by introducing an iterative method that can potentially generate all of them. In [3] all the classical next-to-subleading coefficients ($f_{(nn-2)}$) were computed by using the Lambert W-function representation of (7.3). In §7.2, we are going to revisit this derivation, giving more details and intermediate results.

Let us now briefly summarize the classical results. First express (7.3) in the following form:

$$\mathcal{E}-\mathcal{S}=\rho_c\,\ln\mathcal{S}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\rho_{(nk)}\frac{\ln^k\mathcal{S}}{\mathcal{S}^n}=\rho_c\,\ln\mathcal{S}+\rho_0+\sum_{n=1}^{\infty}\rho_{(nn)}\frac{\ln^n\mathcal{S}}{\mathcal{S}^n}+\sum_{n=2}^{\infty}\rho_{(nn-1)}\frac{\ln^{n-1}\mathcal{S}}{\mathcal{S}^n}+$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\rho_{(nn-2)}\frac{\ln^{n-2}\mathcal{S}}{\mathcal{S}^n}+\ldots+\frac{\rho_1}{\mathcal{S}}+\frac{\rho_2}{\mathcal{S}^2}+\frac{\rho_3}{\mathcal{S}^3}+\ldots,\qquad \mathcal{S},\lambda\to\infty,\tag{7.5}$$

where $\mathcal{E}=\pi E/\sqrt{\lambda}$, $\mathcal{S}=\pi S/\sqrt{\lambda}$. We find the following coefficients:

$$\rho_c=1\quad,\quad\rho_0=3\ln2-1\quad,\quad\rho_1=\frac{1}{2}\left(3\ln2-1\right)\quad,\quad\rho_2=-\frac{9\ln^2 2}{8}+\frac{27\ln2}{16}-\frac{5}{16}.\tag{7.6}$$

We also find,

$$\rho_{(mm)}=\frac{(-1)^{m+1}}{2^m}\frac{1}{m},\tag{7.7}$$

$$\rho_{(m+1,m)}=\frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+1}}\Big[H_m+\frac{m}{4}+\;1-3\ln2\Big]\tag{7.8}$$

$$\rho_{(m+2,m)}=\frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+3}}\cdot(m+1)\cdot\Bigg\{H_{m+1}^2-H_{m+1}^{(2)}+\frac{1}{2}\left(m-12\ln2+5\right)\cdot H_{m+1}+\frac{m\left(m-1\right)}{24}-$$

$$-\frac{3}{2}\left(m+5\right)\ln2+9\ln^2 2\Bigg\}.\tag{7.9}$$

As we have said, the series $\rho_{(mm)}$ and $\rho_{(m+1,m)}$ were derived for the first time in [12]. The next-to-next-to-leading coefficients $\rho_{(m+2,m)}$ were derived in [3].

2-magnon operators are dual to the $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ rotating string, GKP case (II). GKP strings on the 2-sphere are directly related to giant magnons (GMs) which are open single-spin strings that rotate in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$. GMs are the string theory duals of magnon excitations that belong to the $\mathfrak{su}\left(2\right)$ sector of $\mathcal{N}=4$ SYM, encountered in §4.3. The GKP string on the sphere is formed by the superposition of two giant magnons of maximum angular extent $\Delta\varphi=\pi$ and angular momenta $J/2$ each. Therefore GKP strings in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ are dual to 2-magnon operators having maximum momentum $p=\pi$.

The anomalous dimensions of 2-magnon operators $\mathcal{O}_J$ are given by the asymptotic Bethe ansatz (4.48) up to $J+1$ loops:

$$\Delta-J=2\sqrt{1+\frac{\lambda}{\pi^2}}.\tag{7.10}$$

We may obtain its weak and strong coupling limits as follows:

$$\Delta - J = 2 + \frac{\lambda}{\pi^2} - \frac{\lambda^2}{4\pi^4} + \frac{\lambda^3}{8\pi^6} - \ldots\,, \qquad \lambda \to 0 \quad \text{(weak coupling)} \tag{7.11}$$

$$\Delta - J = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} + 0 + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\pi^3}{4\lambda^{3/2}} + \ldots\,, \qquad J, \lambda \to \infty \quad \text{(strong coupling).} \tag{7.12}$$

Each extra term on the r.h.s. of equations (7.11)–(7.12) corresponds to a quantum (α' or curvature) correction at an increasing loop-order. We see that the bare weak-coupling dimensions $\Delta_0 = J + 2$ get corrected by powers of λ, while the strong coupling result of GKP (6.3) gets corrected by powers of $1/\sqrt{\lambda}$.

Wrapping corrections on the other hand, first appear in equation (7.11) at $J+2$ loops. Unless the system's size is infinite ($J = \infty$, in which case there are no wrapping corrections) wrapping corrections are present in the strong coupling expansion (7.12) even at tree level (which corresponds to ∞ loop-order from the gauge theory viewpoint). The classical and quantum finite-size corrections that the GKP dispersion relation (6.3) receives at strong coupling and large but finite angular momentum J, have the form of exponentially suppressed terms. The classical part of these finite-size corrections has the following structure:

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1} \widetilde{\mathcal{A}}_{nm}\mathcal{J}^{n-m-1}\, e^{-n(\mathcal{J}+2)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \lambda, \mathcal{J} \to \infty, \tag{7.13}$$

where $\mathcal{E} \equiv \pi E/\sqrt{\lambda}$ and $\mathcal{J} \equiv \pi J/\sqrt{\lambda}$. It is assumed that the coefficients of all negative powers of $\mathcal{J}$ in (7.13) are zero (e.g. $\mathcal{A}_{11} = \mathcal{A}_{12} = \ldots = 0$). Many classical terms may be obtained by a direct Mathematica computation (cf. appendix G.1). As it will be shown in §7.1 below, the anomalous dimensions (7.13) can be written in terms of Lambert's W-function $W\left(\pm 4\mathcal{J}e^{-\mathcal{J}-2}\right)$ and take the form

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = 2 - \frac{1}{\mathcal{J}}\left(2W + W^2\right) - \frac{1}{2\mathcal{J}^2}\left(W^2 + W^3\right) - \frac{1}{16\mathcal{J}^3}\frac{W^3\left(11\,W^2 + 26\,W + 16\right)}{1 + W} + \ldots \tag{7.14}$$

where Lambert's W-function is defined by the implicit relation (for more, see appendix I):

$$W(z)\, e^{W(z)} = z \Leftrightarrow W\left(z\, e^z\right) = z. \tag{7.15}$$

The plus sign in the argument of Lambert's W-function in equation (7.14) corresponds to the closed and folded case ($\omega > 1$), while the minus sign corresponds to the case of circular strings ($\omega < 1$). Expanding Lambert's W-function, the second, third and fourth term in (7.14) provide the leading ($\widetilde{\mathcal{A}}_{n0}$), subleading ($\widetilde{\mathcal{A}}_{n1}$) and next-to-subleading ($\widetilde{\mathcal{A}}_{n2}$) terms of (7.13):

- leading terms: $-\dfrac{1}{\mathcal{J}}\left(2W + W^2\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{A}}_{n0}\mathcal{J}^{n-1}e^{-n(\mathcal{J}+2)}$
- subleading terms: $-\dfrac{1}{2\mathcal{J}^2}\left(W^2 + W^3\right) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \widetilde{\mathcal{A}}_{n1}\mathcal{J}^{n-2}e^{-n(\mathcal{J}+2)}$
- next-to-subleading terms: $-\dfrac{1}{16\mathcal{J}^3}\dfrac{W^3\left(11\,W^2 + 26\,W + 16\right)}{1 + W} = \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \widetilde{\mathcal{A}}_{n2}\mathcal{J}^{n-3}e^{-n(\mathcal{J}+2)}$.

Precise expressions for these series may be written down, see equations (7.45), (7.58) and (7.63). We may also argue that all the terms of (7.13) (N^k-subleading terms) can be written in terms of Lambert's W-function.

Before proceeding to analytically derive the energy-spin relations (7.5) and (7.14), let us briefly sketch how to obtain them. In the case of equation (7.14) for long folded strings in $\mathbb{R}\times \mathrm{S}^2$ ($\omega > 1$), our starting point is the 2×2 system of equations (6.65)–(6.66):

$$\mathcal{E} = d\,(x)\ln x + h\,(x) \tag{7.16}$$
$$\mathcal{J} = c\,(x)\ln x + b\,(x)\,, \tag{7.17}$$

where $x \equiv 1 - 1/\omega^2$ is the complementary parameter of the angular velocity ω and $d\,(x)$, $h\,(x)$, $c\,(x)$, $b\,(x)$ are the power series that appear in (6.65)–(6.66), with coefficients d_n, h_n, c_n and b_n respectively, given in (6.67). All we do is to use the Lagrange-Bürmann inversion formula to invert equation (7.17) for the inverse spin function $x = x\,(\mathcal{J})$ and then plug it back into (7.16) to obtain the anomalous dimensions $\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{J} = \gamma\,(\mathcal{J})$ in terms of Lambert's W-function. This leads to equation (7.14) for the leading, subleading and next-to-subleading coefficients of the dispersion relation of long folded strings in $\mathbb{R}\times \mathrm{S}^2$. The procedure is rather involved technically and that is why its implementation spans the following five sections §7.1.1–§7.1.5.

Once the formalism is set however, it is rather straightforward to reapply it. In §7.1.6 the above algorithm is repeated for fast circular strings in $\mathbb{R}\times \mathrm{S}^2$ ($\omega < 1$) by using the series (6.74)–(6.75) to write down the system (7.16)–(7.17). In §7.2, long folded strings in AdS_3 ($\omega > 1$) are taken up by using the equations (6.33)–(6.34) and the coefficients (6.35) in order to solve the system (7.16)–(7.17). The W-function representation of the dispersion relation of long GKP strings in AdS_3 can then be used to extract the coefficients (7.6)–(7.9) of equation (7.5).

The expressions (7.5)–(7.14), not only give the classical string energies to a remarkable depth, they also provide closed and neatly re-organized formulas for the string spectra. This reorganization sheds light on the structure of the large-spin expansions of the anomalous dimensions of GKP strings and their dual operators, but it could also affect the way that we view the corresponding weak-coupling, small-spin and quantum expansions. Integrability methods might also benefit from better-recognizable structures in the string spectra.

7.1 Gubser-Klebanov-Polyakov String in $\mathbb{R}\times \mathrm{S}^2$

7.1.1 Inverse Spin Function

Let us now see how to invert the J-series of equation (6.66) in terms of $x = x\,(\mathcal{J})$. Begin by solving (6.66) for $\ln x$:

$$\mathcal{J} = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big(c_n \ln x + b_n\Big) \Rightarrow \ln x = \frac{\mathcal{J}/2 - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x = \left[\frac{\mathcal{J}/2 - b_0}{c_0} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{c_0}\,x^n\right]\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{c_0}\,x^k\right)^n. \tag{7.18}$$

Subsequently, we perform the products between the series and exponentiate the resulting equation:

$$x = x_0\cdot\exp\Bigg\{-\left[c_1\,\frac{\mathcal{J}}{2} + b_1\,c_0 - b_0 c_1\right]\frac{x}{c_0^2} +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(\frac{\mathcal{J}}{2}-b_0\right)\frac{\mathbf{P}_n^{(-1)}}{n!}-b_0-\sum_{k=0}^{n-2}b_{n-k-1}\frac{\mathbf{P}_{k+1}^{(-1)}}{(k+1)!}\right]\frac{x^n}{c_0}\Bigg\},\tag{7.19}$$

where

$$x_0\equiv\exp\left[\frac{\mathcal{J}/2-b_0}{c_0}\right]=16\,e^{-\mathcal{J}-2}\tag{7.20}$$

solves (7.18) to lowest order in x and $\mathbf{P}_n^{(r)}$ are known as potential polynomials (defined in appendix J.2). Suppose that we want to solve the following equation:

$$x=x_0\cdot\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{a}_n\,x^n\right]=x_0\cdot\exp\left(\mathrm{a}_1\,x+\mathrm{a}_2\,x^2+\mathrm{a}_3\,x^3+\ldots\right)\tag{7.21}$$

in terms of x (having computed the a_n's from (7.19)). A possible way to do this is to try to revert series (7.19) with respect to x by using the Lagrange inversion theorem [85, 106]. As it turns out, the function to be inverted has a very convenient form that significantly simplifies the computation of its inverse. This fact was discovered by J.-L. Lagrange and H. H. Bürmann [107] and the following formula (applied here to the exponential function) is known as the Lagrange-Bürmann inversion formula:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_0^n}{n!}\cdot\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\exp\left[\sum_{m=1}^{\infty}n\,\mathrm{a}_m\,z^m\right]\right\}_{z=0}.\tag{7.22}$$

In order to evaluate the n-th derivative of the exponential of a power series, we use the exponential formula:

$$\exp\left[\sum_{m=1}^{\infty}n\,\mathrm{a}_m\,z^m\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{B}_k\left(n\cdot\mathrm{a}_1,2\,n\cdot\mathrm{a}_2,\ldots,k!\,n\cdot\mathrm{a}_k\right)\,z^k,\tag{7.23}$$

where $\mathbf{B}_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ are the (exponential) complete Bell polynomials, defined in appendix J.1. We find,

$$\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\exp\left[\sum_{m=1}^{\infty}n\,\mathrm{a}_m\,z^m\right]\right\}_{z=0}=\mathbf{B}_{n-1}\left(n\cdot\mathrm{a}_1,2\,n\cdot\mathrm{a}_2,\ldots,(n-1)!\,n\cdot\mathrm{a}_{n-1}\right)=$$

$$=n!\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^{k-1}}{k!}\widehat{\mathbf{B}}_{n-1,k}\left(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\ldots,\mathrm{a}_{n-1}\right)=\sum_{k,j_i=0}^{n-1}n^k\begin{pmatrix}n-1\\ j_1\,,\;j_2\,,\;\ldots\,,\;j_{n-1}\end{pmatrix}\mathrm{a}_1^{j_1}\mathrm{a}_2^{j_2}\ldots\mathrm{a}_{n-1}^{j_{n-1}},\tag{7.24}$$

where $\widehat{\mathbf{B}}_{n,k}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ are the (ordinary) partial Bell polynomials (see appendix J.1) and

$$j_1+j_2+\ldots+j_{n-1}=k\quad\&\quad j_1+2\,j_2+\ldots+(n-1)\,j_{n-1}=n-1.\tag{7.25}$$

The parameter x then becomes:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^{k-1}}{k!} \, \widehat{\mathbf{B}}_{n-1,k}(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_{n-1}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n \cdot \sum_{k, j_i=0}^{n-1} \frac{n^k}{n!} \binom{n-1}{j_1\,,\; j_2\,,\; \ldots\,,\; j_{n-1}} \mathrm{a}_1^{j_1} \mathrm{a}_2^{j_2} \ldots \mathrm{a}_{n-1}^{j_{n-1}}. \tag{7.26}$$

Now notice that (7.19) implies that the a_i's can only depend linearly on $\mathcal{J}$, so that the inverse spin function $x = x\,(\mathcal{J})$ has to be of the following form:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_{nk} J^k, \tag{7.27}$$

where the coefficients a_{nk} do not depend on J. To see why (7.27) must be true, consider the following two constraints on the values of j:

$$\left.\begin{array}{r} j_1 + j_2 + \ldots + j_{n-1} = k \\ j_1 + 2\,j_2 + \ldots + (n-1)\,j_{n-1} = n-1 \end{array}\right\} \Rightarrow k + j_2 + \ldots + (n-2)\,j_{n-1} = n-1, \tag{7.28}$$

i.e. the maximum power of J in (7.27) is $n-1$. Another conclusion that is implied by these two constraints is that all the leading in $\mathcal{J}$ contributions to x are determined by the leading in $\mathcal{J}$ terms of a_1, all the subleading in $\mathcal{J}$ contributions to x are controlled by a_1 and the leading in $\mathcal{J}$ terms of a_2, etc., i.e. all the coefficients of $x\,(\mathcal{J})$ up to $x_0^n\,\mathcal{J}^{n-m}$ are controlled by $\mathrm{a}_1\,, \ldots\ \mathrm{a}_{m-1}$ and the leading term of a_m. This is better understood if one notices from $k + j_2 + \ldots + (n-2)\,j_{n-1} = n-1$ that when some j_m in (7.26) is $j_m \neq 0$ (minimum value 1), $k = j_m + \ldots + j_{n-1}$ is at most $n-1-(m-1) = n-m$. This conclusion concerning the number of terms that fully determine $x\,(\mathcal{J})$ agrees with what we expect from equation (7.21).

7.1.2 Anomalous Dimensions

Having $x(\mathcal{J})$ at our disposal, it is possible to express the anomalous scaling dimensions $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{J}$ of the $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ closed folded string as a function of $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(f_n \, \ln x + g_n\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[A_n + f_n \, \ln \frac{x}{x_0}\right], \quad \mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathcal{J} \equiv \frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}}, \tag{7.29}$$

where,

$$f_n \equiv -c_n - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} \cdot d_{n-k}\,, \quad g_n \equiv -b_n - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} \cdot h_{n-k}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.30}$$

The first few of the coefficients f_n and g_n are:

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 0, \qquad f_2 = \frac{1}{32}, \qquad f_3 = \frac{3}{128}$$

$$g_0 = 1, \qquad g_1 = -\frac{1}{4}, \qquad g_2 = -\frac{1}{8}\ln 2 - \frac{5}{64}, \qquad g_3 = -\frac{3}{32}\ln 2 - \frac{7}{256}. \tag{7.31}$$

The coefficients A_n are defined as:

$$A_n \equiv g_n + f_n \ln x_0 = g_n + 2f_n \left(2\ln 2 - \frac{\mathcal{J}}{2} - 1\right) \tag{7.32}$$

and the first few A's are:

$$A_0 = 1\,, \quad A_1 = -\frac{1}{4}\,, \quad A_2 = -\frac{1}{64}\left(2\mathcal{J} + 9\right)\,, \quad A_3 = -\frac{1}{256}\left(6\mathcal{J} + 19\right). \tag{7.33}$$

For large spin $\mathcal{J}$, we may invert the series (7.18)–(7.19) and obtain $x = x\left(\mathcal{J}\right)$ by using Mathematica. Then the inverse spin function $x\left(\mathcal{J}\right)$ can be inserted into the equation (7.29) and give the energy-spin relation of the GKP string (II), or equivalently the anomalous dimensions of the $\mathcal{N} = 4$ SYM operators $\text{Tr}\left[\mathcal{X}\mathcal{Z}^m\,\mathcal{X}\,\mathcal{Z}^{J-m}\right]$ as a function the (large) R-charge $\mathcal{J}$. The results of such a computation for the inverse spin function $x = x\left(\mathcal{J}\right)$ and the anomalous dimensions $\gamma = \gamma\left(\mathcal{J}\right)$ can be found in equations (G.2)–(G.3) of appendix G. Both series contain the following kinds of terms:

$$\begin{aligned}
&\text{Leading terms (L): } \mathcal{J}^{n-1}\,\left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n \\
&\text{Next-to-leading/Subleading terms (NL): } \mathcal{J}^{n-2}\,\left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n \\
&\text{NNL terms: } \mathcal{J}^{n-3}\,\left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n \\
&\qquad\qquad\vdots
\end{aligned} \tag{7.34}$$

Using the fact that the series (6.65), (6.66) and (7.29) have the same structure, we may prove the following corollary. To obtain $\mathcal{E} - \mathcal{J}$ up to a given subleading order, we have to know the inverse spin function $x\left(\mathcal{J}\right)$, that has to be inserted into (7.29) in order to give $\mathcal{E} = \mathcal{E}\left(\mathcal{J}\right)$, up to no more than the same order. Using the equations (7.21) and (7.27), we obtain:

$$\ln\frac{x}{x_0} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{a}_k\, x^k = \mathrm{a}_1\, x + \mathrm{a}_2\, x^2 + \mathrm{a}_3\, x^3 + \ldots \tag{7.35}$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_{nk}\mathcal{J}^k = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{J}^{n-1}\, x_0^n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\widetilde{a}_{nk}}{\mathcal{J}^k} = \frac{1}{\mathcal{J}}\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{J}^n\, x_0^n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\widetilde{a}_{nk}}{\mathcal{J}^k}, \tag{7.36}$$

where $a_{nm} = \widetilde{a}_{n(n-k-1)}$ are constants and a_n are linear functions of $\mathcal{J}$. The last equation follows from (7.27) after some reshuffling. The energy-spin relation (7.29) is then written as follows:

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n\left(f_n\,\ln x + g_n\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n\left[A_n + f_n\,\ln\frac{x}{x_0}\right] = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n\left[A_n + \sum_{k=1}^{\infty} f_n\,\mathrm{a}_k\, x^k\right]. \tag{7.37}$$

All the leading terms of x^n are of the order $1/\mathcal{J}^n$ (observe the form of the expansion (7.36) for x, which is nothing more than the equation (G.2) written symbolically) and they multiply either A_n or $f_{n-k} \cdot \mathrm{a}_k$ in the expression (7.37) for $\mathcal{E} - \mathcal{J}$, both of which are linear in $\mathcal{J}$. Thus the r-th subleading term of $\mathcal{E} - \mathcal{J}$ (which is of the order $1/\mathcal{J}^r$) cannot receive contributions from its x^{r+2} terms (for which $\mathcal{J}/\mathcal{J}^{r+2} \sim \mathcal{J}^{r+1}$). Therefore, in order to get precisely the first r-subleading orders of $\mathcal{E} - \mathcal{J}$ ($r = 1$ leading, $r = 2$ subleading, etc.), no more than the first $r + 1$ powers of x must be retained in (7.37). Additionally, the last power of x to be kept in (7.37) (namely x^{r+1}) should not be multiplied by terms which are independent of $\mathcal{J}$.

We can then see why we need precisely n subleading terms in the x-expansion in order to calculate $\mathcal{E} - \mathcal{J}$ up to the n-th subleading order. Keep less powers inside x and $x \cdot A_1 = -x/4$ will miss some of the subleading terms. Terms deeper than $1/\mathcal{J}^n$ into x cannot contribute, since there exist no powers of $\mathcal{J}$ in the expression for $\mathcal{E} - \mathcal{J}$ that can potentially lift them up to the wanted power. All of these observations will become clearer below.

7.1.3 Leading Terms

Let us now see how the above can be applied to the computation of the anomalous dimensions to leading order in $\mathcal{J}$. We will compute the coefficients of the following series:

$$E - J\Big|_{(\mathrm{L})} = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{A}}_{n0}\, \mathcal{J}^{n-1} \left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n. \tag{7.38}$$

As we have explained, we only need to find the leading terms of x, i.e. the terms of the following series:

$$x_{(\mathrm{L})} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, \mathcal{J}^{n-1} \left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n. \tag{7.39}$$

The leading term of x is in turn determined if on the r.h.s. of (7.18) we keep all terms that multiply $x^0 = 1$ and just the leading in $\mathcal{J}$ terms that multiply $x^1 = x$. (7.18) then becomes:

$$\ln x_{(\mathrm{L})} = \frac{\mathcal{J}/2 - b_0}{c_0} - \frac{c_1}{c_0^2}\frac{\mathcal{J}}{2} \cdot x_{(\mathrm{L})} \Rightarrow x_0 = x_{(\mathrm{L})}\, \exp\left[\frac{c_1}{c_0^2}\frac{\mathcal{J}}{2} \cdot x_{(\mathrm{L})}\right] = x_{(\mathrm{L})}\, e^{\mathcal{J}\cdot x_{(\mathrm{L})}/4}, \tag{7.40}$$

where $x_0 = 16\, e^{-\mathcal{J}-2}$. This is equation (7.21) for the leading terms of x. We may solve it either by the inversion method that was described in the previous section, or we can calculate the following tetration:

$$x_{(\mathrm{L})} = x_0\, e^{-x_0 \mathcal{J}/4 \cdot e^{-x_0 \mathcal{J}/4 \cdot e^{\cdots}}} = x_0 \cdot {}^{\infty}\!\left(e^{-x_0 \mathcal{J}/4}\right). \tag{7.41}$$

There's a neat formula for the infinite exponential appearing in (7.41) involving the Lambert W-function (for the definition and properties of the W-function, the reader is referred to appendix I)

$${}^{\infty}\!\left(e^{z}\right) = \frac{W(-z)}{-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}\, z^{n-1}, \tag{7.42}$$

in its principal branch W_0.[39] We therefore find

$$x_{(\mathrm{L})} = \frac{4}{\mathcal{J}}\, W\left(4\,\mathcal{J}\, e^{-\mathcal{J}-2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, \mathcal{J}^{n-1} \left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n, \tag{7.43}$$

where we have defined:

$$\alpha_n \equiv (-1)^{n+1}\, 2^{2n+2} \cdot \frac{n^{n-1}}{n!}. \tag{7.44}$$

To obtain the energy-spin relation to leading order in $\mathcal{J}$, we have to insert formula (7.43) for $x_{(\mathrm{L})}$ into (7.29) and keep only the leading terms. The result is:

$$\begin{aligned} E - J\Big|_{(\mathrm{L})} &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\left\{1 + g_1\, x_{(\mathrm{L})} - f_2\, \mathcal{J} x^2_{(\ell)}\right\} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\left\{1 - \frac{x_{(\mathrm{L})}}{4} - \frac{\mathcal{J} x^2_{(\mathrm{L})}}{32}\right\} = \\ &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\left\{1 - \frac{1}{2\mathcal{J}}\left[2 \cdot W\left(4\,\mathcal{J}\, e^{-\mathcal{J}-2}\right) + W^2\left(4\,\mathcal{J}\, e^{-\mathcal{J}-2}\right)\right]\right\} = \\ &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\left\{1 - \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\left[4\,\alpha_n + \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\,\alpha_{n-k}\right] \cdot \mathcal{J}^{n-1}\left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n\right\}. \end{aligned} \tag{7.45}$$

These are all the leading terms $\widetilde{\mathcal{A}}_{n0}$ of (7.13).

7.1.4 Next-to-Leading Terms

To calculate the subleading coefficients of the anomalous dimensions

$$E - J\Big|_{(\mathrm{NL})} = \sum_{n=2}^{\infty} \widetilde{\mathcal{A}}_{n1}\, \mathcal{J}^{n-2} \left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n, \tag{7.46}$$

we need the leading and subleading terms of x in (7.26):

$$x_{(\mathrm{NL})} = \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n\, \mathcal{J}^{n-2} \left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n. \tag{7.47}$$

This means that we only have to keep all the terms that multiply $x^{0,1}$ on the r.h.s. of (7.18), and only the leading in $\mathcal{J}$ terms that multiply x^2. Equation (7.18), precise up to next-to-leading/subleading (NL) order becomes:

$$\ln x_{(\mathrm{L+NL}+\ldots)} = \frac{\mathcal{J}/2 - b_0}{c_0} - \frac{\mathcal{J} c_1/2 + b_1 c_0 - b_0 c_1}{c_0^2} \cdot x_{(\mathrm{L+NL}+\ldots)} + \frac{c_1^2 - c_0 c_2}{c_0^3}\,\frac{\mathcal{J}}{2} \cdot x^2_{(\mathrm{L+NL}+\ldots)} \Rightarrow$$

[39] We must choose the principal branch W_0 so that x has the correct behavior, $x \to 0^+$ as $\mathcal{J} \to +\infty$. Conversely, in the W_{-1} branch, $x \to -4$. More, in appendix I.

$$\Rightarrow x_{(\mathrm{L+NL}+\ldots)} = x_0 \cdot \exp\left[-\frac{\mathcal{J}+2}{4} \cdot x_{(\mathrm{L+NL}+\ldots)} - \frac{7\mathcal{J}}{64} \cdot x^2_{(\mathrm{L+NL}+\ldots)}\right]. \tag{7.48}$$

To solve this equation we first invert it by means of the Lagrange-Bürmann formula. Writing,

$$x_0 = x_{(\mathrm{L+NL}+\ldots)} \cdot \exp\left[\frac{\mathcal{J}+2}{4} \cdot x_{(\mathrm{L+NL}+\ldots)} + \frac{7\mathcal{J}}{64} \cdot x^2_{(\mathrm{L+NL}+\ldots)}\right], \tag{7.49}$$

we find the inverse as in equation (7.26). Explicitly

$$x_{(\mathrm{L+NL}+\ldots)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{\exp\left[-\frac{\mathcal{J}+2}{4} \cdot n\, x - \frac{7\mathcal{J}}{64} \cdot n\, x^2\right]\right\}\Bigg|_{x=0} \cdot \frac{x_0^n}{n!}. \tag{7.50}$$

Noting that

$$\begin{aligned}\exp\left(\alpha\, x + \beta\, x^2\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{d^n}{dz^n} \left\{\exp\left(\alpha\, z + \beta\, z^2\right)\right\}\Bigg|_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha\, x + \beta\, x^2\right)^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{\substack{k,\, j_1 \,=\, 0 \\ n \,=\, k \,+\, j_1 \\ 0 \,\le\, j_1 \,\le\, k}}^{n} \frac{(k+j_1)!}{(k-j_1)!\, j_1!}\, \alpha^{k-j_1} \beta^{j_1} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d^n}{dz^n} \left\{\exp\left(\alpha\, z + \beta\, z^2\right)\right\}\Bigg|_{z=0} = \sum_{\substack{k,\, j_1 \,=\, 0 \\ n \,=\, k \,+\, j_1 \\ 0 \,\le\, j_1 \,\le\, k}}^{n} \frac{(k+j_1)!}{(k-j_1)!\, j_1!}\, \alpha^{k-j_1} \beta^{j_1}, \tag{7.51}$$

we find:

$$x_{(\mathrm{L+NL}+\ldots)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} \sum_{\substack{k,\, j_1 \,=\, 0 \\ n \,-\, 1 \,=\, k \,+\, j_1 \\ 0 \,\le\, j_1 \,\le\, k}}^{n-1} (-1)^k\, n^k\, \frac{(n-1)!}{(k-j_1)!\, j_1!} \cdot \left(\frac{\mathcal{J}+2}{4}\right)^{k-j_1} \left(\frac{7\mathcal{J}}{64}\right)^{j_1}. \tag{7.52}$$

The next step is to select and keep only the leading (L) and next-to-leading (NL) terms. Begin by expanding the binomial in powers of $\mathcal{J}$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathcal{J}+2}{4}\right)^{k-j_1} \cdot \left(\frac{7\mathcal{J}}{64}\right)^{j_1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j_1} \left(\frac{7\mathcal{J}}{64}\right)^{j_1} \cdot \sum_{m=0}^{k-j_1} \binom{k-j_1}{m} \left(\frac{\mathcal{J}}{2}\right)^{m} = \\ = \frac{7^{j_1}}{2^{k+4j_1}} \cdot \sum_{m=0}^{k-j_1} \binom{k-j_1}{m} \left(\frac{\mathcal{J}}{2}\right)^{m+j_1} &= \frac{7^{j_1}}{2^{k+4j_1}} \cdot \left(\left(\frac{\mathcal{J}}{2}\right)^{j_1} + \ldots + (k-j_1)\left(\frac{\mathcal{J}}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{\mathcal{J}}{2}\right)^{k}\right).\end{aligned}$$

The leading terms $\mathcal{J}^{n-1}\, x_0^n$ correspond to $k = n-1$, $m = j_1 = 0$ and give rise to the leading power series (7.43)–(7.44) of the previous section. The next-to-leading/subleading terms $\mathcal{J}^{n-2}\, x_0^n$ correspond to the sum of the terms with either $k = n-1$, $j_1 = 0$ and $m = 1$ or $k = n-2$, $j_1 = 1$ and $m = 0$. We find:

$$x_{(\mathrm{NL})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} \cdot \left\{ (-1)^{n-1}\, n^{n-1}\, \frac{(n-1)}{2^{2n-3}} + (-1)^{n-2}\, n^{n-2}\, \frac{7\,(n-1)\,(n-2)}{2^{2n}} \right\} \cdot \mathcal{J}^{n-2}. \tag{7.53}$$

The leading and the next-to-leading terms of x are given by:

$$x_{(\mathrm{L+NL})} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n\, \mathcal{J}^{n-1} + \beta_n\, \mathcal{J}^{n-2}\right) \cdot \left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n \tag{7.54}$$

where the α's are defined in (7.44) and

$$\beta_n \equiv (-1)^{n+1}\, 2^{2n} \cdot \frac{n^{n-2}}{n!} \cdot (n-1)\,(n+14)\,. \tag{7.55}$$

We can express the series (7.54) with the aid of Lambert's W-function, by using the formulas (I.8)–(I.13) of appendix I:

$$x_{(\mathrm{L+NL})} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n\, \mathcal{J}^{n-1} + \beta_n\, \mathcal{J}^{n-2}\right) \cdot \left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n = \frac{4}{\mathcal{J}}\, W - \frac{1}{\mathcal{J}^2} \frac{W^2\,(7\,W+8)}{1+W}, \tag{7.56}$$

where the argument of the W-function is $4\,\mathcal{J}\, e^{-\mathcal{J}-2}$. To obtain the leading and the next-to-leading coefficients of the dispersion relation, insert (7.56) into (7.29) and keep only the terms of the leading and the next-to-leading/subleading order:

$$\begin{aligned} E - J\Big|_{(\mathrm{L+NL})} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \Bigg\{ & 1 + A_1\left(x_{(\mathrm{L})} + x_{(\mathrm{NL})}\right) - f_2\,\mathcal{J}\, x_{(\mathrm{L})}^2 - 2 f_2\,\mathcal{J}\, x_{(\mathrm{L})} \cdot x_{(\mathrm{NL})} + \\ & + \left(g_2 + 2\,(2\ln 2 - 1)\, f_2\right) x_{(\mathrm{L})}^2 - \left(\frac{c_1 f_2}{2 c_0^2} + f_3\right) \mathcal{J}\, x_{(\mathrm{L})}^3 \Bigg\} = \\ = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \Bigg\{ & 1 - \frac{x_{(\mathrm{L})}}{4} - \frac{x_{(\mathrm{NL})}}{4} - \frac{\mathcal{J}}{32}\, x_{(\mathrm{L})}^2 - \frac{\mathcal{J}}{16}\, x_{(\mathrm{L})} \cdot x_{(\mathrm{NL})} - \frac{9}{64}\, x_{(\mathrm{L})}^2 - \frac{\mathcal{J}}{32}\, x_{(\mathrm{L})}^3 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{7.57}$$

From this expression we can read the next-to-leading/subleading coefficients (the leading ones were given in (7.45)):

$$E - J\Big|_{(\mathrm{NL})} = -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \left\{ \frac{x_{(\mathrm{NL})}}{4} + \frac{\mathcal{J}}{16}\, x_{(\mathrm{L})} \cdot x_{(\mathrm{NL})} + \frac{9}{64} x_{(\mathrm{L})}^2 + \frac{\mathcal{J}}{32} x_{(\mathrm{L})}^3 \right\} = -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \frac{1}{4\mathcal{J}^2} \left(W^2 + W^3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E - J\Big|_{(\mathrm{NL})} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{32\,\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 16\,\beta_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left[9\,\alpha_{n-k} + 8\,\beta_{n-k} \right] + \right.$$

$$+4\sum_{k,m=1}^{n-2}\alpha_k\,\alpha_m\,\alpha_{n-k-m}\Bigg\}\cdot\mathcal{J}^{n-2}\left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n. \tag{7.58}$$

7.1.5 NNL Terms

Likewise, we can go on and compute higher-order terms in the long-string expansion of $E-J$. Equation (7.26) gives,

$$x_{(\mathrm{L+NL+NNL+\ldots})}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_0^n}{n!}\cdot\sum_{k,j=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\,n^k\,(n-1)!}{(k-j_1-j_2)!\,j_1!\,j_2!}\left(\frac{\mathcal{J}+2}{4}\right)^{k-j_1-j_2}\left(\frac{7\mathcal{J}+9}{64}\right)^{j_1}\left(\frac{15\mathcal{J}}{256}\right)^{j_2}, \tag{7.59}$$

with $n-1=k+j_1+2j_2$ and $0\le j_1+j_2\le k$. We need to keep only the leading (L), subleading (NL) and next-to-subleading (NNL) terms, which can be used to write the resulting power series in terms of Lambert's W-function by using the formulas (I.8)–(I.13) of appendix I. We find:

$$x_{(\mathrm{L+NL+NNL})}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\,\mathcal{J}^{n-1}+\beta_n\,\mathcal{J}^{n-2}+\gamma_n\,\mathcal{J}^{n-3}\right)\cdot\left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n \tag{7.60}$$

where the γ_n's are defined as (the α's and β's are defined in (7.44)–(7.55)):

$$\gamma_n\equiv(-1)^{n+1}\,2^{3n-6}\cdot\frac{n^{n-3}}{n!}\cdot(n-1)\,(n-2)\left(n^2+41n+228\right). \tag{7.61}$$

The inverse spin function $x=x(\mathcal{J})$ (up to NNL order) is then given by

$$x_{(\mathrm{L+NL+NNL})}=\frac{4}{\mathcal{J}}\,W-\frac{1}{\mathcal{J}^2}\frac{W^2\,(7\,W+8)}{1+W}+\frac{1}{8\,\mathcal{J}^3}\frac{W^3\left(76W^3+269W^2+312W+120\right)}{(1+W)^3}, \tag{7.62}$$

where the arguments of the W-functions are $W\left(4\,\mathcal{J}\,e^{-\mathcal{J}-2}\right)$. We insert (7.62) into (7.29), keeping only up to next-to-subleading terms. Then the next-to-subleading (NNL) coefficients of $E-J$ are:

$$E-J\Big|_{\mathrm{NNL}}=-\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\Bigg\{\frac{x_{(\mathrm{NNL})}}{4}+\frac{9}{32}\,x_{(\mathrm{L})}\cdot x_{(\mathrm{NL})}+\frac{\mathcal{J}}{32}\,x_{(\mathrm{NL})}^2+\frac{\mathcal{J}}{16}\,x_{(\mathrm{L})}\cdot x_{(\mathrm{NNL})}+\frac{23}{256}\,x_{(\mathrm{L})}^3+$$

$$+\frac{3\,\mathcal{J}}{32}\,x_{(\mathrm{L})}^2\cdot x_{(\mathrm{NL})}+\frac{111\,\mathcal{J}}{4096}\,x_{(\mathrm{L})}^4\Bigg\}=-\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\,\frac{1}{32\mathcal{J}^3}\,\frac{W^3\left(11\,W^2+26\,W+16\right)}{1+W}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E-J\Big|_{\mathrm{NNL}}=-\frac{\sqrt{\lambda}}{128\,\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{64\,\gamma_n+8\sum_{k=1}^{n-1}\Big[9\,\alpha_k\,\beta_{n-k}+2\,\beta_k\,\beta_{n-k}+4\,\alpha_k\,\gamma_{n-k}\Big]+\sum_{k,m=1}^{n-2}\alpha_k\,\alpha_m\cdot$$

$$\cdot\Big[23\,\alpha_{n-k-m}+48\,\beta_{n-k-m}\Big]+\frac{111}{8}\sum_{k,m,s=1}^{n-3}\alpha_k\,\alpha_m\alpha_s\,\alpha_{n-k-m-s}\Bigg\}\cdot\mathcal{J}^{n-3}\left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n. \tag{7.63}$$

Our final results for the leading, next-to-leading and next-to-next-to-leading terms of the inverse spin function and anomalous dimensions of the long 2-magnon operators Tr $\left[\mathcal{X}\mathcal{Z}^m\mathcal{X}\mathcal{Z}^{J-m}\right]$ of $\mathcal{N}=4$ SYM theory, at strong 't Hooft coupling are:

$$x = \frac{4\,W}{\mathcal{J}} - \frac{1}{\mathcal{J}^2}\frac{W^2\,(7\,W+8)}{1+W} + \frac{1}{8\,\mathcal{J}^3}\frac{W^3\left(76W^3+269W^2+312W+120\right)}{(1+W)^3} + \ldots \tag{7.64}$$

$$\mathcal{E}-\mathcal{J} = 2 - \frac{1}{\mathcal{J}}\left(2W+W^2\right) - \frac{1}{2\,\mathcal{J}^2}\left(W^2+W^3\right) - \frac{1}{16\,\mathcal{J}^3}\frac{W^3\left(11\,W^2+26\,W+16\right)}{1+W} + \ldots, \tag{7.65}$$

where $\mathcal{E} \equiv \pi E/\sqrt{\lambda}$ and $\mathcal{J} \equiv \pi J/\sqrt{\lambda}$. If the series (7.64) and (7.65) are expanded around $\mathcal{J} \to \infty$ by using Taylor's formula (I.3), it is found that they completely agree with the ones calculated with Mathematica (G.2)–(G.3). Formally there's no obstruction in going deeper and deeper in (7.13) and obtaining all the terms of the classical long string expansion. It seems that the Lambert W-functions will keep appearing to all subleading orders of x and will therefore determine all the orders of $\mathcal{E}-\mathcal{J}$ as well. To see how this may come about, just note that the equation (7.26) will generally contain a term of the form $n^n/n!$ that multiplies some Laurent polynomial of n that originates from the multinomial coefficient and the expansion of the a_i's in powers of $\mathcal{J}$. The formulas (I.8)–(I.13) of appendix I may then be used to express the resulting power series in terms of Lambert's function.

We can compare, if we wish, the equations (7.64) and (7.65) for the inverse spin function and the anomalous dimensions of long strings (i.e. $E \gg \sqrt{\lambda}$) with the corresponding expressions for short strings (6.60)–(6.61) i.e. those for which $J \ll \sqrt{\lambda}$. See also figure 27 in appendix G.1 for the plots of (7.64) and (7.65).

7.1.6 Fast Circular Strings on $\mathbf{S}^2$: $\omega \to 1^-$, $J \gg \lambda$

Fast circular strings on the sphere (having $\omega \to 1^-$) can be treated similarly to long folded strings (for which $\omega \to 1^+$). Let us briefly obtain the corresponding expressions for this case too. Our starting point is the series of anomalous dimensions:

$$\mathcal{E}-\mathcal{J} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{x}^n\left(f_n\,\ln\widetilde{x}+g_n\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{x}^n\left[A_n + f_n\,\ln\frac{\widetilde{x}}{x_0}\right], \tag{7.66}$$

$$f_n \equiv d_n - \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot c_{n-k}\,, \qquad g_n \equiv h_n - \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot b_{n-k} \tag{7.67}$$

where the complementary parameter is $\widetilde{x} \equiv 1-\omega^2 \to 0^-$ and d_n, h_n, c_n, b_n are defined in (6.67)–(6.68). The A_n's are given by

$$A_n \equiv g_n + f_n \ln x_0 = g_n + f_n\,\left(4\ln 2 - \mathcal{J} - 2\right), \quad n = 0\,,1\,,2\,,\ldots \tag{7.68}$$

and x_0's defined in (7.20). The result is:

$$\widetilde{x} = -\frac{4\,W}{\mathcal{J}} - \frac{1}{\mathcal{J}^2}\frac{W^2\,(9\,W+8)}{1+W} - \frac{1}{8\,\mathcal{J}^3}\frac{W^3\left(140W^3+397W^2+376W+120\right)}{(1+W)^3} + \ldots \tag{7.69}$$

$$\mathcal{E}-\mathcal{J} = 2 - \frac{1}{\mathcal{J}}\left(2W+W^2\right) - \frac{1}{2\,\mathcal{J}^2}\left(W^2+W^3\right) - \frac{1}{16\,\mathcal{J}^3}\frac{W^3\left(11\,W^2+26\,W+16\right)}{1+W} + \ldots, \tag{7.70}$$

where the argument of the W-function is $W\left(-4\,\mathcal{J}\,e^{-\mathcal{J}-2}\right)$. Expanding the series (7.69)–(7.70) around $\mathcal{J}\to\infty$ with the aid of the series (I.3) of appendix I, we find complete agreement with the corresponding large-spin expansions (G.4)–(G.5) that were obtained with Mathematica. Although the inverse spin functions $x\,(\mathcal{J})$ and $\widetilde{x}\,(\mathcal{J})$ are completely different for the long folded and the fast circular strings in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ (cf. (7.64), (7.69)), the corresponding expressions for the anomalous dimensions in terms of the Lambert W-function coincide (cf. (7.65), (7.70)). Because the arguments of the W-functions have opposite signs in these two cases, the formulas of the anomalous dimensions $\gamma=\gamma\,(\mathcal{J})$ will have a periodic sign difference (cf. (G.3), (G.5)). Apparently, this sign flip seems to be associated with the transition from the stable case of long folded strings, to the instability of fast circular strings.[40]

7.2 Gubser-Klebanov-Polyakov String in AdS_3

7.2.1 Inverse Spin Function

In this subsection we are going to calculate the inverse spin function of the closed folded GKP string in AdS_3. Again, we will first have to revert the series (6.34) for $x=x\,(\mathcal{S})$. Solving (6.34) for $\ln x$, we get

$$\mathcal{S}=\frac{2}{x}+2\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(c_n\ln x+b_n\right)\Rightarrow\ln x=\frac{-1/x+\mathcal{S}/2-\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n}{\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln x=\left[-\frac{1}{c_0\,x}+\frac{\mathcal{S}/2-b_0}{c_0}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{c_0}\,x^n\right]\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{c_0}\,x^k\right)^n. \tag{7.71}$$

(7.71) is then equivalent to an equation of the following form (cf. equation (7.21)):

$$x=x_0\cdot\exp\left[\frac{\mathrm{a}_0}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{a}_n\,x^n\right]=x_0\cdot\exp\left(\frac{\mathrm{a}_0}{x}+\mathrm{a}_1\,x+\mathrm{a}_2\,x^2+\mathrm{a}_3\,x^3+\ldots\right), \tag{7.72}$$

where the a_n's depend linearly on $\mathcal{S}$ ($\mathrm{a}_0=-c_0^{-1}=-4$) and x_0 is defined as:

$$x_0\equiv\exp\left[\frac{\mathcal{S}/2-b_0}{c_0}+\frac{c_1}{c_0^2}\right]=16\,e^{2\mathcal{S}+3/2}. \tag{7.73}$$

An important remark should be made at this point. Although the equation (7.72) for the inverse spin function of a closed folded string that rotates inside AdS_3 is very similar to the inverse spin function (7.21) of closed (folded or circular) strings in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$, it has two significant differences: it contains a $1/x$ term, and x_0 is an increasing function of the spin $\mathcal{S}$. This means that we cannot solve the equation (7.72) by using the algorithm of section (7.1.1), but we have to apply a slightly varied method. Consider x^* that is defined as

$$x^*=x_0\cdot e^{\mathrm{a}_0/x^*}\Rightarrow x^*=\frac{\mathrm{a}_0}{W\left(\mathrm{a}_0/x_0\right)}=x_0\cdot e^{W\left(\mathrm{a}_0/x_0\right)} \tag{7.74}$$

[40] The author kindly thanks professor I. Bakas for this remark.

and $W(z)$ is the Lambert W-function (see appendix I). In effect x^* solves equation (7.72) to lowest order.[41] Setting

$$x = x^* \cdot e^{\mathfrak{u}} \tag{7.75}$$

with $\mathfrak{u} \to 0$ and plugging it into equation (7.72), we obtain with the aid of (7.74):

$$\mathfrak{u} - \frac{\mathrm{a}_0}{x^*} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\mathfrak{u}^k}{k!} - \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n \, (x^*)^n \, e^{n\mathfrak{u}} = 0. \tag{7.76}$$

We may revert the series (7.76) for v by using the standard series reversion. Expanding the exponential in (7.76), we get

$$\left(1 + \frac{\mathrm{a}_0}{x^*} - \sum_{k=1}^{\infty} k \, \mathrm{a}_k \, (x^*)^k\right) \mathfrak{u} - \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{\mathrm{a}_0}{x^*} + \sum_{k=1}^{\infty} k^n \, \mathrm{a}_k \, (x^*)^k\right] \frac{\mathfrak{u}^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n \, (x^*)^n . \tag{7.77}$$

The inverse series is a power series in x^*

$$\mathfrak{u} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, (x^*) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{a}_m \, (x^*)^m\right)^n , \tag{7.78}$$

with $C_n \, (x^*)$ satisfying (for series reversion, see [85])

$$\begin{aligned} C_1 \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{a}_0}{x^*} - \sum_{k=1}^{\infty} k \, \mathrm{a}_k \, (x^*)^k\right) &= 1 \\ C_2 \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{a}_0}{x^*} - \sum_{k=1}^{\infty} k \, \mathrm{a}_k \, (x^*)^k\right)^3 &= \frac{\mathrm{a}_0}{x^*} + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \, \mathrm{a}_k \, (x^*)^k \\ &\vdots \end{aligned} \tag{7.79}$$

Practically we may obtain the inverse series by using Mathematica. We find:

$$\mathfrak{u} = \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0} (x^*)^2 + \left[\frac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_0} - \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0^2}\right] (x^*)^3 + \left[\frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0^3} + \frac{3\,\mathrm{a}_1^2 - 2\,\mathrm{a}_2}{2\,\mathrm{a}_0^2} + \frac{\mathrm{a}_3}{\mathrm{a}_0}\right] (x^*)^4 + \ldots \tag{7.80}$$

x in equation (7.75) is then given by

$$x = x^* + \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0} (x^*)^3 + \left[\frac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_0} - \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0^2}\right] (x^*)^4 + \left[\frac{\mathrm{a}_3}{\mathrm{a}_0} + \frac{2\,\mathrm{a}_1^2 - \mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_0^2} + \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0^3}\right] (x^*)^5 + \ldots \tag{7.81}$$

[41] Since we solve (7.71) in the region where $\mathcal{S} \to +\infty$, $x \to 0^+$ and $\mathrm{a}_0 < 0$, $x_0 \to +\infty$, the W_{-1} branch of Lambert's function must be chosen. See also the comment below the equation (7.97).

while $1/x$ is given by

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^*} - \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0}x^* - \left[\frac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_0} - \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0^2}\right](x^*)^2 - \left[\frac{\mathrm{a}_3}{\mathrm{a}_0} + \frac{\mathrm{a}_1^2 - \mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_0^2} + \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0^3}\right](x^*)^3 + \dots \tag{7.82}$$

We may now obtain all the coefficients a_n by expanding (7.71). When we then plug them into (7.81)–(7.82), we get the following series for x and $1/x$:

$$x = x^* + \left(\frac{\mathcal{S}}{16} + \frac{3}{64}\right)(x^*)^3 + \left(\frac{\mathcal{S}}{32} + \frac{23}{1024}\right)(x^*)^4 + \left(\frac{\mathcal{S}^2}{128} + \frac{55\mathcal{S}}{2048} + \frac{349}{24.576}\right)(x^*)^5 + \dots \tag{7.83}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^*} - \left(\frac{\mathcal{S}}{16} + \frac{3}{64}\right)x^* - \left(\frac{\mathcal{S}}{32} + \frac{23}{1024}\right)(x^*)^2 - \left(\frac{\mathcal{S}^2}{256} + \frac{43\mathcal{S}}{2048} + \frac{295}{24.576}\right)(x^*)^3 + \dots \tag{7.84}$$

7.2.2 Anomalous Dimensions

The series of the anomalous scaling dimensions $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{S}$ of the closed folded AdS$_3$ string is given in terms of $x = x(\mathcal{S})$ by the following expression:

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(f_n \ln x + g_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[A_n + f_n \ln \frac{x}{x_0}\right], \quad \mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathcal{S} \equiv \frac{\pi S}{\sqrt{\lambda}}, \tag{7.85}$$

where,

$$x_0 \equiv \exp\left[\frac{\mathcal{S}/2 - b_0}{c_0} + \frac{c_1}{c_0^2}\right] = 16\, e^{2\mathcal{S}+3/2} \tag{7.86}$$

and also

$$f_n \equiv -c_n - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} \cdot d_{n-k}$$

$$g_n \equiv -b_n - \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} \cdot h_{n-k}\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{7.87}$$

has been defined. The first few of the coefficients f_n and g_n are:

$$f_0 = -\frac{1}{2}\,, \qquad f_1 = 0\,, \qquad f_2 = \frac{1}{128}\,, \qquad f_3 = \frac{1}{128}$$

$$g_0 = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\,, \quad g_1 = -\frac{1}{4}\,, \quad g_2 = -\frac{1}{32}\ln 2 - \frac{3}{32}\,, \quad g_3 = -\frac{1}{32}\ln 2 - \frac{37}{768}. \tag{7.88}$$

The coefficients A_n are given by:

$$A_n \equiv g_n + f_n \ln x_0 = g_n + f_n \left(4\ln 2 + 2\mathcal{S} + \frac{3}{2}\right) \tag{7.89}$$

and the first three of them are:

$$A_0 = -\mathcal{S} - \frac{5}{4}\,, \quad A_1 = -\frac{1}{4}\,, \quad A_2 = \frac{1}{256}\,(4\mathcal{S} - 21)\,, \quad A_3 = \frac{1}{192}\,(3\mathcal{S} - 7)\,. \tag{7.90}$$

It will also be useful to obtain the anomalous dimensions $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{S}$ in terms of x^*. First insert (7.72) into (7.85):

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} = \frac{2\mathrm{a}_0\, f_0}{x} + 2A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} x^n \left[A_n + \mathrm{a}_0\, f_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} f_{n-k-1}\, \mathrm{a}_{k+1}\right]. \tag{7.91}$$

Plugging the series (7.83) and (7.84) into (7.91), we're led to the following result:

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} = \frac{4}{x^*} - \left(2\mathcal{S} + \frac{5}{2}\right) - \frac{9\,x^*}{16} - \left(\frac{\mathcal{S}}{32} + \frac{35}{128}\right)(x^*)^2 - \left(\frac{5\,\mathcal{S}}{128} + \frac{2213}{12.288}\right)(x^*)^3 -$$
$$- \left(\frac{\mathcal{S}^2}{512} + \frac{361\,\mathcal{S}}{8192} + \frac{6665}{49.152}\right)(x^*)^4 - \left(\frac{19\,\mathcal{S}^2}{4096} + \frac{1579\,\mathcal{S}}{32.768} + \frac{433.501}{3.932.160}\right)(x^*)^5 + \ldots \tag{7.92}$$

For large spin $\mathcal{S}$, the series (7.71) may be reverted and $x = x\,(\mathcal{S})$ can be obtained with Mathematica. The inverse spin function $x\,(\mathcal{S})$ can be plugged into the equation (7.85) and give the energy-spin relation of the GKP string case (I) and the anomalous dimensions of the $\mathcal{N} = 4$ SYM operators $\mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}\,\mathcal{D}_+^S\,\mathcal{Z}\right]$, as a function the (large) R-charge $\mathcal{S}$. The results of such a computation for the inverse spin function $x = x\,(\mathcal{S})$ and the anomalous dimensions $\gamma = \gamma\,(\mathcal{S})$, can be found in equations (G.6)–(G.7) of appendix G. Both series generally contain the following kinds of terms ($n = 0, 1, 2, \ldots$):

$$\begin{aligned} &\text{Leading terms (L): } \frac{\ln^n \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} \\ &\text{Next-to-leading/Subleading terms (NL): } \frac{\ln^n \mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+1}} \\ &\text{NNL terms: } \frac{\ln^n \mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+2}} \\ &\qquad\vdots \end{aligned} \tag{7.93}$$

As it will turn out, the expansion of the inverse spin function $x = x\,(\mathcal{S})$ does not contain any of the leading terms $\ln^n \mathcal{S}/\mathcal{S}^n$, whereas the expansion of the anomalous dimensions $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{S}$ contains them all. The large-spin expansion of the energy-spin relation then takes the following form (7.5):

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} = \rho_c\, \ln \mathcal{S} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \rho_{(nk)} \frac{\ln^k \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} = \rho_c\, \ln \mathcal{S} + \rho_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{(nn)} \frac{\ln^n \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \rho_{(nn-1)} \frac{\ln^{n-1} \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} +$$
$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \rho_{(nn-2)} \frac{\ln^{n-2} \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} + \ldots + \frac{\rho_1}{\mathcal{S}} + \frac{\rho_2}{\mathcal{S}^2} + \frac{\rho_3}{\mathcal{S}^3} + \ldots \tag{7.94}$$

It is interesting to also note also the presence of the unusual super-leading term $f\ \ln\mathcal{S}$. We may write:

$$E-S= f\ \ln\left(S/\sqrt{\lambda}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} f_{(nk)}\,\frac{\ln^{k}\left(S/\sqrt{\lambda}\right)}{S^{n}} = f\ \ln\left(S/\sqrt{\lambda}\right)+f_0+\sum_{n=1}^{\infty} f_{(nn)}\frac{\ln^{n}\left(S/\sqrt{\lambda}\right)}{S^{n}}+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} f_{(nn-1)}\frac{\ln^{n-1}\left(S/\sqrt{\lambda}\right)}{S^{n}}+\sum_{n=3}^{\infty} f_{(nn-2)}\frac{\ln^{n-2}\left(S/\sqrt{\lambda}\right)}{S^{n}}+\ldots+\frac{f_1}{S}+\frac{f_2}{S^2}+\frac{f_3}{S^3}+\ldots \tag{7.95}$$

where

$$\rho_c=\frac{\pi\, f}{\sqrt{\lambda}},\quad \rho_0=\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\left(f_0-f\ln\pi\right),\quad \rho_1=\left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\left(f_1-f_{11}\ln\pi\right)$$

$$\rho_2=\left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)^3\left(f_2-f_{21}\ln\pi+f_{22}\ln^2\pi\right)$$

$$\rho_3=\left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)^4\left(f_3-f_{31}\ln\pi+f_{32}\ln^2\pi-f_{33}\ln^3\pi\right)$$

$$\rho_{(nn)}=\left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)^{n+1}\cdot f_{(nn)}\,,\quad \rho_{(nn-1)}=\left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)^{n+1}\left(f_{(nn-1)}-n\,f_{(nn)}\ln\pi\right)$$

$$\rho_{(nn-2)}=\left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)^{n+1}\left(f_{(nn-2)}-(n-1)\,f_{(nn-1)}\ln\pi+\frac{n\,(n-1)}{2}f_{(nn)}\ln^2\pi\right). \tag{7.96}$$

7.2.3 Leading Terms

To calculate the leading in $\mathcal{S}$ terms of the series (7.85), we must use the formula (7.74):

$$x^*=x_0\cdot e^{W_{-1}(\mathrm{a}_0/x_0)}=\frac{\mathrm{a}_0}{W_{-1}\left(\mathrm{a}_0/x_0\right)}=\frac{-4}{W_{-1}\left[-\frac{1}{4}\,e^{-2\mathcal{S}-3/2}\right]}, \tag{7.97}$$

where we have chosen the W_{-1} branch of Lambert's function because we should have $x^*\to 0^+$, as $\mathcal{S}\to+\infty$ and $W_{-1}\to-\infty$ (conversely $W_0\to 0^-$ for $\mathcal{S}\to+\infty$, making x^* blow up as $x^*\to+\infty$. See figure 31). To leading order, the inverse spin function $x=x\left(\mathcal{S}\right)$ is obtained by using Taylor's expansion (I.4) in the W_{-1} branch. For $1/x^*$ we obtain,

$$\frac{1}{x^*}=-\frac{1}{4}\left\{\ln\left|\frac{\mathrm{a}_0}{x_0}\right|-\ln\ln\left|\frac{\mathrm{a}_0}{x_0}\right|+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m!}\left[\begin{array}{c} n+m\\ n+1\end{array}\right]\frac{\left(\ln\ln|\mathrm{a}_0/x_0|\right)^m}{\left(\ln|\mathrm{a}_0/x_0|\right)^{n+m}}\right\}=$$

$$=\frac{\mathcal{S}}{2}+\frac{\ln 2}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\ln\left[2\mathcal{S}+2\ln 2+\frac{3}{2}\right]-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{4\,m!}\left[\begin{array}{c} n+m\\ n+1\end{array}\right]\frac{\left(\ln\left[2\mathcal{S}+2\ln 2+3/2\right]\right)^m}{\left(2\mathcal{S}+2\ln 2+3/2\right)^{n+m}}=$$

$$=\frac{\mathcal{S}}{2}+\frac{\ln\mathcal{S}}{4}+\frac{3}{4}\ln 2+\frac{3}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n}\left(\frac{\ln 2+3/4}{\mathcal{S}}\right)^n-\sum_{n,q=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\frac{(-1)^m}{2^{n+m+2}\,m!}\left[\begin{array}{c} n+m\\ n+1\end{array}\right]\cdot$$

$$\cdot\left(\begin{array}{c} -n-m\\ q\end{array}\right)\left(\begin{array}{c} m\\ p\end{array}\right)\frac{\ln^p\mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+m}}\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{\ln 2+3/4}{\mathcal{S}}\right)^k\right)^{m-p}\left(\frac{\ln 2+3/4}{\mathcal{S}}\right)^q, \tag{7.98}$$

where the unsigned Stirling numbers of the first kind $\left[\begin{array}{c} n+m \\ n+1 \end{array}\right]$ are defined in appendix I, equation (I.5) and, for large $\mathcal{S}$, the following identity has been used:

$$\ln\left[2\mathcal{S}+2\ln 2+\frac{3}{2}\right]=\ln\mathcal{S}+\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{\ln 2+3/4}{\mathcal{S}}\right)^n. \tag{7.99}$$

To get x^*, let us expand the reciprocal of (7.98). The result is,

$$\begin{aligned} x^* = \frac{2}{\mathcal{S}}\cdot\Bigg\{ & 1+\frac{\ln\mathcal{S}}{2\,\mathcal{S}}+(2\ln 2+1)\,\frac{3}{4\mathcal{S}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\frac{(\ln 2+3/4)^n}{\mathcal{S}^{n+1}}-\sum_{n,q=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\frac{(-1)^m}{2^{n+m+1}\,m!}\cdot \\ & \cdot\left[\begin{array}{c} n+m \\ n+1 \end{array}\right]\left(\begin{array}{c} -n-m \\ q \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} m \\ p \end{array}\right)\frac{\ln^p\mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+m+1}}\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{\ln 2+3/4}{\mathcal{S}}\right)^k\right)^{m-p}\cdot \\ & \cdot\left(\frac{\ln 2+3/4}{\mathcal{S}}\right)^q\Bigg\}^{-1}\Rightarrow \end{aligned} \tag{7.100}$$

$$\begin{aligned} x^* = & \frac{2}{\mathcal{S}}-\left[\ln\mathcal{S}+\left(3\ln 2+\frac{3}{2}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^2}+\left[\frac{\ln^2\mathcal{S}}{2}+(1+3\ln 2)\ln\mathcal{S}+\left(\frac{9\ln^2 2}{2}+3\ln 2+\frac{3}{8}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^3}- \\ & -\Big[\frac{\ln^3\mathcal{S}}{4}+\left(\frac{1}{2}+\frac{9\ln 2}{4}\right)\ln^2\mathcal{S}+\left(\frac{27\ln^2 2}{4}+3\ln 2+\frac{1}{16}\right)\ln\mathcal{S}+\Big(\frac{27\ln^3 2}{4}+\frac{9\ln^2 2}{2}+\frac{3\ln 2}{16}- \\ & -\frac{3}{16}\Big)\Big]\frac{1}{\mathcal{S}^4}+\Big[\frac{\ln^4\mathcal{S}}{8}+\left(\frac{3\ln 2}{2}+\frac{5}{24}\right)\ln^3\mathcal{S}+\left(\frac{27\ln^2 2}{4}+\frac{15\ln 2}{8}-\frac{3}{16}\right)\ln^2\mathcal{S}+\Big(\frac{27\ln^3 2}{2}+ \\ & +\frac{45\ln^2 2}{8}-\frac{9\ln 2}{8}-\frac{13}{32}\Big)\ln\mathcal{S}+\Big(\frac{81\ln^4 2}{8}+\frac{45\ln^3 2}{8}-\frac{27\ln^2 2}{16}-\frac{39\ln 2}{32}-\frac{15}{128}\Big)\Big]\frac{1}{\mathcal{S}^5}+\ldots \end{aligned} \tag{7.101}$$

Now note that the series (7.98) for $1/x^*$ contains every kind of small terms (that is terms $\to 0$ as $\mathcal{S}\to\infty$): leading terms $\ln^n\mathcal{S}/\mathcal{S}^n$, subleading terms $\ln^n\mathcal{S}/\mathcal{S}^{n+1}$, next-to-subleading terms $\ln^n\mathcal{S}/\mathcal{S}^{n+2}$, etc. up to $1/\mathcal{S}^n$ terms, with $n=1,\,2,\,3\,\ldots$ On the other hand, the series (7.100)–(7.101) for x^* do not contain any of the leading terms. Likewise $(x^*)^2$ will not contain any leading and subleading terms, $(x^*)^3$ no leading, subleading and next-to-subleading terms, etc. To calculate $E-S$ to leading order in $\mathcal{S}$, we need only the first two terms of (7.92), namely

$$\mathcal{E}-\mathcal{S}\Big|_{\mathrm{L}+\ldots}=\frac{4}{x^*}-\left(2\,\mathcal{S}+\frac{5}{2}\right), \tag{7.102}$$

because the other terms of (7.92) contribute to NL order onwards. We get

$$\mathcal{E}-\mathcal{S}\Big|_{\mathrm{L}+\ldots}=\ln\mathcal{S}+(3\ln 2-1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{\ln 2+3/4}{\mathcal{S}}\right)^n-\sum_{n,q=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\frac{(-1)^m}{2^{n+m}}\cdot$$

$$\cdot \frac{1}{m!} \left[\begin{array}{c} n+m \\ n+1 \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} -n-m \\ q \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} m \\ p \end{array} \right) \frac{\ln^p \mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+m}} \left(\frac{\ln 2 + 3/4}{\mathcal{S}} \right)^q \left[\ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\frac{\ln 2 + 3/4}{\mathcal{S}} \right)^k \right]^{m-p}. \tag{7.103}$$

For $p = m$ and $n = q = 0$ we may read off all the coefficients of the leading terms:

$$\rho_{(mm)} = -\frac{(-1)^m}{2^m\, m!} \cdot \left[\begin{array}{c} m \\ 1 \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} -m \\ 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} m \\ m \end{array} \right) = \frac{(-1)^{m+1}}{2^m} \frac{1}{m}. \tag{7.104}$$

As we have already said, our result agrees with those of [12] (we have used $\left[{m \atop 1} \right] = (m-1)!$). Also,

$$\rho_c = 1 \quad \& \quad \rho_0 = 3 \ln 2 - 1. \tag{7.105}$$

7.2.4 Next-to-Leading Terms

For the subleading coefficients we need the following terms of (7.92),

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} \Big|_{\text{L+NL+...}} = \frac{4}{x^*} - \left(2\,\mathcal{S} + \frac{5}{2} \right) - \frac{9\,x^*}{16} - \frac{\mathcal{S}}{32} \,(x^*)^2 \,. \tag{7.106}$$

Reading off all the terms that give contributions to subleading order from equations (7.98)–(7.101), we get

$$\rho_{(m+1,m)} = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+1}} \left[H_m + \frac{m}{4} + 1 - 3 \ln 2 \right], \tag{7.107}$$

which also agrees with the results of [12] (here we have used $\left[{m+1 \atop 2} \right] = m!\, H_m$). We may also confirm the value of the coefficient ρ_1 in equation (7.94):

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \,(3 \ln 2 - 1)\,. \tag{7.108}$$

7.2.5 NNL Terms

Going to the next-to-next-to-leading (NNL) order, the contributing terms of (7.92) are:

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} \Big|_{\text{L+NL+NNL+...}} = \frac{4}{x^*} - \left(2\,\mathcal{S} + \frac{5}{2} \right) - \frac{9\,x^*}{16} - \left(\frac{\mathcal{S}}{32} + \frac{35}{128} \right) (x^*)^2 - \frac{5\,\mathcal{S}}{128} \,(x^*)^3 -$$

$$- \frac{\mathcal{S}^2}{512} \,(x^*)^4 + \ldots \tag{7.109}$$

We can read off all the NNL terms (with the aid of the property (I.6) of Stirling numbers):

$$\rho_{(m+2,m)} = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+3}} \cdot (m+1) \cdot \Bigg\{ H_{m+1}^2 - H_{m+1}^{(2)} + \frac{1}{2}\,(m - 12\ln 2 + 5) \cdot H_{m+1} + \frac{m\,(m-1)}{24} - \\ - \frac{3}{2}\,(m+5)\ln 2 + 9\ln^2 2 \Bigg\}. \tag{7.110}$$

The coefficient ρ_2 of (7.94) is:

$$\rho_2 = -\frac{9\ln^2 2}{8} + \frac{27\ln 2}{16} - \frac{5}{16}. \tag{7.111}$$

These results agree with those found in [99, 108] for the first few terms of the series (7.95). For more, refer to appendix G and formula (G.7).

Let us finish this paragraph by writing down the W-function expressions for the inverse spin function $x = x\,(\mathcal{J})$ and the anomalous dimensions $\gamma = \gamma\,(\mathcal{J})$. Plugging x^* from (7.97) into the equations (7.83) and (7.92) we obtain:

$$x = -\frac{4}{W_{-1}} - \frac{4\,\mathcal{S}+3}{(W_{-1})^3} + \left[8\mathcal{S} + \frac{23}{4}\right]\frac{1}{(W_{-1})^4} - \left[8\,S^2 + \frac{55}{2}\,S + \frac{349}{24}\right]\frac{1}{(W_{-1})^5} + \Bigg[38\,S^2 + \\ + \frac{711\,S}{8} + \frac{3745}{96}\Bigg]\frac{1}{(W_{-1})^6} - \left[20\,S^3 + 176\,S^2 + \frac{4765\,S}{16} + \frac{26.659}{240}\right]\frac{1}{(W_{-1})^7} + \\ + \left[\frac{466\,S^3}{3} + \frac{6077\,S^2}{8} + \frac{48.955\,S}{48} + \frac{2.543.083}{7680}\right]\frac{1}{(W_{-1})^8} - \ldots, \tag{7.112}$$

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} = -W_{-1} - \left(2\mathcal{S} + \frac{5}{2}\right) + \frac{9}{4\,W_{-1}} - \left[\frac{\mathcal{S}}{2} + \frac{35}{8}\right]\frac{1}{(W_{-1})^2} + \left[\frac{5\,\mathcal{S}}{2} + \frac{2213}{192}\right]\frac{1}{(W_{-1})^3} - \\ - \left[\frac{\mathcal{S}^2}{2} + \frac{361\,\mathcal{S}}{32} + \frac{6665}{192}\right]\frac{1}{(W_{-1})^4} + \left[\frac{19\,\mathcal{S}^2}{4} + \frac{1579\,\mathcal{S}}{32} + \frac{433.501}{3840}\right]\frac{1}{(W_{-1})^5} - \\ - \left[\frac{5\,\mathcal{S}^3}{6} + \frac{259\,\mathcal{S}^2}{8} + \frac{81.799\,\mathcal{S}}{384} + \frac{2.963.887}{7680}\right]\frac{1}{(W_{-1})^6} + \Bigg[\frac{34\,\mathcal{S}^3}{3} + \frac{3069\,\mathcal{S}^2}{16} + \\ + \frac{175.481\,\mathcal{S}}{192} + \frac{2.350.780.111}{1.720.320}\Bigg]\frac{1}{(W_{-1})^7} - \ldots, \tag{7.113}$$

where $\mathcal{E} \equiv \pi E/\sqrt{\lambda}$, $\mathcal{S} \equiv \pi S/\sqrt{\lambda}$ and the argument of the W-functions is $W_{-1}\left(-e^{-2\mathcal{S}-3/2}/4\right)$. Again, the terms of both series (7.112) and (7.113) can be arranged in decreasing order of importance, e.g. according to (7.102) the first two terms of (7.113) are the leading coefficients, (7.106) implies that the first four terms contain all the next-to-leading coefficients, etc. We can check that the formulae (7.112)–(7.113) are correct, by first expanding them around $\mathcal{S} \to +\infty$ with the aid of the expansion (I.4) of the W-function in its W_{-1} branch, and then by comparing them with the series (G.6)–(G.7) that have been obtained with Mathematica.

7.3 Reciprocity

The fact that twist (aka quasipartonic) operators[42] can be classified according to the representations of the collinear subgroup $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \subset \mathfrak{so}(4,2)$, which are labeled by the conformal spin s

$$s \equiv \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}(S+\Delta) = \mathcal{S} + \frac{1}{2}\gamma(\mathcal{S}), \tag{7.114}$$

where

$$\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{S}, \qquad \mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \mathcal{S} \equiv \frac{\pi S}{\sqrt{\lambda}}, \tag{7.115}$$

implies that the anomalous dimensions $\gamma(\mathcal{S})$ must be a function of the conformal spin s:

$$\gamma(\mathcal{S}) = P(s) = P\left(\mathcal{S} + \frac{1}{2}\gamma(\mathcal{S})\right). \tag{7.116}$$

Equivalently we may write,

$$P(\mathcal{S}) = \gamma\left(\mathcal{S} - \frac{1}{2}P(\mathcal{S})\right). \tag{7.117}$$

This equation may be inverted by using the Lagrange-Bürmann formula (7.22), as follows [109]:

$$P(\mathcal{S}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{2}\partial_{\mathcal{S}}\right)^{k-1} \gamma^k(\mathcal{S}). \tag{7.118}$$

The property of reciprocity or parity-invariance of the anomalous dimensions $\gamma(\mathcal{S})$ is expressed through the condition that, for large values of the spin $\mathcal{S}$, the inverse anomalous dimension $P(\mathcal{S})$ contains only even negative powers of the quadratic Casimir operator of the collinear group, $C^2 = s_0(s_0-1)$:[43]

$$P(\mathcal{S}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \ln C}{C^{2k}}. \tag{7.119}$$

Calculating $P(\mathcal{S})$ by plugging the formula (G.7) into (7.118), we find that $P(\mathcal{S})$ is "simple" in that it contains no leading logarithms of $\mathcal{S}$ (as opposed to $\gamma(\mathcal{S})$ in (G.7)) and that it also has the property of reciprocity [99, 105, 108], because it contains only even negative powers of $\mathcal{S}$ and it is thus symmetric under $C = \mathcal{S} \to -\mathcal{S}$:

$$P(\mathcal{S}) = \ln\mathcal{S} + \Big[3\ln 2 - 1\Big] + \left[\frac{\ln\mathcal{S}}{16} + \left(\frac{3\ln 2}{16} + \frac{1}{16}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^2} - \left[\frac{\ln^2\mathcal{S}}{128} + \left(\frac{3\ln 2}{64} + \frac{7}{1024}\right)\ln\mathcal{S} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{9\ln^2 2}{128} + \frac{21\ln 2}{1024} + \frac{5}{2048}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^4} + O\left(\frac{1}{\mathcal{S}^6}\right). \tag{7.120}$$

Repeating our analysis by plugging the formula (7.94) into (7.118) and then demanding that all the leading coefficients, as well as those that multiply the odd negative powers of $1/\mathcal{S}$ must vanish, we get a system of equations between the coefficients ρ. Solving this system of equations, we obtain the following set of formulas that are known as the MVV relations:[44]

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\rho_c\,\rho_0, \quad \rho_{11} = \frac{\rho_c^2}{2}, \quad \rho_{22} = -\frac{\rho_c^3}{8}, \quad \rho_{33} = \frac{\rho_c^4}{24}, \quad \rho_{44} = -\frac{\rho_c^5}{64}, \quad \rho_{55} = \frac{\rho_c^6}{160} \tag{7.121}$$

[42] Namely operators composed out of scalars, gauginos or vector fields and their light-cone derivatives.

[43] We write $s_0 \equiv \pi(S+\Delta_0)/2\sqrt{\lambda}$ for the bare conformal spin.

[44] The Gribov-Lipatov reciprocity [110] leads to certain relations between the coefficients of the large-spin expansion of the anomalous dimensions, known as Moch-Vermaseren-Vogt (MVV) relations [90]. For more on the concept of reciprocity in the context of QCD, see [109, 111, 112]. For other twist operators of $\mathcal{N}=4$ SYM, see [113]. For reciprocity in the context of $\mathcal{N}=6$ super Chern-Simons (ABJM) theory, see [114].

$$\rho_{32} + \rho_c\,\rho_{21} = \frac{\rho_c^4}{16} - \frac{1}{8}\,\rho_c^3\,\rho_0, \quad \rho_c\rho_2 + \rho_{21}\,(\rho_0 - \rho_c) + \rho_{31} = -\frac{\rho_c^4}{8} + \frac{3}{8}\,\rho_c^3\,\rho_0 - \frac{1}{4}\,\rho_c^2\,\rho_0^2 \tag{7.122}$$

$$\rho_2\left(\rho_0 - \frac{\rho_c}{2}\right) - \frac{1}{2}\,\rho_0\,\rho_{21} + \rho_3 = -\frac{1}{8}\,\rho_c^3\,\rho_0 + \frac{1}{4}\,\rho_c^2\,\rho_0^2 - \frac{1}{12}\,\rho_c\,\rho_0^3 \tag{7.123}$$

$$\rho_c^3\,\rho_2 + \rho_{21}\left(3\rho_c^2\,\rho_0 - \frac{37\,\rho_c^3}{12}\right) - 2\,\rho_c\,\rho_{42} + 2\,\rho_{43}\,(\rho_c - \rho_0) - \rho_{53} = \frac{95}{96}\,\rho_c^5\,\rho_0 - \frac{5}{8}\,\rho_c^4\,\rho_0^2 - \frac{67\rho_c^6}{192} \tag{7.124}$$

$$\vdots$$

We may also want to test the idea of *inheritance*, i.e. to check whether low perturbative orders may influence or even control higher orders in string perturbation theory. The idea of inheritance originally came up in a QCD context (for a review see [112]), where it was observed that the lower orders in perturbation theory are able to transmit their structure to higher orders. One may check that the quantum corrections that were calculated in [99] verify the first two of the above MVV relations up to one loop. For the remaining MVV formulae, inheritance is expected (and has indeed been shown) to break down. This is because of the wrapping effects that begin to set in after the critical loop-order and are also present at strong coupling. In fact, wrapping effects are responsible for the breaking down of both the reciprocity and simplicity in the large-spin expansion of the anomalous dimensions of twist-2 operators of $\mathcal{N} = 4$ SYM at strong coupling [108].

For the GKP strings in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$, there exists a transformation that allows the corresponding dispersion relation to be expressed in a form that resembles the dispersion relation of the closed folded GKP string in AdS_3 and permits comparisons between the two. The transformation

$$\mathcal{S} \equiv \frac{1}{16}\,e^{\mathcal{J}+2} \Leftrightarrow \mathcal{J} = \ln\mathcal{S} + 4\ln 2 - 2, \tag{7.125}$$

leads to the following set of terms in the energy-spin relation of closed folded strings in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$:

$$\begin{aligned}
&\text{Leading terms (L): } \frac{\ln^n\mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+1}}\\
&\text{Next-to-leading/Subleading terms (NL): } \frac{\ln^n\mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+2}}\\
&\text{NNL terms: } \frac{\ln^n\mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+3}}\\
&\qquad\qquad\vdots
\end{aligned} \tag{7.126}$$

In contradistinction with the AdS case, all the $\ln^n\mathcal{S}/\mathcal{S}^n$ terms are absent from the large-spin expansion of the anomalous dimensions:

$$\begin{aligned}
\gamma = 2 - &\frac{1}{2\mathcal{S}} + \left[\frac{\ln\mathcal{S}}{16} + \left(\frac{\ln 2}{4} - \frac{5}{32}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^2} - \left[\frac{\ln^2\mathcal{S}}{64} + \left(\frac{\ln 2}{8} - \frac{9}{128}\right)\ln\mathcal{S} + \left(\frac{\ln^2 2}{4} - \frac{9\ln 2}{32} + \right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{3}{32}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^3} + \left[\frac{\ln^3\mathcal{S}}{192} + \left(\frac{\ln 2}{16} - \frac{17}{512}\right)\ln^2\mathcal{S} + \left(\frac{\ln^2 2}{4} - \frac{17\ln 2}{64} + \frac{163}{2048}\right)\ln\mathcal{S} + \left(\frac{\ln^3 2}{3} - \right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{17\ln^2 2}{32} + \frac{163\ln 2}{512} - \frac{1735}{24.576}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^4} - O\left(\frac{1}{\mathcal{S}^5}\right).
\end{aligned} \tag{7.127}$$

Having expressed the anomalous dimensions $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{J}$ in terms of the variable $\mathcal{S} = e^{\mathcal{J}+2}/16$, it is tempting to try to pose and answer questions that normally arise in the case of twist operators. If we calculate $P(\mathcal{S})$ by plugging the formula (7.127) into (7.118), we find that $P(\mathcal{S})$ is simple in that it contains only subleading logarithms of $\mathcal{S}$ (not simpler than $\gamma(\mathcal{S})$ however because (7.127) does not contain leading logarithms too), and it has no reciprocity/parity invariance, since both the even and the odd negative powers of $\mathcal{S}$ appear (therefore there's no symmetry under $C = \mathcal{S} \to -\mathcal{S}$):

$$
\begin{aligned}
P(\mathcal{S}) = 2 - & \frac{1}{2\mathcal{S}} + \left[\frac{\ln \mathcal{S}}{16} + \left(\frac{\ln 2}{4} - \frac{21}{32}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^2} - \left[\frac{\ln^2 \mathcal{S}}{64} + \left(\frac{\ln 2}{8} - \frac{25}{128}\right)\ln \mathcal{S} + \left(\frac{\ln^2 2}{4} - \frac{25 \ln 2}{32} + \right.\right. \\
& \left.\left. + \frac{27}{32}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^3} + \left[\frac{\ln^3 \mathcal{S}}{192} + \left(\frac{\ln 2}{16} - \frac{41}{512}\right)\ln^2 \mathcal{S} + \left(\frac{\ln^2 2}{4} - \frac{41 \ln 2}{64} + \frac{947}{2048}\right)\ln \mathcal{S} + \left(\frac{\ln^3 2}{3} - \right.\right. \\
& \left.\left. - \frac{41 \ln^2 2}{32} + \frac{947 \ln 2}{512} - \frac{13.255}{24.576}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^4} + O\left(\frac{1}{\mathcal{S}^5}\right). \qquad (7.128)
\end{aligned}
$$

8 Infinite-Size Giant Magnons and Single Spikes

In §4.3 we saw how the concept of the magnon emerged in the $\mathfrak{su}(2)$ sector of the planar $\mathcal{N}=4$ SYM, when we considered all the gauge-invariant single trace operators of the sector and the spectrum of their scaling dimensions. The coordinate Bethe ansatz (4.38) was then used to determine the scaling dimensions of all the operators at one-loop order in α' perturbation theory. With the asymptotic Bethe ansatz (ABA) of Beisert, Dippel and Staudacher (BDS) (4.48)–(4.49), an all-loop prediction for the magnon energies became possible for infinite operator sizes. For the $M=1$ magnon states

$$\mathcal{O}_M = \sum_{m=1}^{J+1} e^{imp} \left|\mathcal{Z}^{m-1}\mathcal{X}\mathcal{Z}^{J-m+1}\right\rangle, \quad p \in \mathbb{R} \tag{8.1}$$

$$\tag{8.2}$$

of infinite size ($J=\infty$),[45] the ABA dictates:

$$\Delta - J = \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\pi^2}\sin^2\frac{p}{2}}, \quad J=\infty, \text{ all } \lambda. \tag{8.3}$$

(8.3) is a non-perturbative prediction for the one-magnon spectrum at infinite size that is valid to all loop orders, in weak and strong coupling. Its weak and strong coupling limits are:

$$\Delta - J = 1 + \frac{\lambda}{2\pi^2}\sin^2\frac{p}{2} - \frac{\lambda^2}{8\pi^4}\sin^4\frac{p}{2} + \frac{\lambda^3}{16\pi^6}\sin^6\frac{p}{2} - \ldots, \qquad \lambda \to 0 \text{ (weak coupling)} \tag{8.4}$$

$$\Delta - J = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\sin\frac{p}{2} + 0 + \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\csc\frac{p}{2} - \frac{\pi^3}{8\lambda^{3/2}}\csc^3\frac{p}{2} + \ldots, \qquad \lambda \to \infty \text{ (strong coupling)}. \tag{8.5}$$

Strictly speaking, the one-magnon operators (8.1) are not physical states of $\mathcal{N}=4$ SYM since as we have explained, the cyclicity of the trace (4.42) implies that their total momentum p must vanish. As Beisert has shown in [115], in order to accommodate states (8.1) having a non-vanishing momentum $p \neq 0$ in $\mathcal{N}=4$ SYM theory, the corresponding symmetry algebra $\mathfrak{su}(2|2) \oplus \mathfrak{su}(2|2) \subset \mathfrak{psu}(2,2|4)$ must be extended with two central charges. To obtain meaningful gauge theory states, either the single-magnon momentum must vanish (4.43), or zero-momentum operators of two or more magnons must be formed (4.44).

The string theory duals of the $\mathcal{N}=4$ SYM magnon excitations at infinite size ($J=\infty$) are the giant magnons (GMs) that were found in 2006 by Hofman and Maldacena (HM) [78]. Giant magnons are open single-spin strings that rotate rigidly in $\mathbb{R}\times \mathrm{S}^2 \subset \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. They are the elementary excitations of type IIB string theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ that serve as a sort of a fundamental building block of all the closed string states and multi-soliton solutions of the theory. Despite the fact that both the conserved energy and the spin of infinite-size GMs diverge ($E, J = \infty$) their difference remains finite so that the energy-spin relation of a single giant magnon of momentum/angular extent $p = \Delta\varphi$ is:

$$E - J = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right|, \quad J=\infty, \ \lambda\to\infty. \tag{8.6}$$

[45] The following convention shall be employed throughout the text: $E, J, p = \infty/v, \omega = 1$ will denote infinite size (as obtained by computing the limit $\lim_{J,p\to\infty/v,\omega\to 1}$) and $E, J, p \to \infty/v, \omega \to 1$ will denote large but still finite size (i.e. before considering the limit $\lim_{J,p\to\infty/v,\omega\to 1}$).

Open strings are absent from the spectrum of a type IIB string theory however and we are faced with the same problem that we had with the gauge theory magnons of non-vanishing momentum. As we did for magnons, in order to accommodate GMs within string theory, the symmetry algebra of the corresponding string sigma model (3.13) has to be centrally extended with two additional charges. Physical string states can only be formed by two or more GMs with vanishing total momentum.

The $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ GKP string (II) that he have extensively studied in §6.2–§7.1 is such a closed string state with vanishing total momentum. Infinite-size GKP strings in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ can be formed by the superposition of two HM giant magnons that have maximum angular extent $\Delta\varphi = \pi$ and angular momentum equal to $J/2$ each. They are dual to 2-magnon operators $\mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}^J \mathcal{X}^2\right]$ and their dispersion relation at infinite-size is

$$E - J = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}, \quad J = \infty, \ \lambda \to \infty. \tag{8.7}$$

A second class of solutions in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ is that of single spikes (SSs), single-spin strings with a spike, that rotate on the 2-sphere just like giant magnons do [116, 117]. Technically, single spikes are very closely related to giant magnons. In the conformal gauge, the single spike ansatz follows from the HM giant magnon by interchanging the world-sheet coordinates on the 2-sphere, i.e. $\tau \leftrightarrow \sigma$ while leaving the temporal spacetime coordinate intact, $t = \tau$. The paper [118] claims that the $\tau \leftrightarrow \sigma$ transform carries us from large-spin strings in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ to large-winding ones, and from the holomorphic sector of $\mathcal{N} = 4$ SYM to its non-holomorphic sector.

The conserved charges of momentum and energy of infinite-size/momentum single spikes diverge as $E, p = \infty$, while their difference remains finite. Their dispersion relation is:

$$E - T\Delta\varphi = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \arcsin\left(\frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad p = \infty, \ \lambda \to \infty, \tag{8.8}$$

where $\Delta\varphi = p$ is the momentum/angular extent of the single spike. The giant magnon dispersion relation (8.6) may be obtained from (8.8) by making the transformation $\pi E/\sqrt{\lambda} - \Delta\varphi/2 \mapsto p/2$ and $J \mapsto E - J$.

We won't have much to say about the operators that are dual to single spikes. The interested reader may refer to the papers [119, 120, 118, 121] for more information. As we saw, giant magnons are dual to one-magnon states of the $\mathfrak{su}(2)$ sector of $\mathcal{N} = 4$ SYM, the elementary excitations above the ferromagnetic ground state $\mathrm{Tr}\mathcal{Z}^J$ of the Heisenberg $\mathrm{XXX}_{1/2}$ spin chain. As we will see in more detail below, the string theory dual of the BPS operators $\mathrm{Tr}\mathcal{Z}^J$ is a point-like string that rotates around the equator of the 2-sphere in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ with infinite angular momentum J. A very analogous statement can be made for single spikes: single spikes in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ are elementary excitations above the anti-ferromagnetic ground state $\mathrm{Tr}\mathbb{S}^{L/2} + \ldots$ of an $\mathfrak{so}(6)$ spin chain of $\mathcal{N} = 4$ SYM, where $\mathbb{S}$ are the $\mathcal{N} = 4$ SYM operators $\mathbb{S} \sim \mathcal{X}\overline{\mathcal{X}} + \mathcal{Y}\overline{\mathcal{Y}} + \mathcal{Z}\overline{\mathcal{Z}}$ and $L \equiv J + M$. The anti-ferromagnetic vacuum is in turn dual to the "hoop" string, a string at rest that is wound around the equator of S^2. The $\tau \leftrightarrow \sigma$ transform may again be used to translate between the two solutions.

As opposed to the ferromagnetic ground state $\mathrm{Tr}\mathcal{Z}^J$, that has the minimal number of magnons and occupies the "bottom" of the $\mathcal{N} = 4$ SYM spectrum, the operators $\mathrm{Tr}\mathbb{S}^{L/2}$ are near the "top" of the spectrum with a number of magnons that is comparable to the operator's length. The strings that are dual to the (anti)ferromagnetic ground state (the hoop string and the point-like string respectively) are expected to be (un)stable. Unstable single spikes and hoop strings may be stabilized in many ways, e.g. by adding extra angular momenta [122].

The (in)stability of giant magnons (stable) and single spikes (unstable) may also be inferred by the (in)stability properties of their Pohlmeyer images. As we saw in §5.2, any string configuration on $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ can be mapped to a solution of the sine-Gordon equation. It will turn out that HM giant magnons are dual to the stable sine-Gordon soliton and infinite-momentum single spikes are dual to an unstable solution of the sG equation.

The Pohlmeyer image of giant magnons and single spikes can also be used to compute their S-matrices. Because of the factorizability of the $\mathfrak{su}(2)$ sector (4.40), we only need to consider 2-particle scattering. For giant magnons, the S-matrix that is computed from the Pohlmeyer reduction coincides with the strong coupling limit of the magnon S-matrix (4.49)–(4.52) that we encountered in §4.3.2. This constitutes further evidence that magnons and giant magnons are AdS/CFT duals [78]. The scattering of infinite-momentum single spikes was studied in [123] and the corresponding phase-shift was found to be equal (up to non-logarithmic terms) to the one for magnons and giant magnons. Okamura [121] explained this result by regarding single-spike scattering as factorized scattering between infinitely many giant magnons. In the paper [2] it was shown how this result may follow from the Pohlmeyer reduction.

Let us now set up the formalism that will allow us to study giant magnons and single spikes. Consider the following general ansatz of a string in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2\subset\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$:

$$\Big\{t=t\left(\tau,\sigma\right),\,\rho=\theta=\phi_1=\phi_2=0\Big\}\times\Big\{\overline{\theta}_1=\theta\left(\tau,\sigma\right),\,\overline{\phi}_1=\phi\left(\tau,\sigma\right),\,\overline{\theta}_2=\overline{\phi}_2=\overline{\phi}_3=0\Big\}, \tag{8.9}$$

and the change of variables

$$z\left(\tau,\sigma\right)=R\,\sin\theta\left(\tau,\sigma\right), \tag{8.10}$$

so that $z\in[-R,R]$ and $\phi\in[0,2\pi)$. The embedding coordinates (5.1) of the string become:

$$Y_{05}=Y_0+i\,Y_5=R\,e^{i\,t(\tau,\sigma)}\quad\&\quad X_{12}=X_1+iX_2=\sqrt{R^2-z^2\left(\tau,\sigma\right)}\cdot e^{i\,\phi(\tau,\sigma)} \tag{8.11}$$

$$Y_{12}=Y_{34}=0\qquad\qquad X_{34}=X_3=z\left(\tau,\sigma\right),\quad X_4=X_{56}=0. \tag{8.12}$$

The conformal gauge ($\gamma_{ab}=\eta_{ab}$) string Polyakov action is given by

$$S_P=\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}\int d\tau d\sigma\Bigg\{-\left(\dot{t}^2-t'^2\right)+\frac{\dot{z}^2-z'^{\,2}}{R^2-z^2}+\frac{1}{R^2}\left(R^2-z^2\right)\left(\dot{\phi}^2-\phi'^{\,2}\right)\Bigg\}. \tag{8.13}$$

In the static gauge $t=\tau$, the following set of Virasoro constraints (5.11)–(5.12) is obtained:

$$\dot{X}^i\dot{X}^i+\acute{X}^i\acute{X}^i=\frac{R^2}{R^2-z^2}\left(\dot{z}^2+z'^{\,2}\right)+\left(R^2-z^2\right)\left(\dot{\phi}^2+\phi'^{\,2}\right)=R^2 \tag{8.14}$$

$$\dot{X}^i\acute{X}^i=\frac{R^2\,\dot{z}z'}{R^2-z^2}+\left(R^2-z^2\right)\dot{\phi}\phi'=0. \tag{8.15}$$

According to what we have said in §5.2, the classical string sigma model in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ can be mapped to the sine-Gordon equation by the Pohlmeyer reduction. Defining the Pohlmeyer field ψ as

$$\dot{X}^i\dot{X}^i-\acute{X}^i\acute{X}^i=\frac{R^2}{R^2-z^2}\left(\dot{z}^2-z'^{\,2}\right)+\left(R^2-z^2\right)\left(\dot{\phi}^2-\phi'^{\,2}\right)=R^2\cos 2\psi, \tag{8.16}$$

then ψ must satisfy the following sine-Gordon (sG) equation:

$$\ddot{\psi} - \psi'' + \frac{1}{2}\sin 2\psi = 0. \tag{8.17}$$

We also impose the following boundary conditions to the string's motion in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$:

$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \varphi(r,\tau) - \varphi(-r,\tau)\,, \quad \Delta z = z(r,\tau) - z(-r,\tau) = 0, \tag{8.18}$$

where p is the conserved momentum and $\pm r$ are the open string's world-sheet endpoints, i.e. $\sigma \in [-r, r]$. The conserved charges of the string are given by:

$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \int_{-r}^{+r} \varphi'\, d\sigma \tag{8.19}$$

$$E = \left|\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right| = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\int_{-r}^{+r} \dot{t}\, d\sigma = \frac{r\sqrt{\lambda}}{\pi} \tag{8.20}$$

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi R^2}\int_{-r}^{+r} \left(R^2 - z^2\right)\dot{\phi}\, d\sigma. \tag{8.21}$$

This section is organized as follows. In §8.1 we present the infinite-size or Hofman-Maldacena giant magnons. In §8.2 the $(\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2)$ infinite-size/momentum/winding single spike string is presented. §8.3 deals with the scattering and the bound states of infinite-size giant magnons and single spikes.

8.1 The Hofman-Maldacena (HM) Giant Magnon

To obtain the Hofman-Maldacena (or infinite-size) giant magnon, we set

$$\overline{\theta}_1 = \theta(\sigma - v\tau) \quad \& \quad \overline{\phi}_1 = \tau + \varphi(\sigma - v\tau) \tag{8.22}$$

in the ansatz (8.9), getting (in the static gauge $t = \tau$):

$$\Big\{t = \tau,\, \rho = \theta = \phi_1 = \phi_2 = 0\Big\} \times \Big\{\overline{\theta}_1 = \theta(\sigma - v\tau)\,, \overline{\phi}_1 = \tau + \varphi(\sigma - v\tau)\,, \overline{\theta}_2 = \overline{\phi}_2 = \overline{\phi}_3 = 0\Big\}, \tag{8.23}$$

where v is the giant magnon's velocity. Plugging,

$$z = z(\sigma - v\tau) \quad \& \quad \phi = \tau + \varphi(\sigma - v\tau) \tag{8.24}$$

into the Virasoro constraints (8.14)–(8.15), we obtain:

$$\varphi' = \frac{v}{1 - v^2} \cdot \frac{z^2}{R^2 - z^2}\,, \quad v \neq 1 \tag{8.25}$$

$$z'^{\,2} = \frac{z^2\left(\zeta_v^2 - z^2\right)}{R^2\left(1 - v^2\right)^2}\,, \quad \zeta_v^2 \equiv R^2\left(1 - v^2\right). \tag{8.26}$$

The equations (8.25)–(8.26) have the following solution:

$$z(\tau,\sigma) = R\sin\theta(\tau,\sigma) = \frac{R}{\gamma}\,\mathrm{sech}\Big[\gamma(\sigma - v\tau)\Big], \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{8.27}$$

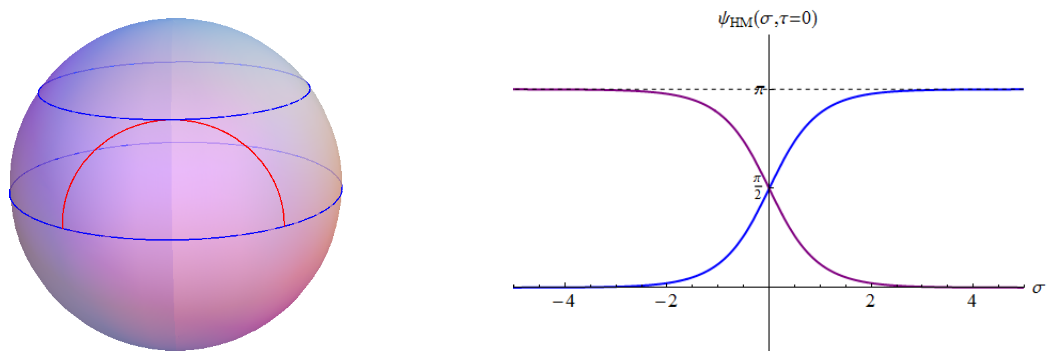


Figure 12: A $v = 0.8$ Hofman-Maldacena giant magnon (left) and its Pohlmeyer images (8.31) (right).

$$\phi(\tau,\sigma) = \tau + \arctan\left[\frac{1}{\gamma\, v}\tanh\gamma(\sigma - v\tau)\right]. \tag{8.28}$$

We have plotted a HM giant magnon (8.27)–(8.28) with $v = 0.8$ on the left of figure 12. Its two edges touch the equator and move at the speed of light, while the string rotates rigidly around the 2-sphere.

As we have already said, while both the conserved energy and the angular momentum (8.20)–(8.21) of the giant magnon diverge, their difference remains finite:

$$\left.\begin{aligned} & p = 2\arcsin\sqrt{1-v^2} \Rightarrow v = \cos p/2 \\ & \mathcal{E} \equiv \pi E/\sqrt{\lambda} = \sqrt{1-v^2}\cdot\mathbb{K}(1) = \infty \\ & \mathcal{J} \equiv \pi J/\sqrt{\lambda} = \sqrt{1-v^2}\cdot\Big[\mathbb{K}(1) - 1\Big] = \infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{E} - \mathcal{J} = \sqrt{1-v^2} = \sin\frac{p}{2}. \tag{8.29}$$

The fact that the tree-level dispersion relation of infinite-size giant magnons (8.29) is identical to the strong coupling limit (8.5) of the corresponding dispersion relation of $\mathcal{N} = 4$ SYM single-magnon operators (8.1), implies that magnons and giant magnons must be AdS/CFT duals. Below we shall provide further evidence for this duality, by calculating the S-matrix of giant magnons and showing that it coincides with the strong-coupling limit of the magnon S-matrix. In order to be able to do so, we will need to know what the Pohlmeyer image of the giant magnon is.

To determine which of the sine-Gordon solutions corresponds to the Pohlmeyer reduction of the HM giant magnon (8.27)–(8.28), we insert the ansatz (8.23) and the two Virasoro constraints (8.25)–(8.26) into (8.16). We find

$$\sin^2\psi = \frac{z^2}{\zeta_v^2} = \frac{z^2}{R^2(1-v^2)}, \tag{8.30}$$

which has the following solution:

$$\psi(\tau,\sigma) = 2\arctan e^{\pm\gamma(\sigma - v\tau)} = \arcsin\operatorname{sech}\left[\gamma(\sigma - v\tau)\right] \tag{8.31}$$

and corresponds to the kink/antikink solution of sG (see e.g. [124]). (8.31) has been plotted on the right-hand side of figure 12. In the singular case $v = 1$, the two constraints (8.25)–(8.26) become

$$z = 0 \quad \& \quad \varphi'\left(1 - \varphi'\right) = 0, \tag{8.32}$$

leading to the following two solutions:

$$z = 0 \quad \& \quad \phi = \tau + c \quad \text{or} \quad \phi = \sigma + c. \tag{8.33}$$

The first is a point-like string that rotates at the equator of the 2-sphere and it is dual to the BPS operator $\text{Tr}\mathcal{Z}^J$ of the $\mathfrak{su}(2)$ sector of $\mathcal{N} = 4$ SYM. The second is the "hoop" string, a stationary string that is wound around the equator of the 2-sphere and is dual to the $\mathcal{N} = 4$ SYM operators $\text{Tr}\mathbb{S}^{L/2}$, where $\mathbb{S}$ are the operators $\mathbb{S} \sim \mathcal{X}\overline{\mathcal{X}} + \mathcal{Y}\overline{\mathcal{Y}} + \mathcal{Z}\overline{\mathcal{Z}}$. It is rather straightforward to compute the conserved charges and the dispersion relations of both the point-like and the hoop string:

$$\mathcal{E} = \mathcal{J}, \; p = 0 \quad \text{(Point-Like String)} \quad \& \quad \mathcal{E} = \frac{p}{2}, \; \mathcal{J} = 0 \quad \text{(Hoop String)}. \tag{8.34}$$

The corresponding Pohlmeyer reductions are also straightforward to obtain from (8.16)–(8.33) and they are given by $\psi = 0$ for the point-like string and $\psi = \pi/2$ for the hoop string.

8.2 Infinite-Momentum Single Spikes

Infinite-momentum/winding single spikes are obtained for

$$\overline{\theta}_1 = \theta(\sigma - \omega\tau) \quad \& \quad \overline{\phi}_1 = \omega\tau + \varphi(\sigma - \omega\tau) \tag{8.35}$$

in (8.9), which leads to (static gauge, $t = \tau$):

$$\Big\{t = \tau, \; \rho = \theta = \phi_1 = \phi_2 = 0\Big\} \times \Big\{\overline{\theta}_1 = \theta(\sigma - \omega\tau), \, \overline{\phi}_1 = \omega\tau + \varphi(\sigma - \omega\tau), \, \overline{\theta}_2 = \overline{\phi}_2 = \overline{\phi}_3 = 0\Big\} \tag{8.36}$$

where ω is the angular velocity of the single spike. If we insert

$$z = z(\sigma - \omega\tau) \quad \& \quad \phi = \omega\tau + \varphi(\sigma - \omega\tau) \tag{8.37}$$

into the constraint equations (8.14)–(8.15), we get:

$$\varphi' = \frac{\omega^2}{1 - \omega^2} \cdot \frac{z^2 - \zeta_\omega^2}{R^2 - z^2}, \quad \omega \neq 1 \tag{8.38}$$

$$z'^{\,2} = \frac{\omega^2}{R^2(1 - \omega^2)^2} \cdot z^2\left(\zeta_\omega^2 - z^2\right), \quad \zeta_\omega^2 \equiv R^2\left[1 - \frac{1}{\omega^2}\right]. \tag{8.39}$$

For $\omega = 1$, the equations (8.32)–(8.33) for the point-like or the hoop string are obtained. For $\omega \neq 1$, (8.38)–(8.39) have the following solution:

$$z(\tau, \sigma) = R\sin\theta(\tau, \sigma) = R\sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2}} \cdot \text{sech}\left(\frac{\sigma - \omega\tau}{\sqrt{\omega^2 - 1}}\right) \tag{8.40}$$

$$\phi(\tau, \sigma) = \sigma - \arctan\left[\sqrt{\omega^2 - 1}\tanh\left(\frac{\sigma - \omega\tau}{\sqrt{\omega^2 - 1}}\right)\right]. \tag{8.41}$$

An infinite-momentum single spike (8.40)–(8.41) with $\omega = 1.6$ has been plotted on the left of figure 13. The spiky string is wound around the equator of the 2-sphere while it rotates rigidly around it.

Infinite-momentum single spikes have their conserved linear momentum and energy (8.19)–(8.20)

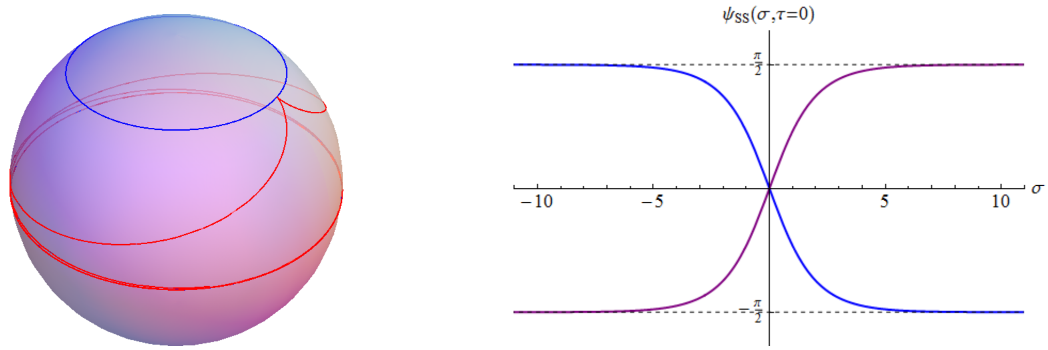


Figure 13: An infinite-size single spike with $\omega = 1.6$ (left) and its Pohlmeyer images (8.44) (right).

diverge while their difference remains finite ($\mathcal{E} \equiv \pi E/\sqrt{\lambda}$, $\mathcal{J} \equiv \pi J/\sqrt{\lambda}$):

$$\left.\begin{aligned} & p = 2\left[\sqrt{\omega^2-1}\cdot\mathbb{K}\,(1) - \arcsin\sqrt{1-1/\omega^2}\right] = \infty \\ & \mathcal{E} = \sqrt{\omega^2-1}\cdot\mathbb{K}\,(1) = \infty \\ & \mathcal{J} = \sqrt{1-1/\omega^2} \leq 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{E} - \frac{p}{2} = \arcsin\sqrt{1-\frac{1}{\omega^2}} = \arcsin\mathcal{J}. \quad (8.42)$$

To study the scattering between single spikes we need to know their Pohlmeyer reduction. If we insert the ansatz (8.36) and the Virasoro constraints (8.38)–(8.39) into (8.16), we will find that

$$\sin^2\psi = 1 - \frac{z^2}{\zeta_\omega^2}. \quad (8.43)$$

Therefore the Pohlmeyer reduction of the single spike is:

$$\psi\,(\tau,\sigma) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan e^{\pm(\sigma-\omega\tau)/\sqrt{\omega^2-1}} = \arcsin\tanh\left[\frac{\sigma-\omega\tau}{\sqrt{\omega^2-1}}\right] \quad (8.44)$$

and it corresponds to an unstable solution of the sine-Gordon equation. The plot of (8.44) for an infinite-size single spike with $\omega = 1.6$, can be found on the right of figure 13.

As we have already mentioned in the introduction of this section, there exists a transformation that allows to transform between infinite-size giant magnons and single spikes. The $\tau \leftrightarrow \sigma$ symmetry or "2D duality" [118],

$$\tau \leftrightarrow \sigma\,,\; v \leftrightarrow \frac{1}{\omega}\,,\; \psi \leftrightarrow \left[\frac{\pi}{2} - \psi\right] \quad \Leftrightarrow \quad \text{Giant Magnons} \leftrightarrow \text{Single Spikes}. \quad (8.45)$$

transforms the GM solutions (8.27)–(8.28) and their Pohlmeyer reduction (8.31) to the SS ones, (8.40)–(8.41) and (8.44). The $\tau \leftrightarrow \sigma$ transform can also be used to transform the point-like string to the hoop string (8.33). As we shall see, the 2D duality also applies to giant magnons and single spikes of finite sizes.

In order to transform between the dispersion relations of GMs and SSs, the following transform should be applied:

$$\mathcal{E} - \frac{p}{2} \mapsto \frac{p}{2} \quad \& \quad \mathcal{J} \mapsto \mathcal{E} - \mathcal{J} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Single Spikes} \mapsto \text{Giant Magnons}. \quad (8.46)$$

The transform (8.46) maps the energy-momentum relation (8.42) to (8.29). (8.46) obviously also works for the dispersion relations of the point-like and the hoop string (8.34).

8.3 Bound States & Scattering

8.3.1 Scattering

The sine-Gordon images of (infinite-size) giant magnons and single spikes can be used to calculate their S-matrices and study their bound states. Let us start by considering giant magnon scattering.

Following Hofman and Maldacena [78], we may study the scattering of the Pohlmeyer images of GMs which are the kink/antikink (soliton/antisoliton) solutions of the sine-Gordon equation (8.31). It is slightly more convenient to consider the soliton-antisoliton solution, although the same result can be found from any of the remaining 2-soliton scattering solutions of sG, namely the soliton-soliton or the antisoliton-antisoliton. The kink-antikink solution of the sG equation (8.17) is (see e.g. [124]):

$$\tan\frac{\psi_{\text{s-a}}}{2}=\frac{\sinh\left(v\gamma\tau\right)}{v\cosh\gamma\sigma}=\frac{1}{v}\cdot\frac{e^{v\gamma\tau}-e^{-v\gamma\tau}}{e^{\gamma\sigma}+e^{-\gamma\sigma}}. \tag{8.47}$$

The solution (8.47) describes two solitons that are initially at $\sigma=\pm\infty$ when $\tau=-\infty$, then they start approaching each other, they interact and they end up at the opposite side $\sigma=\mp\infty$, when $\tau=+\infty$. The Pohlmeyer reduction $\psi_{\text{s-a}}$, as well as the corresponding energy density $dE_{\text{s-a}}/d\sigma$ of giant magnon scattering with $v=0.5$, have been plotted on the left graphs of figures 14–15 respectively.

We now want to obtain the time delay that the two sG solitons experience in their center of mass (CM) frame, as they pass through each other. By comparing the values of (8.47) at $\sigma=\pm\infty$, $\tau=\pm\infty$, we find

$$\Delta T_{\text{cm}}=\frac{2\sqrt{1-v^2}}{v}\cdot\ln v, \tag{8.48}$$

where $0\leq v\leq 1$ is the soliton's velocity in the CM frame. The equation (8.48) may be transformed to a reference frame where the two solitons have arbitrary speeds v_1 and v_2. The result is:

$$\Delta T_{12}=\frac{2}{v_1\gamma_1}\cdot\ln v=\tan\frac{p_1}{2}\cdot\ln\left[\frac{1-\cos\frac{p_1-p_2}{2}}{1-\cos\frac{p_1+p_2}{2}}\right], \qquad \begin{aligned} v_i&=\tan\hat{\theta}_i=\cos p_i/2\\ \gamma_i&=\cosh\hat{\theta}_i=\csc p_i/2 \end{aligned}, \tag{8.49}$$

where $\hat{\theta}_i$ is the rapidity of the soliton $i=1,2$ and $v=\tanh(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2/2)$. The prescription for the calculation of phase-shifts from time delays in quantum field theory has been laid down by Jackiw and Woo in [125]:

$$\Delta T_{12}=\frac{\partial\delta_{12}}{\partial\epsilon_1}, \tag{8.50}$$

where $\epsilon_1=\sin p/2$ is the energy of one of the solitons. Inserting (8.49) in (8.50), we find:

$$\delta_{12}=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\left\{\left(\cos\frac{p_2}{2}-\cos\frac{p_1}{2}\right)\ln\left[\frac{1-\cos\frac{p_1-p_2}{2}}{1-\cos\frac{p_1+p_2}{2}}\right]-p_1\sin\frac{p_1}{2}\right\}. \tag{8.51}$$

The last term in (8.51) depends on the worldsheet gauge that we have chosen and the definition of the spatial variable σ. Had we chosen a gauge with $dJ/d\sigma=$ const., instead of one with $dE/d\sigma=$ const., we could have arranged for the last term in (8.51) to drop out and the phase-shift to become, for $\sin p_{1,2}/2>0$:

$$\delta_{12}=\delta\left(p_1,p_2\right)=-\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\left(\cos\frac{p_1}{2}-\cos\frac{p_2}{2}\right)\ln\left[\frac{\sin^2\frac{p_1-p_2}{4}}{\sin^2\frac{p_1+p_2}{4}}\right]. \tag{8.52}$$

It can be shown that the phase-shift (8.52) is equal to the strong coupling value of the 2-magnon phase-shift of the dressing phase (4.50),

$$\sigma^2_{12(\text{AFS})}=e^{i\delta_{12}} \tag{8.53}$$

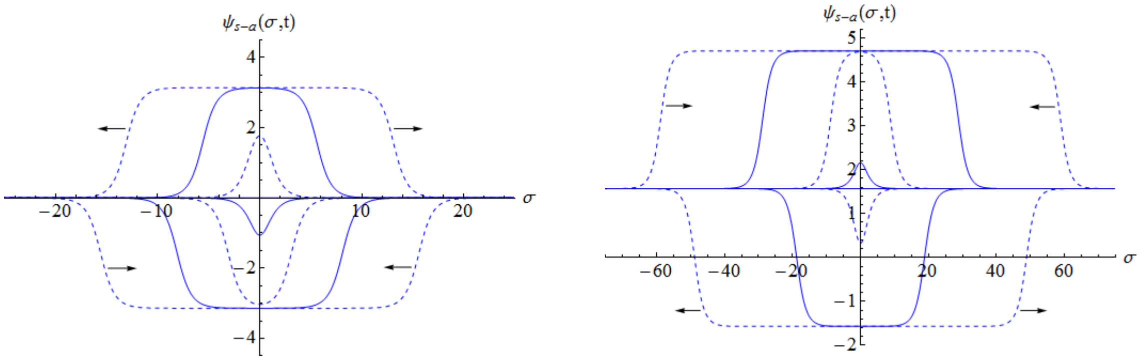


Figure 14: Sine-Gordon solution of soliton-antisoliton scattering between two giant magnons with $v = 0.5$ (left) and two single spikes with $\omega = 2$ (right).

aka AFS phase (4.52). We won't have time to present the derivation of the formula (8.52) from the AFS phase here, so we refer the reader to the paper [68] for the details.

Another way to compute the giant magnon phase-shift (8.51)–(8.52) is by using the specific solution of the string sigma model in $\mathbb{R}\times \mathrm{S}^2$ that describes the scattering between two giant magnons. This was carried out in [126], where the 2-giant magnon scattering solution was constructed by the so-called dressing method, that starts from the $\mathbb{R}\times \mathrm{S}^2$ point-like string (8.33) and successively builds more complicated string solutions in $\mathbb{R}\times \mathrm{S}^2$. In a similar manner, one may "dress" the hoop string (8.33) and obtain the scattering solution between two single spikes, from which the single spike phase-shift may be calculated. This has been done in [123] and the result is:

$$\delta\left(q_1,q_2\right) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\left\{\left(\cos\frac{q_1}{2}-\cos\frac{q_2}{2}\right)\ln\left[\frac{\sin^2\frac{q_1-q_2}{4}}{\sin^2\frac{q_1+q_2}{4}}\right]-q_1\sin\frac{q_1}{2}\right\}, \tag{8.54}$$

where q is defined as $\mathcal{J} = \left(1-1/\omega^2\right)^{1/2} \equiv \sin q/2$, while ω and $\mathcal{J}$ are the spike's angular velocity and conserved angular momentum respectively. For $p \leftrightarrow q$ (8.54) obviously agrees with the giant magnon phase-shift (8.52) that we computed above, up to the non-logarithmic term $q\sin q/2$ which comes with the opposite sign. A qualitative explanation for the coincidence of the logarithmic terms of (8.51)–(8.54) has been given by Okamura in [121], where single spike scattering was regarded as factorized scattering between infinitely many giant magnons.

A simpler derivation of the single spike phase-shift was given in [2] by using the $\tau \leftrightarrow \sigma$ transform (8.45).[46] Roughly speaking, the $\tau \leftrightarrow \sigma$ transform can be used to transform the sG solutions that correspond to GMs, into solutions of the sG equation that correspond to single spikes. Then, the single spike phase-shift can be calculated from the Pohlmeyer image of the single spike scattering solution à la Hofman-Maldacena. We note that both the logarithmic and the non-logarithmic terms of the phase-shift formula of [2] agree with the GM phase-shift (8.51).

Let us see how the recipe of [2] works. This time it is more convenient to start from the soliton-soliton scattering solution of the sG equation:

$$\tan\frac{\psi_{\text{s-s}}}{2} = \frac{v\,\sinh\gamma\sigma}{\cosh v\gamma\tau}. \tag{8.55}$$

This solution of the sG equation has topological charge[47] $Q = +2$ and it is the Pohlmeyer reduction of two giant magnons that scatter in their center of mass frame. When it is $\tau \leftrightarrow \sigma$ transformed according

[46] The authors of [2] followed a suggestion that appeared in footnote 2 of reference [123].

[47] The topological charge Q of a sG solution is defined as $Q = 1/\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_\sigma\psi\,d\sigma$.

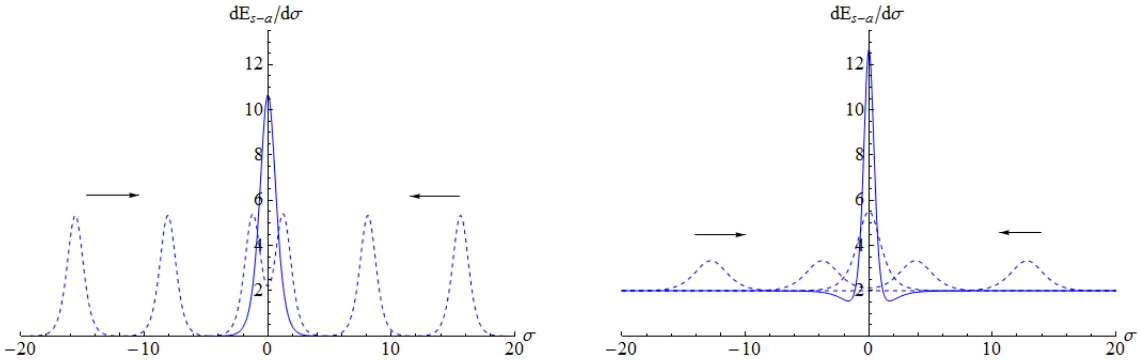


Figure 15: Energy density of soliton-antisoliton scattering between two giant magnons with $v = 0.5$ (left) and two single spikes with $\omega = 2$ (right).

to (8.45), the transformed solution

$$\tan\frac{\psi_{\text{s-a}}}{2} = \frac{\omega\cosh\sigma/\sqrt{\omega^2-1} - \sinh\omega\tau/\sqrt{\omega^2-1}}{\omega\cosh\sigma/\sqrt{\omega^2-1} + \sinh\omega\tau/\sqrt{\omega^2-1}}, \tag{8.56}$$

satisfies the sine-Gordon equation (8.17) and has a topological charge of $Q = 0$, which means that it corresponds to the scattering between two solutions that carry opposite topological charges. The equation (8.56) is the Pohlmeyer reduction of a string solution that describes the scattering of two single spikes in their center of mass frame. On the right-hand side of figures 14–15, we have plotted the sG wavefunction (8.56) and its energy density that correspond to the scattering between two single spikes with $\omega = 2$. Likewise we may obtain the solutions of the sG equation that describe the scattering between single spikes of the same topological charge (and total charge $Q = \pm 2$).

Now that we have obtained the Pohlmeyer reduction of single spike scattering (8.56), we may go on and calculate the phase-shift à la Hofman and Maldacena. The result is the same if the $Q = \pm 2$ solutions of sG are used instead. In a reference frame where the velocities of the two solutions are $v_1 = 1/\omega_1$ and $v_2 = 1/\omega_2$, the time delay is found to be:

$$\Delta T_{12} = \frac{1}{\gamma_1}\ln v = \sin\frac{q_1}{2}\cdot\ln\left[\frac{1-\cos\frac{q_1-q_2}{2}}{1-\cos\frac{q_1+q_2}{2}}\right], \quad v = \tanh\left[\frac{\hat\theta_1-\hat\theta_2}{2}\right], \tag{8.57}$$

where $\cosh\hat\theta_i \equiv \gamma_i = (1-v_i^2)^{-1/2} = \csc q_i/2$ for $i = 1, 2$. The single spike phase shift for $\sin q_i/2 > 0$ is recovered by means of the formula,

$$\Delta T_{12} = \frac{\partial\delta_{12}}{\partial\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_i \equiv \mathcal{E}_i - \frac{p_i}{2} = \arcsin\mathcal{J}_i = \frac{q_i}{2}, \quad i = 1, 2. \tag{8.58}$$

We find:

$$\delta(q_1, q_2) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\left\{\left(\cos\frac{q_2}{2} - \cos\frac{q_1}{2}\right)\ln\left[\frac{\sin^2\frac{q_1-q_2}{4}}{\sin^2\frac{q_1+q_2}{4}}\right] - q_1\sin\frac{q_1}{2}\right\}. \tag{8.59}$$

8.3.2 Bound States

We close this section with two examples of the $\sigma \leftrightarrow \tau$ transform with single spike bound states. It is obvious that any N-soliton solution of sG equation can be $\sigma \leftrightarrow \tau$ transformed and give rise to some new single spike solutions. An example is the breather (Q = 0) solution,

$$\tan\frac{\psi_b}{2} = \frac{\sin a\gamma_a\tau}{a\cosh\gamma_a\sigma}, \quad \gamma_a \equiv \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \tag{8.60}$$

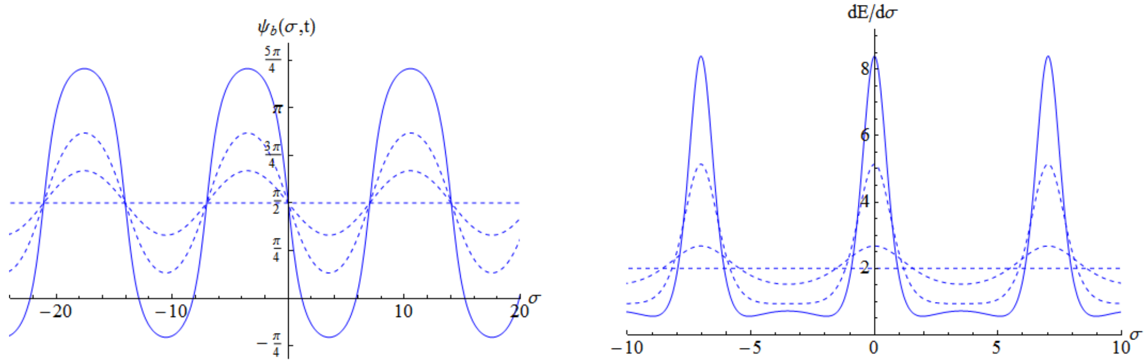


Figure 16: Sine-Gordon wavefunction (left) and energy density (right) of the breather solution for single spikes (8.61), with $\omega = 2$.

which takes the following form under the $\tau \leftrightarrow \sigma$ transform:

$$\tan\frac{\psi_b}{2} = \frac{\cosh\omega\gamma_\omega\tau - \omega\sin\gamma_\omega\sigma}{\cosh\omega\gamma_\omega\tau + \omega\sin\gamma_\omega\sigma}. \tag{8.61}$$

(8.61) satisfies the sine-Gordon equation (8.17). For $\omega = 2$ its wavefunction has been plotted on the left graph of figure 16 while the right graph of the same figure contains a plot of the energy density. Initially, the solution is constant at $\psi = \pi/2$, then between times $\tau = -\tau_0$ and $\tau = 0$ its amplitude and energy start growing until they become the wiggly periodic lines of figure 16, with extrema at $\sigma = k\pi/2\gamma_\omega$. Afterwards, both wavefunctions start decreasing again and attain their constant initial value $\psi = \pi/2$, at $\tau = \tau_0$.

Another stable solution of sG with 3 solitons is the "wobble", which contains a breather and a kink (or antikink) [127, 128]:

$$\tan\frac{\psi_w}{2} = \frac{\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\sin a\tau + \frac{e^\sigma}{2}\left(e^{-\sqrt{1-a^2}\sigma} + r_{\text{a}}^2 e^{\sqrt{1-a^2}\sigma}\right)}{\cosh\left(\sqrt{1-a^2}\,\sigma\right) + \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\,r_{\text{a}}\,e^\sigma\sin a\tau}\,, \quad r_{\text{a}} \equiv \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}. \tag{8.62}$$

With the $\tau \leftrightarrow \sigma$ transform (8.62) becomes:

$$\tan\frac{\psi_w}{2} = \frac{\sqrt{\omega^2-1}\,(r_\omega e^\tau - 1)\sin\frac{\sigma}{\omega} + \frac{1}{2}\left[(1-e^\tau)\,e^{-\frac{\sqrt{\omega^2-1}}{\omega}\cdot\tau} + \left(1 - r_\omega^2\,e^\tau\right)e^{\frac{\sqrt{\omega^2-1}}{\omega}\cdot\tau}\right]}{\sqrt{\omega^2-1}\,(r_\omega e^\tau + 1)\sin\frac{\sigma}{\omega} + \frac{1}{2}\left[(1+e^\tau)\,e^{-\frac{\sqrt{\omega^2-1}}{\omega}\cdot\tau} + (1 + r_\omega^2\,e^\tau)\,e^{\frac{\sqrt{\omega^2-1}}{\omega}\cdot\tau}\right]}, \tag{8.63}$$

where

$$r_\omega \equiv \frac{\omega - \sqrt{\omega^2-1}}{\omega + \sqrt{\omega^2-1}}. \tag{8.64}$$

The solution (8.63) also exhibits the "flare"-like behavior of the breather (8.61).

9 Finite-Size Giant Magnons and Single Spikes

The finite-size generalizations of giant magnons and single spikes can be obtained by inserting,

$$\theta = \theta\left(\sigma - v\omega\tau\right), \quad \varphi \equiv \phi - \omega\,\tau = \varphi\left(\sigma - v\omega\tau\right) \tag{9.1}$$

into the ansatz (8.9), so that in the static gauge $t = \tau$ (8.9) becomes:

$$\Big\{t = \tau,\, \rho = \theta = \phi_1 = \phi_2 = 0\Big\} \times \Big\{\overline{\theta}_1 = \theta\left(\sigma - v\omega\tau\right), \overline{\phi}_1 = \omega\,\tau + \varphi\left(\sigma - v\omega\tau\right), \overline{\theta}_2 = \overline{\phi}_2 = \overline{\phi}_3 = 0\Big\} \tag{9.2}$$

Finite-size giant magnons and single spikes are open strings in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ that rotate with angular velocity ω and at the same time translate with phase velocity $v_p = v \cdot \omega$. If we plug,

$$z = z\left(\sigma - v\omega\tau\right), \quad \varphi \equiv \phi - \omega\,\tau = \varphi\left(\sigma - v\omega\tau\right) \tag{9.3}$$

into the constraint equations (8.14)–(8.15) and the Pohlmeyer reduction (8.16), we obtain:

$$\varphi' = \frac{v\,\omega^2}{1 - v^2\omega^2} \cdot \frac{z^2 - \zeta_\omega^2}{R^2 - z^2}, \quad \zeta_\omega^2 \equiv R^2\left[1 - \frac{1}{\omega^2}\right], \quad v \cdot \omega \neq 1 \tag{9.4}$$

$$z'^{\,2} = \frac{\omega^2}{R^2\left(1 - v^2\omega^2\right)^2} \cdot \left(z^2 - \zeta_\omega^2\right)\left(\zeta_v^2 - z^2\right), \quad \zeta_v^2 \equiv R^2\left(1 - v^2\right) \tag{9.5}$$

$$\sin^2\psi = \frac{z^2 - \zeta_\omega^2}{\zeta_v^2 - \zeta_\omega^2} \quad \text{(Pohlmeyer reduction).} \tag{9.6}$$

For $v \cdot \omega = 1$ we're led to the trivial solution $z = \zeta_v = \zeta_\omega$. This solution is only possible if $z = 0$ and $v = \omega = 1$, which is just the point-like string and its $\sigma \leftrightarrow \tau$ dual hoop string (8.33). Combining the equations (9.4) and (9.5), we obtain:

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{R^2 - z^2}{R\,v\,\omega}\sqrt{\frac{\zeta_v^2 - z^2}{z^2 - \zeta_\omega^2}}. \tag{9.7}$$

It is relatively simple to retrieve the infinite-size limits of giant magnons and single spikes from the finite-size ansatz (9.2) and equations (9.4)–(9.6). The Hofman-Maldacena (or infinite-size) giant magnon (8.25)–(8.26) and its Pohlmeyer reduction (8.30) are retrieved for $\omega = 1$ and $|v| \leq 1$, while for $v = 1$ and $\omega \geq 1$ we recover the infinite-size (or infinite momentum/winding) single spikes (8.38)–(8.39) and their Pohlmeyer reduction (8.43).

Depending on the relative values of the open string's linear and angular velocities v and ω, there exist four main regimes of solutions of the constraints (9.4)–(9.5) and the Pohlmeyer reduction (9.6):

1. Giant magnon, elementary region: $0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$.

2. Giant magnon, doubled region: $0 \leq |v| \leq 1 \leq 1/\omega$.

3. Single spike, elementary region: $0 \leq 1/\omega < |v| \leq 1$.

4. Single spike, doubled region: $0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$.

See also table 1. The choice of the names "elementary" and "doubled" will become clear below, where each the above regions will be studied in more detail. In §10, we will examine the classical dispersion relations of these solutions.

	$\omega \leq 1$	$\omega \geq 1$	
$v\omega \leq 1$	GM Doubled (9.2)	GM Elementary (9.1)	–
$v\omega \geq 1$	–	SS Elementary (9.3)	SS Doubled (9.4)
	$v \leq 1$		$v \geq 1$

Table 1: Elementary and doubled regions of giant magnons and single spikes.

9.1 Giant Magnon: Elementary Region, $0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$

In this case the open string is an arc in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ (giant magnon) that extends between the parallels ζ_ω and ζ_v:

$$0 \leq \zeta_\omega^2 = z_{\text{min}}^2 \leq z^2 \leq z_{\text{max}}^2 = \zeta_v^2 \leq R^2. \tag{9.8}$$

The conserved momentum/angular extent of finite-size giant magnons in the elementary region is:

$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \int_{-r}^{+r} \varphi'\, d\sigma = \frac{2}{\sqrt{1-v^2}} \left[\frac{1}{v\omega}\, \mathbf{\Pi}\left(\left[1 - \frac{1}{v^2}\right]\eta; \eta\right) - v\omega\, \mathbb{K}\left(\eta\right)\right], \tag{9.9}$$

where

$$\eta \equiv 1 - \frac{z_{\text{min}}^2}{z_{\text{max}}^2} = \frac{1 - v^2\omega^2}{\omega^2\left(1-v^2\right)} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{\eta + v^2\left(1-\eta\right)}}. \tag{9.10}$$

The conserved charges of the energy and the angular momentum are found to be:

$$E = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-r}^{+r} \dot{t}\, d\sigma = \frac{r\sqrt{\lambda}}{\pi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi\omega} \cdot \frac{1 - v^2\omega^2}{\sqrt{1-v^2}}\, \mathbb{K}\left(\eta\right), \quad r = \frac{1 - v^2\omega^2}{\omega\sqrt{1-v^2}}\, \mathbb{K}\left(\eta\right) \tag{9.11}$$

$$J = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi R^2} \int_{-r}^{+r} \left(R^2 - z^2\right) \dot{\phi}\, d\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \sqrt{1-v^2} \Big(\mathbb{K}\left(\eta\right) - \mathbb{E}\left(\eta\right)\Big). \tag{9.12}$$

As we have said, the infinite-size (Hofman-Maldacena) giant magnon can be recovered in the limit $\omega = 1$ and $J = \infty$. To obtain the finite-size version of the $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ closed folded GKP string that we studied in §6.2, two elementary giant magnons with velocities $v = 0$, maximum momentum $p = \pi$ and angular momenta $J/2$ must be superposed. The Virasoro constraints (9.4)–(9.5) of giant magnons in the elementary region, have the following solutions:

$$z\left(\tau,\sigma\right) = R\sqrt{1-v^2} \cdot \mathrm{dn}\left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\omega\,\eta\sqrt{1-v^2}}, \eta\right), \quad n \cdot r \leq \sigma - v\omega\tau \leq \left(n+1\right) \cdot r \tag{9.13}$$

$$\varphi\left(z\right) = \frac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{1-v^2}} \Bigg\{\frac{1}{v\omega}\, \mathbf{\Pi}\Bigg(\left[1 - \frac{1}{v^2}\right]\eta, \arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\sqrt{1 - \frac{z^2}{z_{\text{max}}^2}}\right]\Bigg|\,\eta\Bigg) -$$

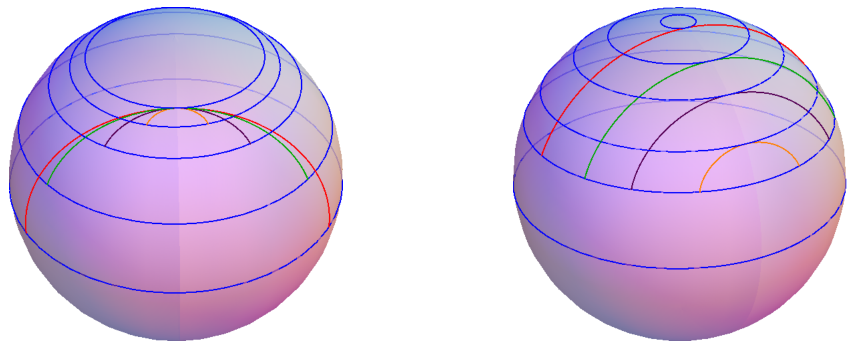


Figure 17: Plots of finite-size giant magnons with $\omega > 1$ (elementary region), for $v =$ const. (left) and $\omega =$ const. (right).

$$-v\omega\,\mathbb{F}\left(\arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\sqrt{1-\frac{z^2}{z_{\max}^2}}\right],\eta\right)\Bigg\} + \left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\cdot p\,, \quad z_{\min}\leq z\leq z_{\max}, \quad (9.14)$$

where $\lfloor y \rfloor$ is the floor function of y. In figure 17 we have drawn various snapshots of elementary giant magnons, by plotting (9.14) upon a sphere for various values of the velocities v and ω, and for $-r \leq \sigma \leq r$, $\tau = 0$. With Mathematica we may also animate the elementary giant magnon and verify that it performs a worm-like movement around the 2-sphere, as described by Arutyunov, Frolov and Zamaklar in [129]. The elementary giant magnon corresponds to a single-spin helical string of type (i), according to the terminology of Okamura and Suzuki [130].

By solving the equation (9.6), we obtain the following Pohlmeyer reduction of finite-size giant magnons in the elementary region:

$$\psi\left(\tau,\sigma\right) = \frac{\pi}{2} + \mathrm{am}\left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\omega\,\eta\,\sqrt{1-v^2}},\eta\right). \quad (9.15)$$

This solution describes a quasi-periodic series of sine-Gordon kinks that is also known as kink chain/train (see also [131]). The period of the kink chain/train is given by

$$\psi\left(\tau,\sigma\right) = \psi\left(\sigma + L,\tau\right) + n\pi\,, \quad L = 2\sqrt{\eta\left(1-v^2\omega^2\right)}\cdot\mathbb{K}\left(\eta\right)\,, \quad n = 0,\pm1,\pm2,\ldots \quad (9.16)$$

Since each period of the kink train contains exactly one soliton (a kink), the parameter region $0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$ has been dubbed "elementary" by Klose and McLoughlin in [131]. The 2-d plot of (9.15) for $v = 0.1$ and $\omega = 1.01$, in terms of the worldsheet variables σ and τ can be found in the leftmost graph of figure 22. The stability properties of the sine-Gordon solution (9.15) have been studied in [132], according to which (9.15) corresponds to a linearly stable subluminal rotational wave (with $v \cdot \omega < 1$).

9.2 Giant Magnon: Doubled Region, $0 \leq |v| \leq 1 \leq 1/\omega$

In this case the open string is an arc on the 2-sphere that touches the equator and is bound above by the parallel ζ_v:

$$\zeta_\omega^2 = -z_{\min}^2 \leq 0 \leq z^2 \leq z_{\max}^2 = \zeta_v^2 \leq R^2. \quad (9.17)$$

In the doubled region, the finite-size giant magnon's conserved momentum/angular extent is found to be

$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \int_{-r}^{+r}\varphi'\,d\sigma = \frac{2\omega}{\sqrt{1-v^2\omega^2}}\left[\frac{1}{v\omega}\,\mathbf{\Pi}\left(1-\frac{1}{v^2};\frac{1}{\eta}\right) - v\omega\,\mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right)\right], \quad (9.18)$$

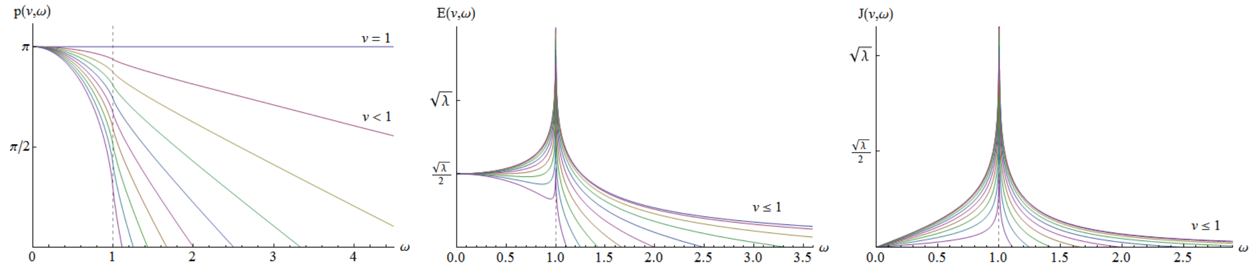


Figure 18: Momentum, energy, spin of finite-size giant magnons in terms of the angular velocity ω.

where

$$\eta \equiv 1 + \frac{z_{\text{min}}^2}{z_{\text{max}}^2} = \frac{1 - v^2\omega^2}{\omega^2\left(1 - v^2\right)} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{\eta + v^2\left(1 - \eta\right)}}. \tag{9.19}$$

The conserved energy and angular momentum of the giant magnon in the doubled region are given by:

$$E = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\int_{-r}^{+r} \dot{t}\, d\sigma = \frac{r\sqrt{\lambda}}{\pi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\cdot\sqrt{1 - v^2\omega^2}\,\mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right), \quad r = \sqrt{1 - v^2\omega^2}\,\mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right) \tag{9.20}$$

$$J = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi R^2}\int_{-r}^{+r}\left(R^2 - z^2\right)\dot{\phi}\, d\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{1 - v^2\omega^2}}{\omega}\left[\mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right) - \mathbb{E}\left(\frac{1}{\eta}\right)\right]. \tag{9.21}$$

In the doubled region, the Virasoro constraints (9.4)–(9.5) have the following solution:

$$z\left(\tau, \sigma\right) = R\sqrt{1 - v^2}\cdot \text{cn}\left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\sqrt{1 - v^2\omega^2}}, \frac{1}{\eta}\right), \quad 2\,n\cdot r \leq \sigma - v\omega\tau \leq 2\left(n + 1\right)\cdot r \tag{9.22}$$

$$\varphi\left(z\right) = \frac{\left(-1\right)^n\omega}{\sqrt{1 - v^2\omega^2}}\left\{\frac{1}{v\omega}\,\mathbf{\Pi}\left(1 - \frac{1}{v^2}, \arccos\left[\frac{z}{z_{\text{max}}}\right]\Bigg|\,\frac{1}{\eta}\right) - \right.$$
$$\left. -v\omega\,\mathbb{F}\left(\arccos\left[\frac{z}{z_{\text{max}}}\right], \frac{1}{\eta}\right)\right\} + 2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\cdot p\,, \quad -z_{\text{max}} \leq z \leq z_{\text{max}}. \tag{9.23}$$

The HM giant magnon (8.27)–(8.28) can be retrieved from (9.22)–(9.23) in the limit $\omega = 1$. The circular GKP string in $\mathbb{R}\times\text{S}^2$ that we studied in §6.2 is formed by two doubled giant magnons with velocities $v = 0$, maximum momentum $p = \pi$ and angular momenta $J/2$. Drawings of the doubled region giant magnons, for various values of their velocities v and ω can be found in figure 19. The motion of giant magnons in the doubled region is a combination of rotation and translation: the GM is initially tangent to the parallel $z = z_{\text{max}}$ of the northern hemisphere, then it starts gradually moving towards the parallel $z = -z_{\text{max}}$ of the southern hemisphere, before it moves again towards its initial position. Then the motion repeats. Doubled region giant magnons have also been classified by Okamura and Suzuki [130] as single-spin helical strings of type (ii). Figure 18 contains the plots of the momentum, the energy and the spin of both the elementary ($\omega \geq 1$) and the doubled ($\omega \leq 1$) giant magnons in terms of their angular velocities ω and various values of their linear velocities v.

The Pohlmeyer reduction (9.6) of the $\mathbb{R}\times\text{S}^2$ string (9.22)–(9.23) is a periodic series of sine-Gordon

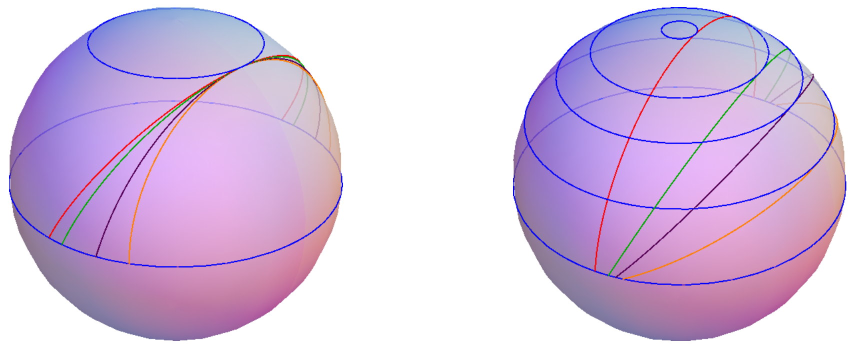


Figure 19: Plots of finite-size giant magnons with $\omega < 1$ (doubled region), for $v =$ const. (left) and $\omega =$ const. (right).

kinks and antikinks that is known as kink-antikink chain/train:

$$\psi\left(\tau,\sigma\right) = \arccos\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\,\text{sn}\left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\sqrt{1-v^2\omega^2}},\frac{1}{\eta}\right)\right]. \tag{9.24}$$

(9.24) has been plotted in the second graph of figure 22 for $v = 0.4$ and $\omega = 0.3$. The half-period of the kink-antikink train is

$$\psi\left(\tau,\sigma\right) = -\psi\left(\sigma + L,\tau\right) + n\pi\,, \quad L = 2\sqrt{1-v^2\omega^2}\cdot\mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right)\,, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{9.25}$$

Each period L of the kink-antikink train contains exactly two solitons (one kink and one antikink), that is the reason that the parameter region $0 \leq |v| \leq 1 \leq 1/\omega$ has been called "doubled" by Klose and McLoughlin in [131], convention that we also follow here. According to [132], the sG solution (9.24) is a spectrally unstable subluminal $(v \cdot \omega < 1)$ librational wave.

9.3 Single Spike: Elementary Region, $0 \leq 1/\omega < |v| \leq 1$

In this case the string extends between the parallels ζ_v and ζ_ω, but it is multiply wound around the 2-sphere and it has a spike instead of being arc-shaped:

$$0 \leq \zeta_v^2 = z_{\text{min}}^2 \leq z^2 \leq z_{\text{max}}^2 = \zeta_\omega^2 \leq R^2. \tag{9.26}$$

The conserved momentum of the finite-size single spike in its elementary region is found to be:

$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \int_{-r}^{+r} \varphi'\, d\sigma = \frac{2v\omega}{\sqrt{1-1/\omega^2}}\Big[\mathbb{K}\left(\eta\right) - \mathbf{\Pi}\left(1-v^2\omega^2;\eta\right)\Big], \tag{9.27}$$

where

$$\eta \equiv 1 - \frac{z_{\text{min}}^2}{z_{\text{max}}^2} = \frac{v^2\omega^2 - 1}{\omega^2 - 1} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{1-\eta}{v^2-\eta}}. \tag{9.28}$$

The conserved charges of energy and angular momentum of single spikes in their elementary region are:

$$E = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\int_{-r}^{+r} \dot{t}\, d\sigma = \frac{r\sqrt{\lambda}}{\pi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\cdot\frac{v^2\omega^2-1}{\sqrt{\omega^2-1}}\,\mathbb{K}\left(\eta\right)\,, \quad r = \frac{v^2\omega^2-1}{\sqrt{\omega^2-1}}\,\mathbb{K}\left(\eta\right) \tag{9.29}$$

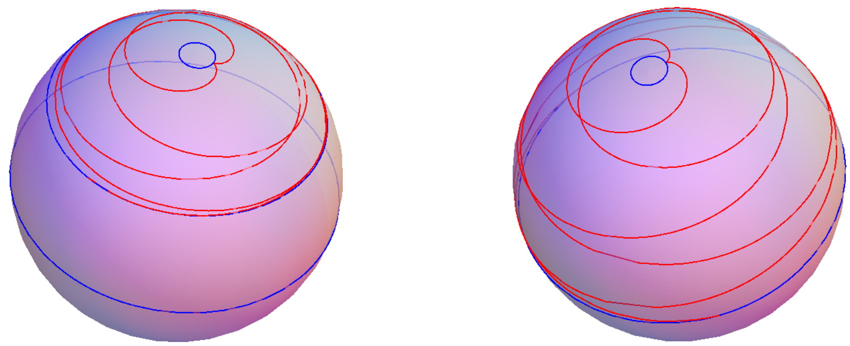


Figure 20: Plots of finite-size single spikes ($v \cdot \omega > 1$) in the elementary (left) and the doubled region (right).

$$J = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi R^2} \int_{-r}^{+r} \left(R^2 - z^2\right) \dot{\phi}\, d\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2}} \left[\mathbb{E}\left(\eta\right) - \frac{1 - v^2}{1 - 1/\omega^2}\, \mathbb{K}\left(\eta\right)\right]. \tag{9.30}$$

The constraint equations (9.4)–(9.5) admit the following solutions:

$$z\left(\tau, \sigma\right) = R\sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2}} \cdot \mathrm{dn}\left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\eta\sqrt{\omega^2 - 1}}, \eta\right) \tag{9.31}$$

$$\begin{aligned} \varphi\left(z\right) = & \frac{\left(-1\right)^n\, v\omega}{\sqrt{1 - 1/\omega^2}} \Bigg\{ \mathbb{F}\Bigg(\arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\sqrt{1 - \frac{z^2}{z_{\text{max}}^2}}\right], \eta\Bigg) - \\ & - \mathbf{\Pi}\Bigg(1 - v^2\omega^2, \arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\sqrt{1 - \frac{z^2}{z_{\text{max}}^2}}\right] \Bigg| \eta\Bigg)\Bigg\} + \left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor \cdot p\,, \quad z_{\text{min}} \leq z \leq z_{\text{max}}. \end{aligned} \tag{9.32}$$

By plotting the equation (9.32) upon a sphere with Mathematica, we may obtain drawings of elementary region single spikes—e.g. the one on the left of figure 20. The motion of elementary region single spikes is very reminiscent of the motion of elementary region giant magnons that has been described in §9.1. As we have already mentioned, for $v = 1$ our finite-momentum/winding solution approaches the infinite-size single spike that we've studied in §8.2.

The Pohlmeyer reduction of the solution (9.31)–(9.32) is given by the following wavefunction:

$$\psi\left(\tau, \sigma\right) = \mathrm{am}\left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\eta\sqrt{\omega^2 - 1}}, \eta\right). \tag{9.33}$$

Once more, (9.33) is a kink chain/train, very similar to the kink chain/train (9.15) that corresponds to the Pohlmeyer reduction of giant magnons. The chain contains exactly one kink per period, that is why we call this parameter region "elementary". (9.33) has been plotted for $v = 0.9$ and $\omega = 2$ in figure 22. The period of the kink train (9.33) is

$$\psi\left(\tau, \sigma\right) = \psi\left(\sigma + L, \tau\right) + n\pi\,, \quad L = 2\sqrt{\eta\left(v^2\omega^2 - 1\right)} \cdot \mathbb{K}\left(\eta\right)\,, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{9.34}$$

According to [132], (9.33) corresponds to a spectrally unstable superluminal ($v \cdot \omega > 1$) rotational wave .

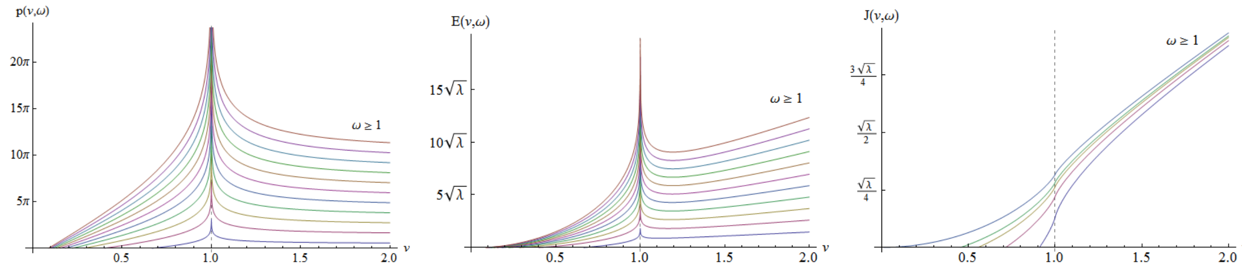


Figure 21: Momentum, energy, spin of finite-size single spikes in terms of the linear velocity v.

9.4 Single Spike: Doubled Region, $0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$

For $0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$, the solution (9.2) describes a spiky open string that is multiply wound around the 2-sphere and extends between the equator and the parallel ζ_ω:

$$\zeta_v^2 = -z_{\text{min}}^2 \leq 0 \leq z^2 \leq z_{\text{max}}^2 = \zeta_\omega^2 \leq R^2. \tag{9.35}$$

The conserved momentum of the single spike in the doubled region is:

$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \int_{-r}^{+r} \varphi' \, d\sigma = \frac{2v\omega^2}{\sqrt{v^2\omega^2 - 1}} \left[\mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right) - \mathbf{\Pi}\left(1 - \omega^2; \frac{1}{\eta}\right)\right], \tag{9.36}$$

where

$$\eta \equiv 1 + \frac{z_{\text{min}}^2}{z_{\text{max}}^2} = \frac{v^2\omega^2 - 1}{\omega^2 - 1} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{1-\eta}{v^2 - \eta}}. \tag{9.37}$$

The conserved energy and angular momentum of doubled region single spikes are:

$$E = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-r}^{+r} \dot{t} \, d\sigma = \frac{r\sqrt{\lambda}}{\pi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \sqrt{v^2\omega^2 - 1} \, \mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right), \quad r = \sqrt{v^2\omega^2 - 1} \, \mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right) \tag{9.38}$$

$$J = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi R^2} \int_{-r}^{+r} \left(R^2 - z^2\right) \dot{\phi} \, d\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{v^2\omega^2 - 1}}{\omega} \, \mathbb{E}\left(\frac{1}{\eta}\right), \tag{9.39}$$

In this case, the Virasoro constraints (9.4)–(9.5) are solved by:

$$z\left(\tau, \sigma\right) = R\sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2}} \cdot \text{cn}\left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\sqrt{v^2\omega^2 - 1}}, \frac{1}{\eta}\right) \tag{9.40}$$

$$\varphi\left(z\right) = \frac{(-1)^n \, v\omega^2}{\sqrt{v^2\omega^2 - 1}} \left\{\mathbb{F}\left(\arccos\left[\frac{z}{z_{\text{max}}}\right], \frac{1}{\eta}\right) - \mathbf{\Pi}\left(1 - \omega^2, \arccos\left[\frac{z}{z_{\text{max}}}\right] \Big| \frac{1}{\eta}\right)\right\} + 2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor \cdot p,$$
$$-z_{\text{max}} \leq z \leq z_{\text{max}}. \tag{9.41}$$

See the right drawing of figure 20 for a plot of the doubled region single spike. The string starts

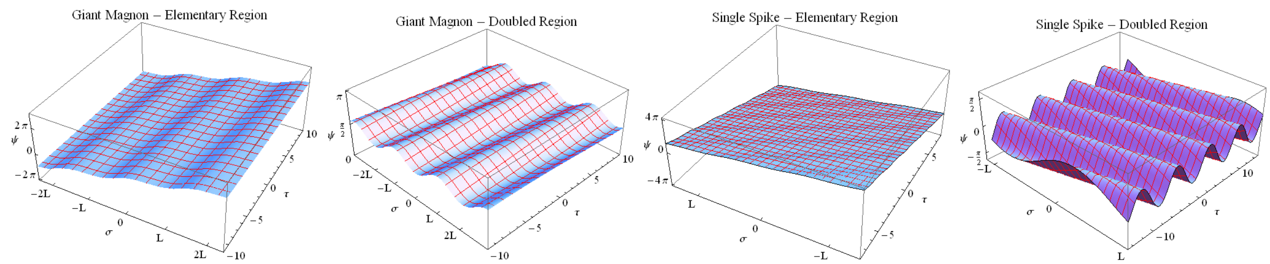


Figure 22: Pohlmeyer reductions of giant magnons and single spikes. The Pohlmeyer reduction of elementary giant magnons (9.15) (first plot) is plotted for $v = 0.1$ and $\omega = 1.01$. The wavefunction (9.24) of doubled giant magnons (second plot) is plotted for $v = 0.4$ and $\omega = 0.3$. The Pohlmeyer reduction of elementary single spikes (9.33) (third plot) has $v = 0.9$ and $\omega = 2$. The sG wavefunction of doubled single spikes (9.42) (fourth plot) has $v = 1.4$ and $\omega = 3$.

unwinding from the north pole and gradually winds around the south pole. Then the motion is reversed and repeated. For $v = 1$ our finite-momentum/winding solution (9.40)–(9.41) approaches the infinite-momentum/winding single spike (8.40)–(8.41) that was studied in §8.2. The plots of the momentum, the energy and the spin of both the elementary ($v \leq 1$) and the doubled region ($v \geq 1$) single spikes as functions of their linear velocities v and for various values of their angular velocities ω, can be found in figure 21.

The Pohlmeyer reduction is again a kink-antikink chain/train, similar to the kink-antikink train of doubled region giant magnons (9.24):

$$\psi\left(\tau,\sigma\right) = \arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\,\mathrm{sn}\left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\sqrt{v^2\omega^2-1}},\frac{1}{\eta}\right)\right]. \tag{9.42}$$

Each period of the train (9.42) contains exactly two solitons, that is why the parameter region $0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$ is called "doubled", in accordance with what has been said before. The quasi-periodic solution of the sG equation (9.42) has been plotted for $v = 1.4$ and $\omega = 3$ in figure 22. The half-period of the kink-antikink chain is:

$$\psi\left(\tau,\sigma\right) = -\psi\left(\sigma + L,\tau\right) + n\pi\,, \quad L = 2\sqrt{v^2\omega^2-1}\cdot\mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right), \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{9.43}$$

(9.42) corresponds to a (spectrally) unstable superluminal ($v \cdot \omega > 1$) librational waves [132].

9.5 Symmetries

Before closing this section and pass to the computation of the dispersion relations of giant magnons and single spikes, let us say a few things about symmetries. The $\tau \leftrightarrow \sigma$ symmetry or "2D duality" (8.45) that was used to transform between giant magnons and single spikes of infinite size, is also applicable at finite-size:

$$\tau \leftrightarrow \sigma\,,\; v \leftrightarrow \frac{1}{\omega}\,,\; \psi \leftrightarrow \left[\frac{\pi}{2} - \psi\right] \quad \Leftrightarrow \quad \text{Giant Magnons} \leftrightarrow \text{Single Spikes.} \tag{9.44}$$

(9.44) maps elementary region giant magnons to elementary region single spikes and doubled region giant magnons to doubled region single spikes. The 2D duality (9.44) acts on the ansätze (with the exception of the temporal coordinate $t = \tau$ which is unaffected), the parameter regions of velocities v and ω, the solutions (z and ϕ) and the Pohlmeyer reductions ψ of GMs and SSs. The conserved charges p, J, E are not correctly transformed by the $\tau \leftrightarrow \sigma$ transform.

There exists a second transformation between the various parameter regions of giant magnons and single spikes (summarized in table 1) that is worth discussing. The substitution $\eta \leftrightarrow -\eta$ can be used to relate the elementary regions of giant magnons and single spikes, firstly by transforming between the solution and the Pohlmeyer reduction z, φ, ψ of elementary GMs and SSs and secondly by flipping the signs of the corresponding conserved charges p, J, E.

The elementary regions of giant magnons and single spikes can also be related to the respective doubled regions by the transformation $\eta \leftrightarrow 1/\eta$. Again, while the solutions z, φ, ψ are taken from the elementary to the doubled region of giant magnons or single spikes, the corresponding conserved charges p, J, E are not transformed correctly under this transformation. On the other hand, it is not known how to relate the doubled regions of giant magnons and single spikes by a similar transformation. None of the transformations that we have discussed is known to affect the dispersion relations of giant magnons and single spikes that we are going to study below.

10 Dispersion Relations of Giant Magnons and Single Spikes

In this section we are going to study the classical dispersion relations of finite-size giant magnons and single spikes in both their elementary and doubled regions. Giant magnons are the AdS/CFT duals of 1-magnon operators that appear in the $\mathfrak{su}(2)$ sector of $\mathcal{N} = 4$ SYM. They are bosonic single spin open strings that rotate in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2 \subset \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$, the classical energy of which is equal to the scaling dimensions of 1-magnon operators of $\mathcal{N} = 4$ SYM theory at strong coupling. The S-matrix of giant magnons (as computed from their Pohlmeyer reduction) agrees with the magnon S-matrix at strong coupling (given by the AFS phase), allowing us to identify them as their AdS/CFT duals.

As we have already explained, magnons and giant magnons cannot be part of the AdS/CFT spectrum. The former have non-vanishing momentum that violates the cyclicity of the trace condition and the latter are open strings which cannot belong to a type IIB string theory. However (giant) magnons are an indispensable tool in the study of the AdS/CFT spectrum because they are the fundamental building blocks out of which all the states in the theory may be built. This is in complete analogy with the sine-Gordon equation, where it is known that all of its solutions can be built out of only a small number of fundamental excitations. As a matter of fact, the solitons of the sine-Gordon equation are the Pohlmeyer duals of giant magnons.

The reason we are forced to study the dispersion relation of giant magnons is that the corresponding gauge theory prescription is valid only asymptotically. Indeed, the asymptotic Bethe ansatz (ABA) that we have seen in §4.3.2 ceases to hold when the loop order becomes equal to the length of the operator under study. For infinite system sizes the ABA stays alive and kicking up to infinite loops, i.e. all the way up to strong coupling where the string description takes over. We will see below that all the evidence that we have from the string theory side agrees with the ABA at infinite size. Beyond the critical loop order at finite size we must calculate wrapping corrections to the magnon anomalous dimensions from the weakly coupled gauge theory side, and classical or quantum (that is α' or curvature) corrections from the string theory side where the gauge theory coupling is strong.

Correcting the spectrum from either side of AdS/CFT moves us towards the other side, i.e. by including gauge theory corrections to the operator scaling dimensions we approach the string theory result and by adding α' (or loop) corrections to the string energies we approach the gauge theory result. In other words tree level gauge theory is equivalent to considering infinite string theory loops, and tree level string theory corresponds to infinite gauge theory loops. The two descriptions ought to meet somewhere in the middle of the AdS/CFT spectrum.

Based on what we have said above, for operators that have large yet not infinite sizes $J \to \infty$, the ABA will only start receiving wrapping corrections after the large but finite critical loop-order $L \sim J \to \infty$. But then the coupling will almost be strong and the string theory description will be just above the tree or classical level. This is precisely the regime that interests us at finite-size. It should be clear that since string theory is just above the tree level and gauge theory well-above the critical loop order, wrapping corrections will generally be present in the string theory spectrum, even at the classical level. These classical and quantum corrections to the ABA (8.3) are known as finite-size corrections and as we will see, they have the form of exponentially suppressed terms.

In our treatment, single spikes are viewed as an analytic continuation of giant magnons. Single spikes are single spin strings in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ that wind many times around the 2-sphere and have a spike in their center. As we have seen in section (9.5), single spikes can be simply obtained from giant magnons by a $\sigma \leftrightarrow \tau$ transform and the transformation $\eta \leftrightarrow -\eta$. The dispersion relations of giant magnons and single spikes can also be related by an appropriate change of variables. Generally speaking, it is to be expected that what we have said above for giant magnons should also be applicable to single spikes as well.

Before we begin our investigation of the giant magnon/single spike dispersion relation, let us briefly restate our arguments about why we think that the explicit calculation of the planar AdS/CFT spectrum is interesting. First and foremost, it seems to us that the scope of AdS/CFT becomes very limited if we do not know how to compute its full spectrum. Secondly, in most cases where we can explicitly calculate the AdS/CFT spectrum we may also thoroughly and unambiguously verify its matching on the two sides of the correspondence. Matching the spectra means that we can also complete the dictionary of AdS/CFT by mapping each and every operator of the planar $\mathcal{N}=4$ SYM to its dual free string state in $\text{AdS}_5\times\text{S}^5$. Thirdly, with the full analytic spectrum of AdS/CFT at our disposal, it is very intriguing to search for closed-form expressions at weak and strong coupling.

As in the case of GKP strings, the method for computing the AdS/CFT spectrum in the case of giant magnons and single spikes does not depend on integrability. Besides, we are focused on a regime where integrability-based methods (e.g. the thermodynamic Bethe ansatz (TBA), the Y-system or the quantum spectral curve) have not yet managed to produce any spectacular results. All the computations of the paper [2] that we are going to review below have not been obtained before with any other method, neither are they derivable by means of a computer. Developing a spectral method that does not take into account integrability has the disadvantage of possibly being more complicated than needed since it ignores a very important simplifying assumption (namely that the system is integrable) but it also has the advantage of being applicable whenever integrability itself becomes more involved than needed or it is simply absent (e.g. in non-planar AdS/CFT, QCD, p-branes). We are therefore offered the chance to compute spectra in more generic frameworks. We shall also see that we can make a lot of progress towards finding closed formulas in the AdS/CFT spectrum.

Consider once again the $M=1$ magnon states of $\mathcal{N}=4$ SYM:

$$\mathcal{O}_M=\sum_{m=1}^{J+1}e^{imp}\left|\mathcal{Z}^{m-1}\mathcal{X}\mathcal{Z}^{J-m+1}\right\rangle,\quad p\in\mathbb{R},\quad \lambda,\mathcal{J}\to\infty. \tag{10.1}$$

The general form of the dispersion relation of finite-size magnon states (10.1) at strong coupling, or equivalently finite-size giant magnons is:

$$\epsilon\left(p\right)=\epsilon_\infty+\underbrace{\sqrt{\lambda}\,\delta\epsilon_{\text{cl}}+\delta\epsilon_{\text{1-loop}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\delta\epsilon_{\text{2-loop}}+\ldots,}_{\text{finite-size corrections}}\qquad J,\lambda\to\infty, \tag{10.2}$$

where $\epsilon\left(p\right)\equiv E-J$ and ϵ_∞ is the all-loop 1-magnon formula of BDS (8.3):

$$\lim_{J\to\infty}\epsilon\left(p\right)=\epsilon_\infty\equiv\sqrt{1+\frac{\lambda}{\pi^2}\sin^2\frac{p}{2}}=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\sin\frac{p}{2}+0+\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\csc\frac{p}{2}-\frac{\pi^3}{8\lambda^{3/2}}\csc^3\frac{p}{2}+\ldots,\quad\lambda\to\infty \tag{10.3}$$

At finite-size, ϵ_∞ receives classical and quantum corrections $\delta\epsilon_{\text{cl}}$ and $\delta\epsilon_{n\text{-loop}}$. By generalizing the Hofman-Maldacena ansatz (8.23) to finite-size, Arutyunov, Frolov and Zamaklar (AFZ) [129] derived the first few terms of the classical finite-size expansion $\delta\epsilon_{\text{cl}}$:

$$\delta\epsilon_{\text{cl}}=-\frac{4}{\pi}\sin\frac{p}{2}\left\{\sin^2\frac{p}{2}\,e^{-\mathcal{L}}+\left[8\mathcal{J}^2\cos^2\frac{p}{2}+4\sin\frac{p}{2}\left(3\cos p+2\right)\mathcal{J}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sin^2\frac{p}{2}\left(6\cos p+7\right)\right]e^{-2\mathcal{L}}+\ldots\right\},\quad\mathcal{J}\equiv\frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}},\quad\mathcal{L}\equiv2\mathcal{J}\csc\frac{p}{2}+2. \tag{10.4}$$

It has been proven by Astolfi, Forini, Grignani and Semenoff in [133] that the spectrum of finite-size giant magnons in the uniform light-cone gauge is completely independent of the gauge parameter. Many more terms in (10.4) can be computed with Mathematica—see appendixes F.3–G.2. The general structure of the classical finite-size corrections $\delta\epsilon_{\text{cl}}$ is the following:

$$\delta\epsilon_{\text{cl}}= \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{2n-2}\mathcal{A}_{nm}(p)\,\mathcal{J}^{2n-m-2}e^{-2n\left(\mathcal{J}\csc\frac{p}{2}+1\right)} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{J}^{-m-2}\left\{\sum_{n=\lfloor\frac{m}{2}+1\rfloor}^{\infty}\mathcal{A}_{nm}(p)\,\mathcal{J}^{2n}e^{-2n\left(\mathcal{J}\csc\frac{p}{2}+1\right)}\right\}, \tag{10.5}$$

where all the coefficients of the negative powers of $\mathcal{J}$ are zero (e.g. $\mathcal{A}_{11}=\mathcal{A}_{12}=\ldots=0$, etc.). The AFZ formula (10.4) contains the terms $\mathcal{A}_{10}$, $\mathcal{A}_{20}$, $\mathcal{A}_{21}$, $\mathcal{A}_{22}$ of (10.5). Klose and McLoughlin [131] have obtained the terms $\mathcal{A}_{10}$–$\mathcal{A}_{60}$:

$$\delta\epsilon_{\text{cl}} = -\frac{4}{\pi}\sin^3\frac{p}{2}\,e^{-\mathcal{L}}\Big[1+2\,\mathcal{L}^2\cos^2\frac{p}{2}\,e^{-\mathcal{L}}+8\,\mathcal{L}^4\cos^4\frac{p}{2}\,e^{-2\mathcal{L}}+\frac{128}{3}\mathcal{L}^6\cos^6\frac{p}{2}\,e^{-3\mathcal{L}}+$$
$$+\frac{800}{3}\mathcal{L}^8\cos^8\frac{p}{2}\,e^{-4\mathcal{L}}+\frac{9216}{5}\mathcal{L}^{10}\cos^{10}\frac{p}{2}\,e^{-5\mathcal{L}}+\ldots\Big], \tag{10.6}$$

The leading term $\mathcal{A}_{10}$ of (10.4)–(10.5) has also been obtained by the algebraic curve method in [134] and by the Lüscher-Klassen-Melzer (LKM) formulae [135] at strong coupling in [136, 137, 138].

In [2] all the coefficients $\mathcal{A}_{n0}$, $\mathcal{A}_{n1}$, $\mathcal{A}_{n2}$ of (10.5) have been computed. In §10.1–§10.4 we are going to revisit this paper. Let us first summarize the result. To leading order, the classical part $\delta\epsilon_{\text{cl}}$ of the dispersion relation of giant magnons and the anomalous scaling dimensions of the operators (10.1) at strong coupling, in both their elementary and doubled regions can be expressed in terms of Lambert's W-function as follows:

$$\delta\epsilon_{\text{cl}} =\frac{1}{4\pi\mathcal{J}^2}\tan^2\frac{p}{2}\sin^3\frac{p}{2}\left[W+\frac{W^2}{2}\right]-\frac{1}{16\pi\mathcal{J}^3}\tan^4\frac{p}{2}\sin^2\frac{p}{2}\Big[(3\cos p+2)\,W^2+\frac{1}{6}(5\cos p+11)\,W^3\Big]$$
$$-\frac{1}{512\pi\mathcal{J}^4}\tan^6\frac{p}{2}\sin\frac{p}{2}\Big\{(7\cos p-3)^2\frac{W^2}{1+W}-\frac{1}{2}(25\cos 2p-188\cos p-13)\,W^2-\frac{1}{2}(47\cos 2p$$
$$+196\cos p-19)W^3-\frac{1}{3}(13\cos 2p+90\cos p+137)\,W^4\Big\}+\ldots, \tag{10.7}$$

where the argument of Lambert's W-function is $W\left(\pm 16\mathcal{J}^2\cot^2(p/2)\,e^{-\mathcal{L}}\right)$, in the principal branch and $\mathcal{L}\equiv 2\mathcal{J}\csc p/2+2$. The minus sign inside the argument of W refers to the elementary region of giant magnons ($0\le|v|<1/\omega\le 1$) and the plus sign is for the doubled region ($0\le|v|\le 1\le 1/\omega$). The leading, subleading and next-to-subleading coefficients of (10.5) ($\mathcal{A}_{n0}$, $\mathcal{A}_{n1}$, $\mathcal{A}_{n2}$) can be found if we expand Lambert's W-function in (10.7) around $\mathcal{J}\to\infty$, by using Taylor's expansion (I.3). The result is:

- leading terms: $\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_{n0}(p)\;\mathcal{J}^{2n-2}\,e^{-n\,\mathcal{L}} = \frac{1}{4\mathcal{J}^2}\tan^2\frac{p}{2}\sin^3\frac{p}{2}\left[W+\frac{W^2}{2}\right],$

- next-to-leading terms: $\sum_{n=2}^{\infty}\mathcal{A}_{n1}\left(p\right)\mathcal{J}^{2n-3}\,e^{-n\,\mathcal{L}} = -\frac{1}{16\mathcal{J}^3}\tan^4\frac{p}{2}\sin^2\frac{p}{2}\left[\left(3\cos p+2\right)W^2+\frac{1}{6}\left(5\cos p+11\right)W^3\right],$

- next-to-next-to-leading terms: $\sum_{n=2}^{\infty}\mathcal{A}_{n2}\left(p\right)\mathcal{J}^{2n-4}\,e^{-n\,\mathcal{L}} = -\frac{1}{512\mathcal{J}^4}\tan^6\frac{p}{2}\sin\frac{p}{2}\left\{\left(7\cos p-3\right)^2\frac{W^2}{1+W}-\right.$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(25\cos 2p-188\cos p-13\right)W^2-\frac{1}{2}\left(47\cos 2p+196\cos p-19\right)W^3-\frac{1}{3}\left(13\cos 2p+90\cos p+137\right)W^4\right\},$$

The coefficients $\mathcal{A}_{n0}$, $\mathcal{A}_{n1}$, $\mathcal{A}_{n2}$ agree completely with the AFZ results (10.4), the Klose-McLoughlin formula (10.6), as well as the formulae (G.12)–(G.13) that were computed with Mathematica.

From what we have said so far it should be clear that the ABA formula of BDS (10.3) is confirmed at strong coupling by the classical (tree) level formula of Hofman and Maldacena (8.6). By perturbing the IIB string sigma model in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$, it has been shown in [139] that the infinite-volume one-loop shift vanishes:

$$\delta\epsilon_{\text{1-loop}} = 0, \quad J = 0,\; \lambda\to\infty, \tag{10.8}$$

which also agrees with the BDS formula (10.3) at one-loop order. At finite volume, the calculation of α' corrections can be accomplished either via the algebraic curve method [138] or by computing the Lüscher F and μ-terms [137]. The general form of the one-loop shift at finite volume is:

$$\delta\epsilon_{\text{1-loop}} = a_{1,0}\,e^{-2D}+\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}a_{n,m}e^{-2nD-m\mathcal{L}}, \quad D\equiv\mathcal{J}+\sin\frac{p}{2}. \tag{10.9}$$

The calculation of the terms $a_{n,0}$ and $a_{1,m}$ of (10.9) proceeds along the lines of the papers [138, 140]. The leading term $a_{1,0}$ is given by:

$$a_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{D}}\frac{8\sin^2 p/4}{\left(\sin p/2-1\right)}\left[1-\frac{7+4\sin p-4\cos p+\sin p/2}{16\left(\sin p/2-1\right)}\cdot\frac{1}{D}+O\left(\frac{1}{D^2}\right)\right]. \tag{10.10}$$

The leading finite-size term in the dispersion relation of single spikes has been computed in [141]:

$$E-T\Delta\varphi = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\left[\frac{q}{2}+4\sin^2\frac{q}{2}\tan\frac{q}{2}\cdot e^{-(q+\Delta\varphi)\cdot\cot\frac{q}{2}}\right], \quad q\equiv 2\arcsin\left(\frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \Delta\phi,\lambda\to\infty. \tag{10.11}$$

In appendix G.2 many more terms of (10.11) have been computed with Mathematica. The code can be found in appendix F.3. The structure of the classical finite-size corrections of the single spike dispersion relation at finite volume is very similar to the one for giant magnons (10.5), however the roles of $\Delta\phi = p$ and $\mathcal{J}$ have been interchanged:

$$\mathcal{E}-\frac{p}{2}\bigg|_{\text{clas}} = \frac{q}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{2n-2}\hat{\mathcal{A}}_{nm}\left(q\right)p^{2n-m-2}e^{-n(q+p)\cot\frac{q}{2}}, \tag{10.12}$$

where again all the negative powers of the momentum p are absent from (10.12) (e.g. $\hat{\mathcal{A}}_{11} = \hat{\mathcal{A}}_{12} = \ldots = 0$, etc.). All the coefficients $\hat{\mathcal{A}}_{n0}$, $\hat{\mathcal{A}}_{n1}$, $\hat{\mathcal{A}}_{n2}$ of (10.12) have been computed in the reference [2].

We will review the paper [2] in §10.1–§10.4 below. For the moment let us first state the results for single spikes. The leading, subleading and next-to-subleading coefficients ($\hat{\mathcal{A}}_{n0}$, $\hat{\mathcal{A}}_{n1}$, $\hat{\mathcal{A}}_{n2}$) of (10.12), in the classical part of the dispersion relation of elementary single spikes ($0 \leq 1/\omega < |v| \leq 1$) can be expressed in terms of Lambert's W-function as follows:

- leading terms: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mathcal{A}}_{n0}(q)\, p^{2n-2}\, e^{-n\,\mathcal{R}} = -\frac{1}{p^2}\sin^4\frac{q}{2}\,\tan\frac{q}{2}\left[W + \frac{W^2}{2}\right].$

- next-to-leading terms: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \hat{\mathcal{A}}_{n1}(q)\, p^{2n-3}\, e^{-n\,\mathcal{R}} = \frac{1}{p^3}\sin^6\frac{q}{2}\left\{\left[\left(\sec^2\frac{q}{2} + 2q\csc q - \frac{1}{2}\right)\right]W^2 + \left[5 + 3\sec^2\frac{q}{2}\right]\frac{W^3}{6}\right\}.$

- next-to-next-to-leading terms: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \hat{\mathcal{A}}_{n2}(q)\, p^{2n-4}\, e^{-n\,\mathcal{R}} = \frac{1}{64\,p^4}\sin^4\frac{q}{2}\tan^3\frac{q}{2}\left\{2\left(5 + 7\cos q - 8q\cot\frac{q}{2}\right)^2\frac{W^2}{1+W} - \Big(96\cdot\right.$

$$\cdot q^2\cot^2\frac{q}{2} - 52q\csc^4\frac{q}{2}\sin^3 q + 45\cos 2q + 148\cos q + 79\Big)W^2 - \Big(16q\,(11 + 5\cos q)\cot\frac{q}{2} - 37\cos 2q - 172\cos q - 79\Big)W^3$$

$$\left. - \left(11\cos 2q + 64\cos q + 85\right)W^4\right\},$$

with the argument of Lambert's function equal to $W\left(4p^2\csc^2(q/2)\,e^{-\mathcal{R}}\right)$, in the principal branch W_0, $\mathcal{R} \equiv (p+q)\cot q/2$ and $\sin q/2 \equiv \mathcal{J}$. In the doubled region of single spikes ($0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$) the argument of Lambert's function becomes $W\left(-4p^2\csc^2(q/2)\,e^{-\mathcal{R}}\right)$, and the corresponding coefficients of the leading and the subleading series $\hat{\mathcal{A}}_{n0}$, $\hat{\mathcal{A}}_{n1}$ are the same as in the elementary region. The next-to-next-to-leading series $\hat{\mathcal{A}}_{n2}$ in the doubled region is given by:

- next-to-next-to-leading terms: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \hat{\mathcal{A}}_{n2}(q)\, p^{2n-4}\, e^{-n\,\mathcal{R}} = \frac{1}{64\,p^4}\sin^4\frac{q}{2}\tan^3\frac{q}{2}\left\{2\left(5 + 7\cos q - 8q\cot\frac{q}{2}\right)^2\frac{W^2}{1+W} - \Big(96\cdot\right.$

$$\cdot q^2\cot^2\frac{q}{2} - 52q\csc^4\frac{q}{2}\sin^3 q + 45\cos 2q + 276\cos q - 256\csc^2\frac{q}{2} + 463\Big)W^2 - \Big(16q(11 + 5\cos q)\cot\frac{q}{2} - 37\cos 2q -$$

$$\left. -172\cos q - 79\Big)W^3 - \left(11\cos 2q + 64\cos q + 85\right)W^4\right\}.$$

The terms in red are absent from the corresponding formula in the elementary region. The coefficients $\hat{\mathcal{A}}_{n0}$, $\hat{\mathcal{A}}_{n1}$, $\hat{\mathcal{A}}_{n2}$ can be computed with the Taylor expansion (I.3) of Lambert's W-function. They are in complete agreement with the Ahn-Bozhilov formula (10.11) and the results (G.14)–(G.15) of appendix G.2 that were computed with Mathematica.

Let us also overview the method by which the classical coefficients in the elementary and the doubled regions of giant magnons and single spikes are obtained. In contrast to GKP strings where our starting point was the 2×2 system of equations (7.16)–(7.17), in the case of giant magnons/single spikes we start with a 3×3 system:

$$\mathcal{E} = d\,(a, x)\ln x + h\,(a, x) \tag{10.13}$$

$$\mathcal{J} = c\,(a, x)\ln x + b\,(a, x) \tag{10.14}$$

$$p = f\,(a, x)\ln x + g\,(a, x)\,, \tag{10.15}$$

where for elementary giant magnons it's $x = 1 - \eta$, η is defined in equation (9.10) and $v \equiv \cos a$. $d\,(a, x)$, $h\,(a, x)$, $c\,(a, x)$, $b\,(a, x)$, $f\,(a, x)$, $g\,(a, x)$ are the coefficients of the series (9.11), (9.12) and (9.9), when these are expressed in terms of the variables x and a. The system (10.13)–(10.15) can be solved as follows. First the logarithm is eliminated from the equations (10.14)–(10.15), leading to an expression $p = p(\mathcal{J}, a, x)$ of the linear momentum in terms of the conserved angular momentum $\mathcal{J}$ and the parameters a and x. Then $p(\mathcal{J}, a, x)$ is expanded in a double series w.r.t. the variables a and x and it is inverted for $a = a(x, p, \mathcal{J})$. $a(x, p, \mathcal{J})$ is plugged into the equations (10.13)–(10.14) and a system like (7.16)–(7.17) is obtained:

$$\mathcal{E} = d(x, p, \mathcal{J}) \ln x + h(x, p, \mathcal{J}) \tag{10.16}$$

$$\mathcal{J} = c(x, p, \mathcal{J}) \ln x + b(x, p, \mathcal{J}). \tag{10.17}$$

The method of §7 may now be applied in order to eliminate the variable x from the system (10.16)–(10.17) and derive the giant magnon dispersion relation $\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{J} = \gamma(p, \mathcal{J})$ in terms of the momenta p and $\mathcal{J}$.

The algorithm is exactly the same for giant magnons in the doubled region, except that $\widetilde{x} = 1 - 1/\eta$ and η is defined from equation (9.19), while $d(a, \widetilde{x})$, $h(a, \widetilde{x})$, $c(a, \widetilde{x})$, $b(a, \widetilde{x})$, $f(a, \widetilde{x})$, $g(a, \widetilde{x})$ are taken from the series (9.20), (9.21) and (9.18).

To treat large-momentum single spikes we must set $a \equiv \arccos 1/\omega$ and eliminate the logarithm from the equations (10.14)–(10.15). This leads to an expression $\mathcal{J} = \mathcal{J}(a, x, p)$ for the angular momentum which is then inverted for $a = a(x, p, \mathcal{J})$ and inserted into the equations (10.13), (10.15). The resulting 2×2 system

$$\mathcal{E} = d(x, p, \mathcal{J}) \ln x + h(x, p, \mathcal{J}) \tag{10.18}$$

$$p = f(x, p, \mathcal{J}) \ln x + g(x, p, \mathcal{J}), \tag{10.19}$$

can be solved like the corresponding system for the GKP strings (7.16)–(7.17) in §7. For single spikes in the elementary region, $x = 1 - \eta$, where η is defined in equation (9.28) and $1/\omega \equiv \cos a$. The coefficients $d(a, x)$, $h(a, x)$, $c(a, x)$, $b(a, x)$, $f(a, x)$, $g(a, x)$ are defined from the series (9.29), (9.30) and (9.27). Single spikes in the doubled region have $\widetilde{x} = 1 - 1/\eta$ and η is defined in equation (9.37). The coefficients $d(a, \widetilde{x})$, $h(a, \widetilde{x})$, $c(a, \widetilde{x})$, $b(a, \widetilde{x})$, $f(a, \widetilde{x})$, $g(a, \widetilde{x})$ are defined from the series (9.38), (9.39) and (9.36).

This section is organized as follows. In §10.1 we are going to implement the above algorithm in the case of elementary giant magnons ($0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$) and in §10.2 it shall be applied to the doubled giant magnons ($0 \leq |v| \leq 1 \leq 1/\omega$). In §10.3–§10.4, the elementary ($0 \leq 1/\omega < |v| \leq 1$) and the doubled ($0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$) single spikes will be studied.

10.1 Giant Magnon, Elementary Region: $0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$

Let us begin with the elementary giant magnons for which,

$$0 \leq |v| \leq 1/\omega \leq 1. \tag{10.20}$$

As we have said, the elementary region giant magnons are arc-shaped open strings in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ that extend between the parallels ζ_ω and ζ_v:

$$0 \leq R^2 \left[1 - \frac{1}{\omega^2}\right] \equiv \zeta_\omega = z_{\text{min}}^2 \leq z^2 \leq z_{\text{max}}^2 = \zeta_v \equiv R^2 \left(1 - v^2\right) \leq R^2. \tag{10.21}$$

If we define the variable x as

$$x \equiv 1 - \eta = \frac{z_{\text{min}}^2}{z_{\text{max}}^2} = \frac{\omega^2 - 1}{\omega^2 (1 - v^2)}, \tag{10.22}$$

the following system of equations is obtained:

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-x(1-v^2)}}\,(1-x)\cdot\mathbb{K}(1-x) \tag{10.23}$$

$$\mathcal{J} \equiv \frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{1-v^2}\,\big(\mathbb{K}(1-x)-\mathbb{E}(1-x)\big) \tag{10.24}$$

$$\gamma = \mathcal{E}-\mathcal{J} = \sqrt{1-v^2}\,\left\{\mathbb{E}(1-x)-\left(1-\frac{1-x}{\sqrt{1-x(1-v^2)}}\right)\mathbb{K}(1-x)\right\} \tag{10.25}$$

$$p = \frac{1}{v}\frac{1}{\sqrt{1-x(1-v^2)}\cdot\mathbb{K}(x)}\left\{\pi v\sqrt{1-x(1-v^2)}\cdot\mathbb{F}\left(\arcsin\sqrt{1-v^2},x\right)+2(1-x)\sqrt{1-v^2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\mathbb{K}(x)-\mathbf{\Pi}\left(\frac{x\,v^2}{1-x(1-v^2)};x\right)\right]\cdot\mathbb{K}(1-x)\right\}. \tag{10.26}$$

(10.26) is derived from the momentum of giant magnons (9.9) and the addition formula (H.14) of the complete elliptic integrals of the third kind. Let us now see how the algorithm that we described in the previous section can be used in order to obtain the dispersion relation of elementary giant magnons $\mathcal{E} = \mathcal{E}(p,\mathcal{J})$, for large but finite angular momentum $J\to\infty$ and $x\to 0^+$.

10.1.1 Inverse Momentum

We first have to express the velocity v of giant magnons in terms of the momenta p and $\mathcal{J}$. The formulas (10.23)–(10.26) have a logarithmic singularity at $x\to 0^+$ which they inherit from the following two elliptic functions:

$$\mathbb{K}(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,(d_n\ln x + h_n) \tag{10.27}$$

$$\mathbb{K}(1-x)-\mathbb{E}(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,(c_n\ln x + b_n)\,. \tag{10.28}$$

The coefficients of the series (10.27) and (10.28) are the following:

$$d_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2, \qquad h_n = -4\,d_n\cdot(\ln 2 + H_n - H_{2n})$$

$$c_n = -\frac{d_n}{2n-1}\,, \qquad b_n = -4\,c_n\cdot\left[\ln 2 + H_n - H_{2n} + \frac{1}{2(2n-1)}\right], \tag{10.29}$$

where $n = 0\,,1\,,2\,,\ldots$ Eliminating the logarithms from the equations (10.24), (10.26), we are led to

$$p = \frac{\pi\cdot\mathbb{F}(a,x)}{\mathbb{K}(x)} + \frac{2(1-x)\tan a}{\mathbb{K}(x)\sqrt{1-x\sin^2 a}}\cdot\left[\mathbb{K}(x)-\mathbf{\Pi}\left(\frac{x\cos^2 a}{1-x\sin^2 a};x\right)\right]\cdot\left\{\sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}\cdot\right.$$

$$\cdot \left(\mathcal{J} \csc a - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \Bigg\}, \quad (10.30)$$

where $v = \cos a$ ($\arccos 1/\omega \leq a \leq \pi/2$). The equation (10.30), that gives $p = p(\mathcal{J}, a, x)$, can be expanded in a double series around $x = 0$ and $a = p/2$ and then it can be inverted for the variable a with Mathematica. See appendix G.2, equation (G.10). Then we may plug $a(x, p, \mathcal{J})$ into the equations (10.24)–(10.25) and apply the method that we used in the case of GKP strings in order to invert the equation (10.24) by computing the inverse spin function $x = x(p, \mathcal{J})$. If we insert the $x(p, \mathcal{J})$ that we found into the anomalous dimensions formula (10.25), we will obtain the dispersion relation of elementary giant magnons in terms of the W-function.

10.1.2 Inverse Spin Function

As we have said, the velocity $v = \cos a(x, p, \mathcal{J})$ that we have found in the previous subsection must be inserted into the equation (10.24) that gives the spin of the GM and the resulting angular momentum series $\mathcal{J} = \mathcal{J}(x, p)$ must be inverted for the inverse spin function $x = x(p, \mathcal{J})$. Then by plugging $x(p, \mathcal{J})$ into $\gamma = \gamma(x, p)$ that is given by equation (10.25), we find $\gamma = \gamma(p, \mathcal{J})$. Let us first solve the equation (10.24) for $\ln x$:

$$\mathcal{J} = \sin a(x, p, \mathcal{J}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Big(c_n \ln x + b_n \Big) \Rightarrow \ln x = \left[\frac{\mathcal{J} \csc a - b_0}{c_0} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{c_0} x^n \right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{c_0} x^k \right)^n . \quad (10.31)$$

(10.31) may be written as a series of the following form (cf. (7.21)–(7.72)):

$$x = x_0 \cdot \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n \, x^n \right] = x_0 \cdot \exp\left(\mathrm{a}_1 \, x + \mathrm{a}_2 \, x^2 + \mathrm{a}_3 \, x^3 + \ldots \right), \quad (10.32)$$

where the coefficients $\mathrm{a}_n = \mathrm{a}_n(p, \mathcal{J})$ can be computed from (10.31). We have also defined:

$$x_0 \equiv \exp\left[\frac{\mathcal{J} \csc \frac{p}{2} - b_0}{c_0} \right] = 16 \, e^{-2\mathcal{J} \csc \frac{p}{2} - 2} \quad (10.33)$$

which solves (10.31) to lowest order in the variable x. We can use the Lagrange-Bürmann formula (7.22) to invert the series (10.32). We find:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n \cdot \sum_{k, j_i = 0}^{n-1} \frac{n^k}{n!} \binom{n-1}{j_1 \, , \; j_2 \, , \; \ldots \, , \; j_{n-1}} \mathrm{a}_1^{j_1} \mathrm{a}_2^{j_2} \ldots \mathrm{a}_{n-1}^{j_{n-1}}, \quad (10.34)$$

where

$$j_1 + j_2 + \ldots + j_{n-1} = k \quad \& \quad j_1 + 2 \, j_2 + \ldots + (n-1) \, j_{n-1} = n - 1.$$

By expanding (10.31) we may prove that the a_n's have the following form:

$$\mathrm{a}_n = \sum_{m=0}^{n+1} \mathrm{a}_{nm} \mathcal{J}^m, \quad (10.35)$$

where the a_{nm} are known functions of the momentum/angular extent p. If we insert (10.35) into (10.34) and use the identities

$$\left. \begin{aligned} j_1 + j_2 + \ldots + j_{n-1} = k \\ j_1 + 2 \, j_2 + \ldots + (n-1) \, j_{n-1} = n - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow k + j_2 + \ldots + (n-2) \, j_{n-1} = n - 1, \quad (10.36)$$

we may also show that the inverse spin function series $x = x(p, \mathcal{J})$ has the following general form:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n \cdot \sum_{m=0}^{2n-2} \widetilde{a}_{nm} \mathcal{J}^m, \tag{10.37}$$

where the $\widetilde{a}_{nm}$ depend on the momentum p. The $\widetilde{a}_{nm}$'s are computed in terms of the a_{nm}'s in equation (10.35), by inserting (10.35) into (10.34). The result should coincide with equation (G.11), where x has been computed with Mathematica. It can be proven that the leading in $\mathcal{J}$ contributions to x (i.e. the terms $\widetilde{a}_{n,2n-2}$) are determined by a_{12}, the next-to-leading in $\mathcal{J}$ contributions to x (terms $\widetilde{a}_{n,2n-3}$) are determined by a_1 and a_{23}, and so on up to the term $\widetilde{a}_{nn}$. In other words, all the coefficients of $x(\mathcal{J})$ up to $x_0^n \mathcal{J}^{2n-2-\mathfrak{m}}$ $(0 \leq \mathfrak{m} \leq n-2)$ are determined by $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_{\mathfrak{m}}$, and $\mathrm{a}_{\mathfrak{m}+1,\mathfrak{m}+2}$. The next-to-leading terms $\widetilde{a}_{n0}, \ldots, \widetilde{a}_{n,n-1}$ (multiplying $x_0^n \mathcal{J}^m$ for $0 \leq m \leq n-1$) are determined from the coefficients $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_{n-2}$ and $\mathrm{a}_{n-1,m}$. To prove these statements, the formula (10.35) must be inserted into the equation (10.34). We find:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} \cdot \Bigg\{ n^{n-1} \mathrm{a}_1^{n-1} + (n-1)(n-2)\, n^{n-2} \mathrm{a}_1^{n-3} \mathrm{a}_2 + (n-1)(n-2)(n-3)\, n^{n-3} \Big[\mathrm{a}_1^{n-4} \mathrm{a}_3 + \\ + \frac{1}{2}(n-4)\, \mathrm{a}_1^{n-5} \mathrm{a}_2^2 \Big] + \ldots \Bigg\}. \tag{10.38}$$

In order to evaluate the inverse spin function x, we must calculate the coefficients a_1, a_2, a_3 from the equation (10.31) and insert them into the equation (10.38). Here we will keep only the leading, subleading and next-to-subleading terms and ignore all the higher-order contributions. Then we must transform the resulting series into Lambert's functions by using the formulae (I.8)–(I.13) of appendix I. The final result for the inverse spin function $x = x(p, \mathcal{J})$ is:

$$x = -\frac{1}{\mathcal{J}^2} \tan^2 \frac{p}{2} \cdot W + \frac{1}{8\mathcal{J}^3} \tan^3 \frac{p}{2} \sec \frac{p}{2} \cdot \left[\frac{7\cos p - 3}{1+W} - (\cos p - 5) \right] \cdot W^2 - \frac{1}{64\mathcal{J}^4} \tan^4 \frac{p}{2} \sec^2 \frac{p}{2} \cdot \\ \cdot \Bigg\{ \frac{1}{2} (7\cos p - 3)^2 \frac{W}{(1+W)^3} - \frac{1}{6} (241 \cos 2p - 924 \cos p + 731) \frac{W}{1+W} - \frac{1}{3} (335 \cos p - 463) \cdot \\ \sin^2 \frac{p}{2} \cdot W - \frac{1}{12} (41 \cos 2p - 1284 \cos p + 667) W^2 - \frac{1}{3} (\cos 2p + 36 \cos p - 85) W^3 \Bigg\} + \ldots \tag{10.39}$$

The arguments of Lambert's W-functions in (10.39) are $W\left(-16\mathcal{J}^2 \cot^2 (p/2)\, e^{-2\mathcal{J} \csc p/2 - 2}\right)$ in the principal branch W_0. If we use the Taylor expansion of the W-function in the W_0 branch (I.3) to expand the formula (10.39) for $\mathcal{J} \to \infty$, we recover the leading, subleading and next-to-subleading terms of the inverse spin function. These agree with the inverse spin function (G.11) that has been computed in appendix G.2 with Mathematica. Let us also define:

$$x_{(\mathrm{L})} = -\frac{1}{\mathcal{J}^2} \tan^2 \frac{p}{2} \cdot W \tag{10.40}$$

$$x_{(\mathrm{NL})} = \frac{1}{8\mathcal{J}^3} \tan^3 \frac{p}{2} \sec \frac{p}{2} \cdot \left[\frac{7\cos p - 3}{1+W} - (\cos p - 5) \right] \cdot W^2 \tag{10.41}$$

$$x_{(\mathrm{NNL})} = -\frac{1}{64\mathcal{J}^4} \tan^4 \frac{p}{2} \sec^2 \frac{p}{2} \cdot \Bigg\{ \frac{1}{2} (7\cos p - 3)^2 \frac{W}{(1+W)^3} - \frac{1}{6} (241 \cos 2p - 924 \cos p + 731) \frac{W}{1+W} -$$

$$-\frac{1}{3}(335\cos p-463)\sin^2\frac{p}{2}\cdot W-\frac{1}{12}(41\cos 2p-1284\cos p+667)\,W^2-$$
$$\left.-\frac{1}{3}(\cos 2p+36\cos p-85)\,W^3\right\}. \tag{10.42}$$

10.1.3 Dispersion Relation

To compute the classical part of the dispersion relation of finite-size giant magnons, we must insert the inverse spin function $x=x(p,\mathcal{J})$ in (10.39), that we derived in the previous section, into $\gamma=\mathcal{E}-\mathcal{J}$, in equation (10.25). We first expand (10.25) around $x\to 0^+$ by using the series (10.27)–(10.28):

$$\mathcal{E}-\mathcal{J}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(f_n\,\ln x+g_n\right), \tag{10.43}$$

where the coefficients f_n and g_n are functions of x, p and $\mathcal{J}$. They are defined as:

$$f_n\equiv\sin a\left[\frac{1-x}{\sqrt{1-x\sin^2 a}}\,d_n-c_n\right],\quad g_n\equiv\sin a\left[\frac{1-x}{\sqrt{1-x\sin^2 a}}\,h_n-b_n\right],\quad n=0,1,2,\ldots \tag{10.44}$$

Next we substitute the computed value of $\sin a\,(x,p,\mathcal{J})$ (as given by equation (G.10) in appendix G.2) into (10.44), and replace $\ln x/x_0$ by its equal in equation (10.32). The dispersion relation (10.43) is then written as follows:

$$\mathcal{E}-\mathcal{J}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(f_n\,\ln x+g_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left[A_n+f_n\,\ln\frac{x}{x_0}\right]=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}x^n\left[A_n+\sum_{k=1}^{n}f_{n-k}\cdot\mathrm{a}_k\right], \tag{10.45}$$

where now f_n and g_n are functions of only the momentum p and the spin $\mathcal{J}$. The A_n's are given by

$$A_n\equiv g_n+f_n\ln x_0=g_n+2f_n\left(2\ln 2-\mathcal{J}\csc\frac{p}{2}-1\right). \tag{10.46}$$

Generally, A_n and f_n have following form:

$$A_n=\sum_{m=0}^{n}A_{nm}\mathcal{J}^m\quad\&\quad f_n=\sum_{m=0}^{n-1}f_{nm}\mathcal{J}^m, \tag{10.47}$$

where A_{nm} and f_{nm} are known functions of the momentum p. We can now write down all the terms of the expansion (10.45) that contribute to the anomalous dimensions up to next-to-next-to-leading (NNL) order. In (10.45) we make the replacements (10.35), (10.47) and $x=x_{(\mathrm{L})}+x_{(\mathrm{NL})}+x_{(\mathrm{NNL})}+\ldots$, getting:

$$\mathcal{E}-\mathcal{J}=A_0+\left\{A_1x_{(\mathrm{L})}+(A_{22}+f_1\mathrm{a}_{12})\,\mathcal{J}^2x_{(\mathrm{L})}^2\right\}+\left\{A_1x_{(\mathrm{NL})}+(A_{21}+f_1\mathrm{a}_{11})\,\mathcal{J}x_{(\mathrm{L})}^2+\right.$$
$$\left.+2(A_{22}+f_1\mathrm{a}_{12})\,\mathcal{J}^2x_{(\mathrm{L})}x_{(\mathrm{NL})}+(A_{33}+f_1\mathrm{a}_{23}+f_{21}\mathrm{a}_{12})\,\mathcal{J}^3x_{(\mathrm{L})}^3\right\}+\left\{A_1x_{(\mathrm{NNL})}+\right.$$
$$+(A_{20}+f_1\mathrm{a}_{10})\,x_{(\mathrm{L})}^2+2(A_{21}+f_1\mathrm{a}_{11})\,\mathcal{J}x_{(\mathrm{L})}x_{(\mathrm{NL})}+(A_{22}+f_1\mathrm{a}_{12})\,\mathcal{J}^2\left(x_{(\mathrm{NL})}^2+2x_{(\mathrm{L})}x_{(\mathrm{NNL})}\right)+$$
$$+(A_{32}+f_1\mathrm{a}_{22}+f_{21}\mathrm{a}_{11}+f_{20}\mathrm{a}_{12})\,\mathcal{J}^2x_{(\mathrm{L})}^3+3(A_{33}+f_1\mathrm{a}_{23}+f_{21}\mathrm{a}_{12})\,\mathcal{J}^3x_{(\mathrm{L})}^2x_{(\mathrm{NL})}+$$

$$+\left(A_{44}+f_1\mathrm{a}_{34}+f_{21}\mathrm{a}_{23}+f_{32}\mathrm{a}_{12}\right)\mathcal{J}^4x^4_{(\mathrm{L})}\Bigg\},^{48} \tag{10.48}$$

Inserting (10.40)–(10.42) into this formula and performing the calculus, we obtain the following NNLO energy-spin relation of elementary region giant magnons:

$$\mathcal{E}-\mathcal{J}=\sin\frac{p}{2}+\frac{1}{4\mathcal{J}^2}\tan^2\frac{p}{2}\sin^3\frac{p}{2}\left[W+\frac{W^2}{2}\right]-\frac{1}{16\mathcal{J}^3}\tan^4\frac{p}{2}\sin^2\frac{p}{2}\Bigg[(3\cos p+2)\,W^2+$$

$$+\frac{1}{6}(5\cos p+11)\,W^3\Bigg]-\frac{1}{512\mathcal{J}^4}\tan^6\frac{p}{2}\sin\frac{p}{2}\Bigg\{(7\cos p-3)^2\,\frac{W^2}{1+W}-$$

$$-\frac{1}{2}(25\cos 2p-188\cos p-13)\,W^2-\frac{1}{2}(47\cos 2p+196\cos p-19)\,W^3-$$

$$-\frac{1}{3}(13\cos 2p+90\cos p+137)\,W^4\Bigg\}+\ldots, \tag{10.49}$$

where the arguments of the W-functions are again $W\left(-16\mathcal{J}^2\cot^2(p/2)\,e^{-2\mathcal{J}\csc p/2-2}\right)$ in the principal branch W_0. If we expand (10.49) around $\mathcal{J}\to\infty$, we recover the leading, subleading and next-to-subleading terms of the elementary giant magnon dispersion relation. These agree with the large-spin expansion (G.12) of the anomalous dimensions that were evaluated in appendix G.2 with Mathematica. Our results also agree with the GM finite-size corrections of Arutyunov, Frolov and Zamaklar (10.4) and Klose and McLoughlin (10.6). For $p=\pi$, (10.49) becomes:

$$\mathcal{E}-\mathcal{J}=1-4e^{-2\mathcal{J}-2}+4\,(4\mathcal{J}-1)\;e^{-4\mathcal{J}-4}-128\mathcal{J}^2\,e^{-6\mathcal{J}-6}. \tag{10.50}$$

Superposing two such GMs with angular momenta equal to $\mathcal{J}/2$, we retrieve the first few terms in the dispersion relation of long and folded GKP strings in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$, equation (G.3).

10.2 Giant Magnon, Doubled Region: $0\leq|v|\leq 1\leq 1/\omega$

As we have said, we can follow the exact same algorithm that we followed in the previous section to derive the classical part of the dispersion relation of giant magnons in the doubled region. The only difference is that the variable $\widetilde{x}=1-1/\eta$ is used instead of x, with η defined in equation (9.19) and with the string's conserved charges given by equations (9.18), (9.20), (9.21). We find:

$$\mathcal{E}-\mathcal{J}=\sin\frac{p}{2}+\frac{1}{4\mathcal{J}^2}\tan^2\frac{p}{2}\sin^3\frac{p}{2}\left[W+\frac{W^2}{2}\right]-\frac{1}{16\mathcal{J}^3}\tan^4\frac{p}{2}\sin^2\frac{p}{2}\Bigg[(3\cos p+2)\,W^2+$$

$$+\frac{1}{6}(5\cos p+11)\,W^3\Bigg]-\frac{1}{512\mathcal{J}^4}\tan^6\frac{p}{2}\sin\frac{p}{2}\Bigg\{(7\cos p-3)^2\,\frac{W^2}{1+W}-$$

$$-\frac{1}{2}(25\cos 2p-188\cos p-13)\,W^2-\frac{1}{2}(47\cos 2p+196\cos p-19)\,W^3-$$

$$-\frac{1}{3}(13\cos 2p+90\cos p+137)\,W^4\Bigg\}+\ldots, \tag{10.51}$$

[48] We also use $A_1=A_{10}$.

where the argument of Lambert's W-function has the opposite sign than before, i.e. it's given by $W\left(16\mathcal{J}^2\cot^2(p/2)\,e^{-2\mathcal{J}\csc p/2-2}\right)$ in the principal branch W_0. We notice that the W-dependence of (10.51) at NNLO is identical with (10.49), despite the fact that the inverse spin function $\widetilde{x}=\widetilde{x}\,(p,\mathcal{J})$ is not given by (10.39). If we expand (10.51) for $\mathcal{J}\to\infty$ we recover the Mathematica result (G.13) up to NNLO. For $p=\pi$, (10.51) becomes:

$$\mathcal{E}-\mathcal{J}=1+4e^{-2\mathcal{J}-2}+4\,(4\mathcal{J}-1)\;e^{-4\mathcal{J}-4}+128\mathcal{J}^2\,e^{-6\mathcal{J}-6}. \tag{10.52}$$

Superposing two doubled GMs (10.52) with angular momenta equal to $\mathcal{J}/2$, we get the first few terms in the dispersion relation of long circular GKP strings in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$, equation (G.5).

10.3 Single Spike, Elementary Region: $0\leq 1/\omega<|v|\leq 1$

For single spikes in the elementary region, the procedure for deriving the classical dispersion relation up to NNLO is slightly different. We must set $a\equiv\arccos 1/\omega$ and eliminate the logarithm from the equations (9.27) and (9.30). Also $x=1-\eta$, where η is defined by (9.28). The expression $\mathcal{J}=\mathcal{J}\,(a,x,p)$ that we obtain is inverted for $a=a\,(x,p,\mathcal{J})$ and it is inserted into the equations (9.27), (9.29). The variable x is then eliminated from the resulting 2×2 system that contains the momentum $p=p\,(x,\mathcal{J})$ and the energy $\mathcal{E}=\mathcal{E}\,(x,\mathcal{J})$. The result is:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}-\frac{p}{2}=&\frac{q}{2}-\frac{1}{p^2}\sin^4\frac{q}{2}\,\tan\frac{q}{2}\left[W+\frac{W^2}{2}\right]+\frac{1}{p^3}\sin^6\frac{q}{2}\Bigg\{\left[\left(\sec^2\frac{q}{2}+2q\csc q-\frac{1}{2}\right)\right]W^2+\left[5+3\sec^2\frac{q}{2}\right]\\&\cdot\frac{W^3}{6}\Bigg\}+\frac{1}{64\,p^4}\sin^4\frac{q}{2}\tan^3\frac{q}{2}\Bigg\{2\left(5+7\cos q-8q\cot\frac{q}{2}\right)^2\frac{W^2}{1+W}-\left(96q^2\cot^2\frac{q}{2}-52q\csc^4\frac{q}{2}\cdot\right.\\&\left.\cdot\sin^3 q+45\cos 2q+148\cos q+79\right)W^2-\left(16q\,(11+5\cos q)\cot\frac{q}{2}-37\cos 2q-172\cos q-\right.\\&\left.-79\right)W^3-(11\cos 2q+64\cos q+85)\,W^4\Bigg\}+\ldots\end{aligned}\tag{10.53}$$

The arguments of the Lambert W-functions are $W\left(\pm 4p^2\csc^2(q/2)\,e^{-(p+q)\cdot\cot\frac{q}{2}}\right)$ in the principal branch W_0. We have defined $\mathcal{J}\equiv\sin q/2$. The minus sign in the argument of W corresponds to the elementary region of single spikes and the plus sign to the doubled region.

10.4 Single Spike, Doubled Region: $0\leq 1/\omega\leq 1\leq|v|$

To obtain the dispersion relation in the doubled region of single spikes, we set $\widetilde{x}=1-1/\eta$ with η defined in equation (9.37). Then we follow the same algorithm that we followed in the case of the elementary region single spikes, for the conserved charges (9.36), (9.38), (9.39). We find:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}-\frac{p}{2}=&\frac{q}{2}-\frac{1}{p^2}\sin^4\frac{q}{2}\,\tan\frac{q}{2}\left[W+\frac{W^2}{2}\right]+\frac{1}{p^3}\sin^6\frac{q}{2}\Bigg\{\left[\left(\sec^2\frac{q}{2}+2q\csc q-\frac{1}{2}\right)\right]W^2+\left[5+3\sec^2\frac{q}{2}\right]\\&\cdot\frac{W^3}{6}\Bigg\}+\frac{1}{64\,p^4}\sin^4\frac{q}{2}\tan^3\frac{q}{2}\Bigg\{2\left(5+7\cos q-8q\cot\frac{q}{2}\right)^2\frac{W^2}{1+W}-\left(96q^2\cot^2\frac{q}{2}-52q\csc^4\frac{q}{2}\cdot\right.\end{aligned}$$

$$\cdot \sin^3 q + 45 \cos 2q + 276 \cos q - 256 \csc^2 \frac{q}{2} + 463\Big) W^2 - \Big(16q\,(11 + 5\cos q) \cot \frac{q}{2} - 37 \cos 2q -$$

$$-172 \cos q - 79\Big) W^3 - (11 \cos 2q + 64 \cos q + 85)\, W^4 \Bigg\} + \ldots \tag{10.54}$$

In contrast to the dispersion relation of giant magnons which have the same W-dependence in their elementary and doubled regions, the dispersion relation of single spikes in the elementary region is not the same with the one in the doubled region. We have marked the terms which differ between the formulas (10.53)–(10.54) with red color. Both anomalous dimensions converge to the infinite-momentum/winding dispersion relation (8.8) for $p = \infty$. We can check that both expressions (10.53)–(10.54) are correct, if we expand them for large momentum/winding $p \to \infty$. We recover all LO, NLO and NNLO terms of formulae (G.14)–(G.15) that were obtained with Mathematica. The leading finite-size correction of (10.53) agrees with the Ahn-Bozhilov formula (10.11).

11 Part II Summary and Discussion

In part II of this thesis (§5–§10) we studied free spinning strings in $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. Because of the AdS/CFT correspondence (3.1) free string states in $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ are dual to local operators of the planar $\mathcal{N} = 4$ SYM theory. We may use this duality in order to compute the spectrum of the gauge theory at strong coupling where the strings are effectively weakly coupled in α'. Our focus was put on two fundamental string configurations which we studied in detail at infinite and finite-size: the Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP) strings and giant magnons (GMs)/single spikes (SSs). Our goal was to compute the anomalous dimensions of the $\mathcal{N} = 4$ SYM operators that are dual to the above configurations and investigate the possibility of expressing them in closed forms.

Even though the full classical expressions for each of the system's charges at strong coupling are known in parametric form as functions of the dual string's velocities v and ω, the anomalous dimensions have to be expressed solely in terms of the conserved charges. Only in this way they can accommodate quantum corrections and they can be compared to the corresponding weak-coupling formulas, neither of which is known in parametric form.

11.1 GKP Strings

The GKP strings were introduced in §6. These consist of the following setups in AdS_3 and $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$:

I. a closed string rigidly rotating in $\mathrm{AdS}_3 \subset \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$.

II. a closed string rigidly rotating around the pole of S^2 in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2 \subset \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$.

III. a closed string pulsating inside $\mathrm{AdS}_3 \subset \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$.

Each of these string configurations was studied in detail. The GKP strings I and II can be either folded or not folded and short/slow or long/fast. They obey classical short-long and slow-fast strings dualities that connect the values of their conserved charges in the corresponding regimes. Solutions with energy E and spins S or J can be related to solutions with energy E' and spins S' or J' via the equations (6.38), (6.76)–(6.77). Not all the charges have to belong to the same GKP configuration (see appendix E). All the short-long and fast-slow dualities are purely classical ($\lambda = \infty$) but it would be interesting to promote them to the quantum level or to find their analogues at weak coupling.

The dispersion relation of pulsating strings in AdS_3 (GKP strings III) was found by the WKB method. These strings are dual to the following operators of $\mathcal{N} = 4$ SYM:

$$\mathcal{O}_n = \mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}\mathcal{D}_+^n\mathcal{D}_-^n\mathcal{Z}\right] + \ldots, \quad \lambda \to \infty, \tag{11.1}$$

where $\mathcal{Z}$ is a complex scalar field of $\mathcal{N} = 4$ SYM (3.8) and $\mathcal{D}_\pm$ are the light-cone derivatives (3.9).

In §7 we computed the classical part of the finite-size corrections to the large-spin dispersion relations of twist-2 and 2-magnon operators of $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills theory at strong coupling:

$$\mathcal{O}_S = Tr\left[\mathcal{D}_+^m\mathcal{Z}\mathcal{D}_+^{S-m}\mathcal{Z}\right] + \ldots \quad \& \quad \mathcal{O}_J = \mathrm{Tr}\left[\mathcal{X}\mathcal{Z}^m\mathcal{X}\mathcal{Z}^{J-m}\right] + \ldots, \quad \lambda, S, J \to \infty, \tag{11.2}$$

where $\mathcal{X}$ is another complex scalar of $\mathcal{N} = 4$ SYM (3.8). The twist-2 and the 2-magnon operators are dual to semiclassical single-spin strings that rotate in AdS_3 and $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ respectively, dubbed above GKP strings I and II.

Following the paper [3], we have used the Lagrange-Bürmann inversion formula to invert certain functions of the elliptic integrals that are related to the conserved spins of the long GKP strings I and II. Next, we expressed the corresponding dispersion relations and the anomalous dimensions of their dual $\mathcal{N} = 4$ SYM operators (11.2) in terms of Lambert's W-function. This way, not only we succeeded in predicting infinitely many and previously unbeknown terms in the dispersion relations of the GKP strings, but we also obtained compact, almost closed-form expressions for the corresponding spectra.

Inverting the elliptic integrals and the Jacobian elliptic functions w.r.t. the parameter m, constitutes an active field of research in computational mathematics.[49] It seems that the presence of a logarithmic singularity at $m = 1$ (see the corresponding Taylor series of the elliptic integrals in appendix H) obstructed any progress in calculating these inverses. The authors of the paper [3] noticed that the equation (7.21) can be inverted by the Lagrange-Bürmann formula and the result can be expressed with Lambert's W-function. For AdS_3 the process had to be modified slightly because of the term $1/x$ on the r.h.s. of (7.72). It is this $1/x$ term that leads to consider the W_{-1} branch of the W-function instead of the W_0 branch and to logarithmic rather than exponential corrections in the inverse spin function and the anomalous dimensions.

It would be interesting to generalize the W-function expressions (7.64)–(7.65), (7.69)–(7.70) and (7.112)–(7.113) to all the subleading orders by means of a closed formula, a recursive process or an algorithm. It seems that Lambert's W-functions will keep appearing in all subsequent orders. Further, we could study the effect of changing branches in Lambert's W-function. Going from the W_0 branch of the W-function to the W_{-1} branch and vice-versa, implies that the inverse spin function x either blows up (i.e. $x \to \pm\infty$) or exhibits a behavior that is different from $x \to 0$. In the case of GKP strings in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ we saw that if we flip the sign in the argument of Lambert's function (cf. (7.65)–(7.70)) we go from folded and stable ($\omega > 1$) to circular and unstable ($\omega < 1$) GKP strings and vice-versa. Perhaps this relationship could be generalized to a more profound symmetry. In other words, the Lambert W-function formalism could help reveal the symmetries (e.g. the near conjugate symmetry $W_k(\bar{z}) = \overline{W}_{-k}(z)$) that are hidden inside the large-spin expansions of strings in $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$.

All of our expressions for long/fast strings can be easily verified with Mathematica. See appendix G. For short/slow strings, the elliptic integrals do not have a logarithmic singularity for $m < 1$ and the expressions for $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{J})$ and $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{S})$ can be obtained with Mathematica by simple series reversion. It is not completely impossible that the short/slow series (6.30), (6.62), (6.73) could also afford W-function parametrizations. It would be interesting to have compact forms for the short/slow series. This would facilitate the comparison between the dispersion relations of short/slow spinning strings in curved spacetimes and those of closed strings that rotate inside a flat spacetime. Strings in flat spacetimes are briefly examined in appendix D.

It would be worth investigating whether the quantum finite-size corrections at strong coupling or the weak-coupling analogues of the anomalous dimensions of long twist-2 and 2-magnon operators of $\mathcal{N} = 4$ SYM, can also be expressed via the W-function. The anomalous dimensions of long twist operators of QCD (responsible for scaling violations in DIS) could also afford a W-function parametrization at strong coupling. Already, the 3-loop running coupling constant of QCD is known to have a similar W-function parametrization (see appendix I).

Another setup where the W-function formalism is expected to apply, is the solution of Einstein's equations in thermal backgrounds and dilaton geometries (see e.g. [143]). The reason for this is quite subtle and it is related to what we have said in §2.3 about the holographic renormalization group. In the context of holography, Einstein's equations are the RG equations of a certain QFT that lives on the boundary of spacetime. The solutions of one and two-loop RG equations however, have already been shown to be expressible in terms of Lambert's W-function (see appendix I and references therein). In fact, we can rigorously prove that the solution of RG equations up to any loop-order can be written in terms of Lambert's W-function. That this is possible can be seen from equation (7.72), which is nothing more than the antiderivative of a generic RG-equation $\beta(x) = \mu^2 dx/d\mu^2 = -x^2 \sum \beta_n x^n$. In [13],

[49]See e.g. [142].

W-function expressions were found for the dispersion relation of strings rotating inside $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{CP}^3$.

11.2 Giant Magnons & Single Spikes

Giant magnons and single spikes of infinite and finite sizes were presented in §8–§9. Giant magnons are open single-spin strings in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ that perform a wave-like motion around the 2-sphere. Single spikes are single-spin strings in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ that are wound around the equator of the 2-sphere and rotate around it. Depending on the relative values of their angular and linear velocities, the giant magnons and the single spikes can be either elementary or doubled. We may study the scattering of classical GMs and SSs by using their Pohlmeyer images in the sine-Gordon equation. The giant magnons are dual to the (anti)kink solitons of sG while the single spikes correspond to certain unstable solutions of sG. There exists a transformation, namely the $\sigma \leftrightarrow \tau$ transform, that allows to transform between giant magnons and single spikes and their Pohlmeyer reductions.

The scattering matrix of infinite-size giant magnons that is computed by means of their Pohlmeyer reduction agrees with the strong-coupling limit of the magnon S-matrix. The S-matrix of infinite-size single spikes is equal to the one for giant magnons up to non-logarithmic terms. It is very tempting to ask if scattering between giant magnons and single spikes is possible in the infinite-size limit.[50] However, the sG solutions that correspond to the single spike and the giant magnon seem to belong to different sectors of the theory, which forbids the existence of scattering solutions with GMs and SSs as asymptotic states. The "dressing" method also fails to provide such GM-SS scattering solutions, as does the generalization of the sG solutions to solutions of the complex sine-Gordon equation. One could also try to form solutions of the sG equation or the string sigma model by using the picture of single spikes as superposition of an infinite number of giant magnons.

In §10 we computed the classical part of the finite-size corrections to the dispersion relations of large-spin giant magnons and large-momentum/winding single spikes. The former are dual to the single-magnon operators of $\mathcal{N} = 4$ SYM:

$$\mathcal{O}_M = \sum_{m=1}^{J+1} e^{imp} \left| \mathcal{Z}^{m-1} \mathcal{X} \mathcal{Z}^{J-m+1} \right\rangle, \quad p \in \mathbb{R}, \quad \lambda, J \to \infty \tag{11.3}$$

at strong coupling. Single spikes are dual to spinon operators:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{S}} \sim \left| \mathbb{S}^{m-1} \, \mathcal{X} \, \mathbb{S}^{L/2-m} \right\rangle + \ldots, \quad L \equiv J + M, \quad J \in \mathbb{R} \quad \lambda, p \to \infty \tag{11.4}$$

at strong coupling, with $\mathbb{S} \sim \mathcal{X}\overline{\mathcal{X}} + \mathcal{Y}\overline{\mathcal{Y}} + \mathcal{Z}\overline{\mathcal{Z}}$.

We have computed all the leading ($\mathcal{A}_{n0}$, $\hat{\mathcal{A}}_{n0}$), next-to-leading ($\mathcal{A}_{n1}$, $\hat{\mathcal{A}}_{n1}$) and next-to-next-to-leading ($\mathcal{A}_{n2}$, $\hat{\mathcal{A}}_{n2}$) terms of the classical finite-size corrections to the dispersion relations of giant magnons (10.5) and single spikes (10.12), in both their elementary and doubled regions. As in the case of the GKP strings, the corresponding dispersion relations have been expressed in terms of Lambert's W-function. It is not known whether there's a similar role for the W-function at weak coupling too. Since the above results for the dispersion relation of giant magnons and single spikes have not been obtained by any other method, they can be used as a check for the correct inclusion of classical wrapping effects at strong coupling by other integrability methods such as Lüscher corrections, the thermodynamic Bethe ansatz (TBA)/Y-system and the quantum spectral curve (QSC). Furthermore, since the quantum finite-size corrections to the GM dispersion relation are only known to lowest order in λ, the classical results could elucidate the structure of the quantum expansion and possibly suggest more efficient ways to quantize this system.

[50] This can be seen as another way of asking whether scattering between a ferromagnetic and an anti-ferromagnetic magnon is possible. Such magnonic experiments do not seem as impossible as they were in the past.

The formulas (10.39)–(10.49) and (10.53)–(10.54) could be generalized to all the subleading orders by means of general formulas, a recursive process or an algorithm. The Lambert functions will keep appearing to all subsequent orders, in complete analogy with the case of GKP strings. The quantum finite-size corrections to the dispersion relation of giant magnons and single spikes may also be expressible in terms of Lambert's W-function.

The expressions for the inverse spin function $x = x\,(p, \mathcal{J})$ and the anomalous dimensions $\gamma = \gamma\,(p, \mathcal{J})$ of both giant magnons and single spikes can be easily verified with Mathematica and the formulas of appendix G.2. As we have said, GKP strings in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ are formed by the superposition of two giant magnons with maximum momenta $p = \pi$ and angular momenta $J/2$. With these substitutions the magnon dispersion relation (G.12) reduces to the dispersion relation of the GKP string II (G.3). However the structures of these two dispersion relations are somewhat different and the terms that are leading, subleading, etc. in one are not the same as the terms that are leading, subleading, etc. in the dispersion relation of the other. Therefore, two GMs with maximum momentum $p = \pi$ and spin $J/2$ only give (10.50) in lieu of the corresponding terms of (G.3).

Let us end this section by anticipating some further applications of the W-function formalism. The form of the finite-size corrections to the dispersion relation of GMs in γ-deformed backgrounds[51] [144] is very reminiscent of the ones appearing in undeformed backgrounds (10.4):

$$E - J = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\,\sin\frac{p}{2}\left\{1 - 4\,\sin^2\frac{p}{2}\,\cos\Xi\,e^{-2-2\pi J/\sqrt{\lambda}\sin\frac{p}{2}} + \dots\right\}, \quad \Xi \equiv \frac{2\pi\,(n_2 - \beta\,J)}{2^{3/2}\cos^3 p/4}, \tag{11.5}$$

where $n_2 \in \mathbb{Z}$ is the string winding number and β is the real deformation parameter that satisfies $|n_2 - \beta\,J| \leq 1/2$ [145]. Finite-size effects are also very interesting in the cases of dyonic giant magnons [146] and the giant magnons of the $\mathrm{AdS}_4/\mathrm{CFT}_3$ correspondence (3.37) [147]. Similar remarks apply to the generalizations of single spikes in the ABJM theory and the γ-deformed backgrounds, but also to the anti-de Sitter analogues of giant magnons, namely the spiky Kruczenski strings [148] (the GKP strings in AdS_3 can be thought of as 2-spike Kruczenski strings).

The computation of correlation functions at strong coupling could also be made with the W-function methods that were developed in part II of this thesis. Finally, as we are going to see in the following two parts, it is sometimes possible for higher-dimensional extended objects, such as p-branes and membranes, to share many of the neat characteristics of strings.[52] It is natural then to expect that the Lambert W-function formalism will be applicable to these cases as well. Finite-size effects for p-branes, e.g. for M2-branes in $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$ [151] could also be studied in the same spirit.

[51] Aka real Lunin-Maldacena backgrounds.

[52] See e.g. the papers [4, 149]. Magnon-like dispersion relations for membranes that rotate in $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$ have been found in [150].

Part III

Rudiments of p-Branes & M-Theory

12 Generalities

It is customary to dissociate the development of the theory of one-dimensional extended objects (strings) from that of higher-dimensional ones (branes), despite the fact that their itineraries and aims were always inextricably intertwined. Thus although the beginnings of string theory is placed in 1943 with Heisenberg's S-matrix program [152], the official kickoff for the study of branes takes place with Dirac's 1962 theory of electrons [153].[53] In the detailed historical account of Duff [157], the development of brane theory is divided into four main periods:

1962–1986: Bosonic p-branes.

1986–1995: Super p-branes.

1995– M-theory.

2000– Brane world cosmology.

Before going any further, let us first clarify the term "branes" [158]. Generally we should distinguish between Dp-branes, which are p-dimensional extended objects that host the endpoints of open strings and are generally studied within (10-dimensional) string theory and Mp-branes which are p-dimensional extended objects within (11-dimensional) M-theory.

We will now attempt to give a short introduction to p-branes from an M-theory perspective. We will focus mainly on classical bosonic M2-branes. Broad, extended reviews of the subject can be found in the references [159, 160, 161, 162, 163, 164].

12.1 Uses of Extended Objects

Let us start by going through the main motivations for the theory of p-branes:[54]

1. Description of elementary particles.
2. Study of the strong interaction.
3. Generalization of superstrings and superparticles.
4. The membrane paradigm of black holes.
5. M-theory.
6. AdS/CFT correspondence.
7. Brane world cosmology.

We will now mention a few things about each of these motivations.

[53] According to [154, 155], the first paper envisaging the possibility of non-local field theory and consequently of extended objects such as membranes, was written in 1950 by Yukawa [156].

[54] Related brief historical remarks can also be found in the references [165, 166, 167].

12.1.1 Description of Elementary Particles

The idea that the elementary particles are not point-like but have small finite sizes, has its origins in the concept of electromagnetic mass that was introduced by J. J. Thomson in 1881 and was later developed by Heaviside, Searle, Abraham, Lorentz and others. Closely related notions are the 4/3 factor problem, Poincaré stresses and the electron self-force (or bootstrap force), wonderfully presented in chapter 28 of Feynman's second volume of *Lectures in Physics* [168]. In his inaugurating 1962 paper of brane theory [153], Dirac treated the electron as a charged quantized membrane, the first excited state of which was the muon.[55]

12.1.2 Study of the Strong Interaction

We mentioned in §2.1 that string theory was initially proposed as a theory of strong interactions before being overthrown by QCD in the early seventies. There two main points of contact between string theory and QCD: (a) the bosonic string interpretation of the Veneziano formula by Nambu, Nielsen and Susskind in 1970 and (b) the explanation of the almost linear Regge trajectories of hadrons by Goddard, Goldstone, Rebbi and Thorn in 1973 with bosonic string theory.

The 1974-75 bag models of MIT, SLAC and Budapest groups [170] replaced the stringy descriptions of strong interactions. They essentially modelled hadrons as quark bubbles/bags which contain quarks and gluons. The bag itself is a 2-dimensional dynamic membrane which confines the partons inside a space that QCD applies. The bag models successfully predict the spectrum and some other properties of hadrons while they provide a very intuitive picture of quark confinement.

	D = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p = 0	$\color{red}{\checkmark}$	$\color{red}{\checkmark}$ $\color{blue}{\checkmark}$	$\color{blue}{\checkmark}$	$\color{red}{\checkmark}$	$\color{blue}{\checkmark}$			$\color{red}{\checkmark}$	$\color{blue}{\checkmark}$	
1		$\color{red}{\checkmark}$ $\color{blue}{\checkmark}$	$\color{red}{\checkmark}$ $\color{blue}{\checkmark}$		$\color{red}{\checkmark}$ $\color{blue}{\checkmark}$				$\color{red}{\checkmark}$ $\color{blue}{\checkmark}$	
2		$\color{blue}{\checkmark}$	$\color{red}{\checkmark}$ $\color{blue}{\checkmark}$	$\color{red}{\checkmark}$	$\color{blue}{\checkmark}$	$\color{red}{\checkmark}$			$\color{blue}{\checkmark}$	$\color{red}{\checkmark}$
3			$\color{blue}{\checkmark}$		$\color{red}{\checkmark}$ $\color{blue}{\checkmark}$		$\color{red}{\checkmark}$ $\color{blue}{\checkmark}$		$\color{blue}{\checkmark}$	
4					$\color{blue}{\checkmark}$			$\color{red}{\checkmark}$	$\color{blue}{\checkmark}$	
5					$\color{blue}{\checkmark}$	$\color{blue}{\checkmark}$			$\color{red}{\checkmark}$ $\color{blue}{\checkmark}$	$\color{blue}{\checkmark}$
6									$\color{blue}{\checkmark}$	
7									$\color{blue}{\checkmark}$	
8									$\color{blue}{\checkmark}$	
9									$\color{blue}{\checkmark}$	

12.1.3 Generalization of Superstrings and Superparticles

A rather obvious motivation for developing the theory of extended objects was the need to generalize strings and point-particles to higher-dimensional objects [165] and superstrings to supermembranes [171]. It seems that higher-dimensional extensions of superstrings favor the Green-Schwarz formulation with manifest spacetime supersymmetry. As it turns out [172], supersymmetric Mp-branes can exist only in $D \leq 11$ spacetime dimensions. The chart of the Mp-brane dimensionalities that can be supersymmetrized in each spacetime dimension is known as the *brane scan* [160]. With double

[55]From the experimental point of view however, the recent upper bound for the electron radius $R_e < 10^{-18}$ m [169] is about 3 orders of magnitude smaller than the classical electron radius $r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2 \sim 2.817 \times 10^{-15}$ m.

dimensional reduction (DDR), any Mp-brane configuration may be reduced to a lower-dimensional extended object in one spacetime dimension less. In the above table, the red checkmarks denote the existence of scalar supermultiplets (containing scalars and spinors) while the blue checkmarks stand for higher spin supermultiplets. Obviously, DDR is possible only in the scalar case.

12.1.4 The Membrane Paradigm of Black Holes

We saw back in §2.2, where we briefly introduced the Holographic Principle, that its main motivation was the area law and the Bekenstein-Hawking formula (2.14) for the entropy of black holes. The Hawking area law is also the motivation for what is known as the black hole "membrane paradigm" [173].

According to the membrane paradigm, the black hole horizon behaves as a fluid under small disturbances. It can effectively be replaced by a "stretched horizon", an M2-brane that is made from a 2-dimensional viscous charged and electrically conducting fluid that obeys the Navier-Stokes equations.

The membrane paradigm fits very nicely into the existing network of physical ideas and it can be used in conjunction with the other entries to give rise to interesting new concepts. For example, when it is combined with the representation of elementary particles and hadrons by 2-dimensional surfaces §12.1.1–§12.1.2, it gives rise to the black hole description of elementary particles and hadrons [174]. This set of ideas goes back to the work Einstein, Infeld and Hoffmann on the black hole electron.

The holographic analogue of the membrane paradigm is known as the fluid/gravity correspondence. Just as the area law of black holes was generalized to the Holographic Principle that applies to any spacetime, the black hole membrane paradigm can be extended to the fluid/gravity duality. Largely inspired by the AdS/CFT correspondence (introduced in §3), the fluid/gravity duality asserts that the boundary data of all asymptotically AdS spacetimes are governed by the Navier-Stokes equations in the hydrodynamic limit.

Before going too far with the analogies, we should note that the "membrane" in the membrane paradigm is a very thin 2-d sheet of fluid that surrounds the black hole and obeys the Navier-Stokes equations, instead of a 2-dimensional extended object that has a dynamics of its own.[56] However the depiction of the fluid in terms of a membrane, has certain advantages when it comes to discuss the position of the black hole microstates or the location of the black hole degrees of freedom that are going to be quantized [166].

12.1.5 M-Theory

The unifying framework of the five superstring theories is known as M-theory:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Type-I}\\ \text{Type-IIA}\\ \text{Type-IIB}\\ \text{Heterotic } \mathfrak{so}\,(32)\\ \text{Heterotic } \mathrm{E}_8\times\mathrm{E}_8\end{array}\right\}\ \text{M-Theory.}$$

The "M" in "M-theory" stands for "magic, mystery and matrix" according to Witten [176] and "membrane" according to Duff [157]. Common lore also attributes "M" to "mother" because of the "maternal" role of M-theory in the web of the five fundamental string theories [177]. The relevance

[56]Interestingly, Bordemann and Hoppe [175] have shown how to reduce the membrane equations of motion to those of an inviscid fluid.

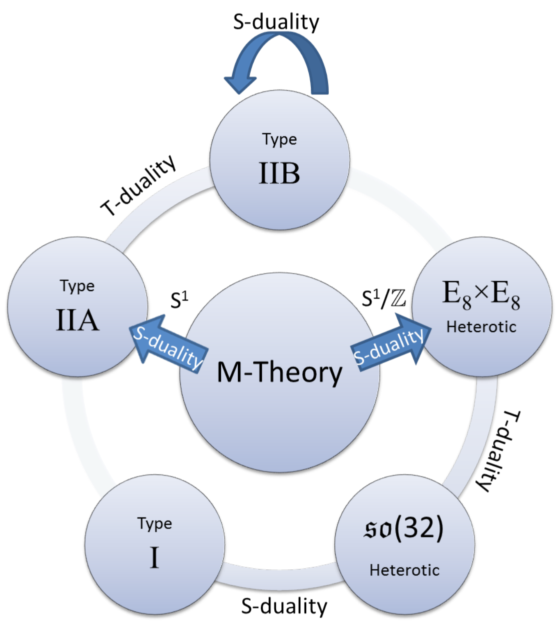
of the terms "matrix" and "membrane" will be elucidated below. Recommended reviews of M-theory are [178, 179]. More popular accounts can be found in [176]. There are three major milestones of the M-theory hypothesis:

• In 1988, Duff, Howe, Inami, Stelle [180] proved that the double dimensional reduction of the 11-dimensional supermembrane, yields the IIA superstring.

• In 1995, Townsend [181] argued that when 11-dimensional supergravity is compactified on S^1, IIA supergravity is obtained. IIA supergravity is the low-energy limit of IIA string theory. According to Townsend, the above paper of Duff, Howe, Inami and Stelle then implied that IIA string theory is just a compactified 11-dimensional supermembrane theory.

$$\text{IIA Superstring Theory (10d)} \; \underset{\text{compactify on } S^1}{\overset{g_s\to\infty}{\rightleftarrows}} \; \text{M-Theory (11d)} \xrightarrow{\text{low-energy}} \mathbf{1}_{11} \text{ Supergravity}$$

• A few months later, Witten [182] provided further supporting evidence to the M-theory conjecture. To the existing (since the eighties) set of T-dualities between IIA and IIB theory and $E_8 \times E_8$ and $\mathfrak{so}(32)$ heterotic strings, Witten added a whole new family of weak/strong coupling dualities (aka S-dualities). These transformed IIB theory to itself (self-duality), type I theory to $\mathfrak{so}(32)$ and types IIA and $E_8 \times E_8$ theories to some unknown 11-dimensional theory, M-theory.



A flurry of research activity followed Witten's groundbreaking announcements. The picture that emerged was that the five 10-dimensional string theories were interconnected by the various dualities in such a way, that they looked like the nuts and bolts of a broader 11-dimensional theory. However, nothing more was known about this 11-dimensional theory (not to mention a Lagrangian) apart from the fact that it was intrinsically non-perturbative. In addition, the 11-dimensional brane scan indicated that M2-branes were the fundamental entities to be considered in M-theory. The M-theory advent is now officially part of the second superstring revolution (1994–2000).

12.1.6 AdS/CFT Correspondence

The AdS/CFT correspondence (3.1) was introduced in §3. Besides the most popular case of AdS_5/CFT_4 there exist many more dualities in 10 and 11 dimensions. See §3.7.

12.1.7 Brane World Cosmology

One of the earliest attempts to model the universe as a brane living inside a higher-dimensional spacetime was Rubakov and Shaposhnikov's 1983 paper [183]. Brane world cosmology literally exploded after Randall and Sundrum published their famous papers [184] in 1999.

12.2 Towards M(embrane) Theory

Believing that a theory of higher-dimensional extended objects is necessary and useful and welcome is of course a completely different issue than actually developing such a theory. Very early on, it was realized that the theories of higher-dimensional bosonic/supersymmetric objects such as M2-branes are plagued with a series of diehard issues:

1. Instabilities.
2. Anomalies.
3. Ghosts.
4. Non-Renormalizability.
5. Integrability & Solvability.
6. Quantization.
7. Membrane Interactions & Perturbation Theory.

Every cloud has a silver lining however and the general discussion about all of these issues helped refine a list of a few basic ingredients of good quantum theories of supermembranes:

I. Discrete State Spectrum.

II. Massless States.

III. Mass Gap.

Let us now briefly examine each of these issues 1–7.

12.2.1 Membrane Instabilities

Membrane instabilities are perhaps the most popular objection against membranes. They were discovered as early as 1978, sixteen years after Dirac's monumental 1962 paper that initiated all activity in the field. In sum, although Dirac's electron model was cleared from causality problems (such as classical runaway solutions, well-known in the case of the Abraham-Lorentz model), it was found to suffer from the so-called quadrupole instabilities [185]. Unfortunately, this was not just an unhappy coincidence but membrane instabilities had come to stay: branes are prone to developing spikes (or "hair") and stringy tubes [186].[57] The reasoning is very simple. Because of their extended nature, the energy of branes that is proportional to their spatial surface, remains constant if we suddenly decide to stretch any one of its sides while at the same time we shrink any of the remaining ones, in such a way that their product (equal to their energy) is the same [161].

Many discussions ensued from the above no-go situation and M(embrane) theory became stalled for years. Today it is known that the problem of membrane instabilities is cured by quantization, it returns because of supersymmetry in the form of continuous membrane spectra but it finds a natural explanation within the "matrix theory conjecture" [163]. Outside matrix quantum mechanics the

[57] Townsend [181] compares membrane spikes to a "fakir's bed of nails"...

problem still persists for the majority of spacetimes. As Nicolai and Helling mention in [161], one could consider curing this problem by adding higher curvature corrections to the membrane action. Alas these would be in conflict with the possible counterterms that would render the theory renormalizable. On the other hand, there exists a number of special membrane backgrounds (such as $\mathbb{R}^9 \times \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1$ [180] and $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{M}^7$ [187]) that are known to be instability-free.

12.2.2 Anomalies

In string theory, (conformal) anomalies are linked to the notion of critical spacetime dimensions D at which they happen to vanish. It will be seen below that due to the presence of a constant cosmological term in the membrane action, the corresponding worldvolume is not conformally invariant and the conformal symmetry cannot be possibly considered as a valid anomalous symmetry candidate. On the other hand it has been shown that diffeomorphism anomalies vanish only in the case of $p = 2$ dimensional branes that live in $D = 11$ spacetime dimensions [188]. All the other allowed dimensionalities of the *brane scan* as well as all bosonic p-branes, have been shown to suffer from incurable anomalies.[58]

12.2.3 Ghosts

Kinetic terms with the wrong sign are known as ghosts. Ghost instabilities are a commonplace in both the string and brane actions because of the negative sign in front of the kinetic term that corresponds to the temporal coordinate. Classically, ghosts are removed by gauge-fixing that trades manifest Lorentz-invariance with ghost freedom. At the quantum level, we have seen that all anomalies (including possible ghost contributions) are cancelled only for the dimensionalities $p = 1, 2$ and $D = 10, 11$.

12.2.4 Non-Renormalizability

Perhaps the most vexing problem of higher-dimensional extended objects is their being notoriously non-renormalizable. All nonlinear sigma models (NLSM's) in $p \geq 2$ dimensions are non-renormalizable by power-counting.[59] One of the earliest ideas to tackle this problem [180, 190] invoked asymptotic safety and insisted that brane theories depend on a finite number of parameters after all, despite being evidently non-renormalizable. Indeed membrane non-renormalizability has been explicitly demonstrated in the bosonic case [191], however this result does not seem to constrain neither the supermembrane nor the case of curved AdS backgrounds [192], for which it is hoped that renormalizable examples could be found. Non-renormalizability implies in many respects the end of the membrane adventure, since the infinity of curvature counterterms that would have to be added to the membrane action, would be at odds with any quantized version of the theory [161]. Matrix theory on the other hand is perfectly renormalizable for any finite matrix dimensionality N and it remains so, as long as N does not become infinite ($N \to \infty$). More recent attempts deal with the problem of M2-brane non-renormalizability in some appropriately defined large-N limit of the NLSM [193].

12.2.5 Integrability

A slightly undervalued motivation for the development of the theory of relativistic M2-branes, has been the striking resemblance of their dynamics to Yang-Mills theories. Owing to the work of Goldstone and Hoppe [194], it has been known that regularized spherical bosonic membranes are equivalent to $\mathfrak{su}(\infty)$ classical Yang-Mills theory. This is mainly due to the fact that the group of area-preserving diffeomorphisms is a (residual) symmetry of (gauge-fixed) bosonic membranes and it can be approximated by $\mathfrak{su}(N)$ in the case of spherical membranes [195]. Here N is the matrix dimensionality in the

[58] The anomaly-free superstring and supermembrane ($p = 1, 2$, $D = 10, 11$) compose what is known as the O-series of the *brane scan*.

[59] See e.g. [189].

regularized description of membranes. More will be said in the following section. The previous theorem can be generalized to the area-preserving diffeomorphisms of arbitrary-genus membranes, which should also reduce to $\mathfrak{su}(\infty)$ Yang-Mills theory in the large-N limit [196]. Yet another result stressing the deep analogies between the dynamics of membranes and Yang-Mills theories is the existence of self-dual closed bosonic membranes [197].

The association of membranes and Yang-Mills theories that we just sketched, is largely responsible for a very popular rumour (mostly circulating during the 1990's) that membranes cannot be integrable and therefore "nothing can be solved".[60] Now it is known that general Yang-Mills theories cannot possibly be integrable [198], except maybe in certain special occasions [199] such as the large-N_c limit or self-dual Yang-Mills. That branes can in fact be integrable has been advocated by Bordemann and Hoppe in a series of publications [175, 200], where M2-branes were shown to possess a Lax pair and thus an infinity of conservation laws. In curved AdS/CFT backgrounds, the classical integrability of certain configurations of M2-branes has been recently investigated by Bozhilov [201]. Membrane integrability probably has an important role to play when it comes to its quantization without the use of matrix models.

12.2.6 Quantization

Not surprisingly, all the p-brane problems that we have mentioned so far, obstruct any attempt to consistently quantize the theory of supermembranes. Brane instabilities lead to infinitely degenerate path integral contributions that contain, apart from the original p-brane configuration, all of its spiky versions. Anomalies and ghosts seem to prevent almost all p-brane dimensionalities except M2-branes in 11 spacetime dimensions, while non-renormalizability is an emphatic no-go condition. Non-integrability and non-solvability present the unsettling technical difficulty of wanting to quantize a theory without knowing how to solve it exactly.

Apparently there are two main escape routes. They have already been delineated in the above discussion. One is matrix theory which miraculously resurrects quantum membranes. We will briefly discuss matrix theory in the following section. A second alternative is to consider M2-branes in curved 11-dimensional AdS/CFT backgrounds, where supermembranes are stable, renormalizable and also possibly integrable.

Such considerations have been put forward in [202]. Supermembranes in $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$ are stable and they possess a discrete spectrum (I) and an infinity of massless states (II) [187]. The "membrane at the end of the universe" [203] is a static configuration that sits at the boundary of $\mathrm{AdS}_4 \subset \mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$ (taken to be $\mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^1$) and it is equivalent to a renormalizable $\mathfrak{osp}\,(8|4)$ supersingleton theory with $\mathcal{N} = 8$ superconformal symmetry [192]. The quantization of $\mathfrak{osp}\,(8|4)$ supersingleton theory may be consistently carried out, giving rise to an infinite tower of massless higher-spin (HS) fields (familiar from Vasiliev's HS theory) that directly map in the $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$ supermembrane spectrum [204].

An analogous framework should apply to $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$'s sibling background, $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ [190]. The HS symmetry that is associated with $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ is given in terms of the 7-dimensional $hs\,(8^*|4)$ gauge theory with $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry, consistent with our expectations from the Maldacena dualities in §3.7 [205].

12.2.7 Membrane Interactions & Perturbation Theory.

M-theory is defined as the strong coupling limit of string theory, in which $g_s \to \infty$. Accordingly, (super-)membranes are inherently non-perturbative objects. It is not generally known how to set up membrane interactions in the absence of a coupling constant. Conversely, matrix theory treats membrane interactions in a very efficient way [163].

[60] Quoting [175].

13 Introduction to Membranes

13.1 Bosonic Membranes

13.1.1 Dirac-Nambu-Goto Action

The Dirac-Nambu-Goto (DNG) [153, 165] action for a bosonic M2-brane (membrane) in $D = d + 1$ spacetime dimensions is:

$$S_{DNG} = -T_2 \int d^3\sigma \sqrt{-h}, \quad T_2 \equiv \frac{1}{(2\pi)^2 \ell_p^3}, \tag{13.1}$$

where ℓ_p is the Planck length of D-dimensional spacetime and $\sigma_a = \{\tau, \sigma_1, \sigma_2\} = \{\tau,\ \sigma,\ \delta\}$ are the membrane/worldvolume coordinates.[61] On the other hand, $g_{mn}(X)$ is the spacetime metric and h_{ab} is its induced (pull-back) metric on the membrane:

$$h_{ab} \equiv \partial_a X^m \partial_b X^n\, g_{mn}(X)\,, \quad h \equiv \det h_{ab}, \tag{13.2}$$

where X_m are the spacetime coordinates.

Equations of Motion

Varying the action w.r.t. the spacetime coordinates X_m, the following equations of motion are obtained [206]:

$$\widehat{\delta}_X S_{DNG} = 0\,^{62} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-h}}\, \partial_a \left(\sqrt{-h}\, h^{ab} \partial_b X^m\right) + h^{ab} \partial_a X^n \partial_b X^p\, \Gamma^m_{np}(X) = 0, \tag{13.3}$$

where $\Gamma^m_{np}(X)$ are the second-kind Christoffel symbols of the spacetime metric $g_{mn}(X)$.

Symmetries

Just as in the case of strings, action (13.1) inherits the (global) symmetries of the spacetime metric $g_{mn}(X)$ and in addition it possesses (local) reparametrization/diffeomorphism invariance:

$$X^{m\prime}\left(\tau', \sigma_1', \sigma_2'\right) = X^m(\tau, \sigma_1, \sigma_2) \longrightarrow \widehat{\delta} X^m = \xi_a\, \partial^a X^m \quad \text{(infinitesimal)}, \tag{13.4}$$

where $\sigma_a' = \sigma_a + \xi_a(\tau, \sigma_1, \sigma_2)$ and ξ_a are some infinitesimal vectors.

13.1.2 Polyakov Action

The (Howe-Tucker-) Polyakov [207] action for a bosonic M2-brane in $D = d+1$ spacetime dimensions is:

$$S_P = -\frac{T_2}{2} \int d^3\sigma \sqrt{-\gamma} \left(\gamma^{ab} h_{ab} - 1\right), \tag{13.5}$$

[61] See footnote 26 for a summary of the index conventions that we use.

[62] In the present part, all variations will be denoted by $\widehat{\delta}$ so as to avoid confusion with the membrane worldvolume coordinate $\sigma_2 = \delta$.

with the same conventions as above. The auxiliary metric γ_{ab} is known as the membrane/worldvolume metric.

Equations of Motion

Variation of the action functional w.r.t. the membrane metric γ_{ab}, yields the following equation of motion:

$$\widehat{\delta}_{\gamma} S_P = 0 \Rightarrow \gamma_{ab} = h_{ab}. \tag{13.6}$$

Substituting this equation back into the action (13.5), we see that the DNG and Polyakov actions are equivalent on-shell, so that upon varying (13.5) w.r.t. the spacetime coordinates X^m, the equations of motion (13.3) are retrieved.

Symmetries

Again, (13.5) inherits the (global) symmetries of the spacetime metric $g_{mn}(X)$ and possesses (local) reparametrization/diffeomorphism invariance:

$$X^{m\prime}\left(\tau', \sigma', \delta'\right) = X^m\left(\tau, \sigma, \delta\right) \longrightarrow \widehat{\delta} X^m = \xi_a\, \partial^a X^m \quad \text{(infinitesimal)} \tag{13.7}$$

$$\gamma'_{ab}\left(\tau', \sigma', \delta'\right) = \partial_a \sigma^c\, \partial_b \sigma^d\, \gamma_{cd}\left(\tau, \sigma, \delta\right) \longrightarrow \widehat{\delta}\gamma_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a, \tag{13.8}$$

where again $\sigma'_a = \sigma_a + \xi_a\left(\tau, \sigma_1, \sigma_2\right)$, ξ_a are infinitesimal vectors and ∇_a stands for the worldvolume covariant derivative.

Unlike strings, the membrane Polyakov action is no longer Weyl-invariant due to the cosmological term in the action (13.5) that is proportional to 1. The energy-momentum tensor is equal to zero and it is conserved on-shell:

$$T_{ab} \equiv \frac{-1}{T_2\sqrt{-\gamma}} \frac{\widehat{\delta} S_P}{\widehat{\delta}\gamma^{ab}} = \frac{1}{2}\left[h_{ab} - \frac{1}{2}\left(h^c_c - 1\right)\gamma_{ab}\right] : \quad \nabla^a T_{ab} = 0. \tag{13.9}$$

Wess-Zumino Term

Generally speaking, bosonic M2-branes couple to the $D = d + 1$ dimensional action (2.27) via the following Wess-Zumino (WZ) flux term [208]:

$$S_{\mathrm{WZ}} = -6\, T_2 \int d^3\sigma\, \dot{X}^m\, \partial_\sigma X^n\, \partial_\delta X^p\, A_{mnp}(X), \tag{13.10}$$

where $p = 2$. The antisymmetric 3-form field $A_{mnp}(X)$ is defined as:

$$F_4 \equiv dA_3 \quad \Leftrightarrow \quad F_{mnpq} = 3\partial_{[m} A_{npq]}, \tag{13.11}$$

with F_4 being the 4-form field in action (2.27). The membrane equations of motion are modified accordingly in order to accommodate (13.10). In $D = 11$ spacetime dimensions, action (2.27) reduces to the bosonic part of 11-dimensional supergravity.

13.1.3 Gauge-Fixing

Given an action that is invariant under reparametrizations of the 3 membrane coordinates σ_a, a total of 3 degrees of freedom can be gauged away by appropriately selecting the membrane coordinates. Since $\gamma_{ab} = h_{ab}$ is a 3×3 symmetric matrix having 6 degrees of freedom, the gauge-fixing procedure leaves 3 degrees of freedom supplemented by 3 constraints [194, 209].

An especially convenient gauge choice is the following:

$$\gamma_{00} = h_{00} = -\frac{4}{\nu^2} \cdot \det h_{ij} = -\frac{2}{\nu^2} \left\{X^i, X^j\right\}^2 \qquad \gamma_{0i} = h_{0i} = 0, \qquad i,j = 1,2, \tag{13.12}$$

where ν is a real constant that facilitates the passage to the matrix description that is going to be presented later. The Polyakov action (13.5) becomes:

$$S_P = \frac{\nu\, T_2}{4} \int d^3\sigma \left(g_{mn} \dot{X}^m \dot{X}^n - \frac{2}{\nu^2}\, g_{mn} g_{pq} \left\{X^m, X^p\right\} \left\{X^n, X^q\right\} \right). \tag{13.13}$$

The Poisson bracket $\{\_, \_\}$ is defined as in (4.2):

$$\{f\,,\, g\} \equiv \epsilon^{ij} \partial_i f \partial_j g = \partial_\sigma f\ \partial_\delta g - \partial_\delta f\ \partial_\sigma g. \tag{13.14}$$

For the conjugate momenta $\pi^m = \nu\, T_2\, \dot{X}^m / 2$, the corresponding Hamiltonian is:

$$H = \frac{\nu\, T_2}{4} \int d^2\sigma \left(g_{mn} \dot{X}^m \dot{X}^n + \frac{2}{\nu^2}\, g_{mn} g_{pq} \left\{X^m, X^p\right\} \left\{X^n, X^q\right\} \right). \tag{13.15}$$

Variation of (13.13) w.r.t. X^m gives the following equations of motion:

$$\ddot{X}^m + \Gamma^m_{nr} \dot{X}^n \dot{X}^r - \frac{4}{\nu^2} \Bigg\{ g_{pq} \Gamma^m_{nr} \left\{X^n, X^p\right\} \left\{X^r, X^q\right\} + g_{nr} \left\{\left\{X^m, X^n\right\}, X^r\right\} - $$
$$ - 2\Gamma_{nrp} \left\{X^m, X^r\right\} \left\{X^n, X^p\right\} \Bigg\} = 0. \tag{13.16}$$

The constraints are:

$$\gamma_{00} = -\frac{4}{\nu^2} \cdot \det h_{ij} \Rightarrow\ g_{mn} \dot{X}^m \dot{X}^n + \frac{2}{\nu^2}\, g_{mn} g_{pq} \left\{X^m, X^p\right\} \left\{X^n, X^q\right\} = 0 \tag{13.17}$$

$$\gamma_{0i} = 0 \Rightarrow\ g_{mn} \dot{X}^m \partial_i X^n = \Big\{ g_{mn}\, \dot{X}^m, X^n \Big\} = 0. \tag{13.18}$$

Although the procedure described above completely fixes the gauge, there will occasionally be times when the membrane coordinates σ_a, will not be uniquely specified. If the membrane time τ happens to be such a coordinate, we can set it equal to some function of the spacetime variables $\tau = \tau\left(X^m\right)$, without affecting the gauge choice or decreasing the allowed degrees of freedom. There exist two popular gauge choices, namely the static gauge $\tau = X^0$ and the light-cone gauge $\tau \propto X^0 + X^i$ (where X^i is any spatial spacetime coordinate).

In order to decide whether a certain worldvolume gauge is compatible with some time gauge (or more generally a specific membrane configuration), one has to check the equations of motion and the gauge constraints for inconsistencies. For example, the static gauge is clearly incompatible with ansatz (16.10) (and (6.78) in the case of strings), while the light-cone gauge is inconsistent with most of the ansätze that are studied in this thesis.

13.1.4 Membranes in Flat Spacetimes

In flat spacetimes $g_{mn} \mapsto \eta_{\mu\nu}$, the gauge-fixed Polyakov action (13.12)–(13.13) becomes:

$$S_P = \frac{\nu T_2}{4}\int d^3\sigma \left(\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu - \frac{2}{\nu^2}\left\{X^\mu, X^\nu\right\}\left\{X_\mu, X_\nu\right\}\right) \tag{13.19}$$

while the corresponding Hamiltonian is:

$$H = \frac{\nu T_2}{4}\int d^2\sigma \left(\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{2}{\nu^2}\left\{X^\mu, X^\nu\right\}\left\{X_\mu, X_\nu\right\}\right). \tag{13.20}$$

The Christoffel symbols vanish in flat spacetimes so that the equations of motion (13.16) and constraints (13.17)–(13.18) become:

$$\ddot{X}^\mu - \frac{4}{\nu^2}\left\{\left\{X^\mu, X^\nu\right\}, X_\nu\right\} = 0 \tag{13.21}$$

$$\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{2}{\nu^2}\left\{X^\mu, X^\nu\right\}\left\{X_\mu, X_\nu\right\} = 0 \quad \& \quad \dot{X}^\mu \partial_i X_\mu = \left\{\dot{X}^\mu, X_\mu\right\} = 0. \tag{13.22}$$

There exists a neat way to express the flat spacetime Lagrangian and equations of motion of bosonic membranes in $D = d + 1$ dimensions. Defining the spacetime light-cone coordinates $X^\pm$ as:

$$X^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X^0 \pm X^d\right) \tag{13.23}$$

and choosing the light-cone gauge

$$X^+ = \tau, \tag{13.24}$$

the above equations of motion and gauge constraints become:

$$\ddot{X}^- - \frac{4}{\nu^2}\left\{\left\{X^-, X^j\right\}, X^j\right\} = 0 \quad \& \quad \ddot{X}^j - \frac{4}{\nu^2}\left\{\left\{X^j, X^k\right\}, X^k\right\} = 0 \tag{13.25}$$

$$\dot{X}^- = \frac{1}{2}\dot{X}^j \dot{X}^j + \frac{1}{\nu^2}\left\{X^j, X^k\right\}\left\{X^j, X^k\right\} \quad \& \quad \partial_i X^- = \dot{X}^j \partial_i X^j \Leftrightarrow \left\{\dot{X}^j, X^j\right\} = 0, \tag{13.26}$$

where exceptionally $i = 1, 2$ and $j, k = 1, 2, \ldots, d-1$. The membrane Hamiltonian is given by

$$H = \frac{\nu T_2}{4}\int d^2\sigma \left(\dot{X}^j \dot{X}^j + \frac{2}{\nu^2}\left\{X^j, X^k\right\}\left\{X^j X^k\right\}\right). \tag{13.27}$$

and the total momentum in the direction X^+ is

$$p^+ = \int_0^{2\pi} \pi^+ d^2\sigma = \int_0^{2\pi} \frac{\nu T_2}{2} \cdot \dot{X}^+ d^2\sigma = \frac{\nu}{2\ell_p^3}. \tag{13.28}$$

13.2 Bosonic p-Branes

The Dirac-Nambu-Goto and Polyakov actions of M2-branes (membranes) that we saw in the previous section, may be directly generalized to higher-dimensional extended bosonic objects that are known as Mp-branes. The DNG action of a bosonic Mp-brane that lives in $D = d + 1$ spacetime dimensions ($d \geq p$) is [160, 210]:

$$S_{DNG} = -T_p \int d\tau d^p\sigma \sqrt{-h}, \tag{13.29}$$

where T_p is the tension of the Mp-brane and $\sigma_a = \{\tau, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p\}$ are the brane worldvolume coordinates. If $g_{mn}(X)$ is the spacetime metric and X_m are the corresponding coordinates, then the induced metric on the brane h_{ab} is given by:

$$h_{ab} \equiv \partial_a X^m \partial_b X^n \, g_{mn}(X), \quad h \equiv \det h_{ab} = \frac{1}{(p+1)!} \{X^{m_1}, X^{m_2}, \ldots, X^{m_{p+1}}\}^2, \tag{13.30}$$

where the classical Nambu bracket $\{\_, \_, \ldots, \_\}$ is defined as:[63]

$$\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \equiv \epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} \partial_{i_1} f_1 \, \partial_{i_2} f_2 \, \ldots \, \partial_{i_n} f_n. \tag{13.31}$$

The Polyakov action for bosonic Mp-branes is:

$$S_P = -\frac{T_p}{2} \int d\tau d^p\sigma \sqrt{-\gamma} \left[\gamma^{ab} h_{ab} - (p-1)\right], \tag{13.32}$$

where γ_{ab} is the worldvolume (auxiliary) metric of the p-brane. The equations of motion and the symmetries of each of the p-brane actions, are identical to those that were found above for M2-branes, i.e. (13.3)–(13.6) and local reparametrization/diffeomorphism invariance. P-branes also couple to the action (2.27) via a Wess-Zumino (WZ) flux term:

$$S_{\text{WZ}} = -\frac{T_p}{(p+1)!} \int d\tau d^p\sigma \, \epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_{p+1}} \partial_{i_1} X^{m_1} \, \partial_{i_2} X^{m_2} \, \ldots \, \partial_{i_{p+1}} X^{m_{p+1}} \, A_{m_1 m_2 \ldots m_{p+1}}(X), \tag{13.33}$$

where again,

$$F_{p+2} \equiv dA_{p+1} \quad \Leftrightarrow \quad F_{m_1 m_2 \ldots m_{p+1}} = (p+1) \, \partial_{[m_1} A_{m_2 m_3 \ldots m_{p+2}]}. \tag{13.34}$$

The gauge may again be fixed as before (13.12) by taking advantage of the diffeomorphism invariance of the Polyakov action (13.32) and reduce the initial $(p+1)(p+2)/2$ degrees of freedom that are present in the worldvolume metric $\gamma_{ab} = h_{ab}$, to $p(p+1)/2$ degrees of freedom. In a flat Minkowski spacetime, the (uncharged) p-brane equations of motion and gauge constraints become:

$$\ddot{X}^\mu - \frac{4}{\nu^2 (p-1)!} \left\{\{X^\mu, X^{\mu_1}, \ldots, X^{\mu_{p-1}}\}, X_{\mu_1}, \ldots, X_{\mu_{p-1}}\right\} = 0 \tag{13.35}$$

$$\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{4}{\nu^2 p!} \{X^{\mu_1}, \ldots, X^{\mu_p}\}^2 = 0 \qquad \& \qquad \dot{X}^\mu \partial_i X_\mu = 0 \tag{13.36}$$

[63] For more, see [211] and references therein.

and the corresponding Hamiltonian is:

$$H = \frac{\nu T_2}{4} \int d^2\sigma \left(\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{4}{\nu^2 p!} \left\{ X^{\mu_1}, \ldots, X^{\mu_p} \right\}^2 \right). \tag{13.37}$$

13.2.1 Volume-Preserving Diffeomorphisms

There exists an interesting property of the classical Nambu bracket that permits to identify the group of area preserving diffeomorphisms with a residual symmetry of the gauge-fixed p-brane. We have implicitly used this property while fixing the gauge in (13.12)–(13.30). Generally speaking, the classical Nambu bracket obeys the following identity:

$$\det \left(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \right) = \frac{1}{p!} \left\{ X^{\mu_1}, X^{\mu_2}, \ldots, X^{\mu_p} \right\}^2 \tag{13.38}$$

so that the spatial worldvolume of the Mp-brane is given by:

$$\int_\Sigma d^p\sigma \sqrt{\det \left(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \right)} = \int_\Sigma d^p\sigma \sqrt{\frac{1}{p!} \cdot \left\{ X^{\mu_1}, X^{\mu_2}, \ldots, X^{\mu_p} \right\}^2}. \tag{13.39}$$

We see that the flat bosonic p-brane Hamiltonian (13.37) is invariant under time-independent transformations that preserve the spatial worldvolume (13.39). These are known as volume-preserving diffeomorphisms, SDiff(Σ). The statement affords appropriate generalizations to curved spacetimes and supersymmetric branes.

M2-branes are invariant under area-preserving diffeomorphisms. As we have mentioned in §12.2.5, SDiff(S^2) can be approximated by $\mathfrak{su}\,(N \to \infty)$, where N is the matrix dimensionality of the regularized membrane. Similar statements can be made for higher-genus membranes.

13.3 Supermembranes

As we have said in §12.1.3 the higher-dimensional generalizations of superstrings (i.e. super p-branes) favor the Green-Schwarz (GS) formulation, where spacetime supersymmetry is manifest rather than worldvolume supersymmetry. We saw back in §3.4 that the GS formalism was also useful in writing down the Lagrangian of IIB string theory in $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$.

In this short section we are going to skim through the GS formulation of the 11-dimensional supermembrane. More can be found in the original article [171], as well as the reviews [159, 160]. The generalization to higher spacetime and worldvolume dimensions is rather straightforward if only a little problematic, as we have extensively discussed in $12.2.

Let Z^M encode the bosonic/fermionic coordinates of the curved target superspace:

$$Z^M = \left(X^m, \theta_\alpha \right), \qquad M = (m, \alpha), \quad m = 0, \ldots, 11, \quad \alpha = 1, \ldots, 32 \tag{13.40}$$

and Π_a^A be the pull-back of the corresponding supervielbein E_M^A:

$$\Pi_a^A = \partial_a Z^M E_M^A, \qquad A = (\mu, \dot{\alpha}), \quad \mu = 0, \ldots, 11,, \quad \dot{\alpha} = 1, \ldots, 32, \quad a = 0, 1, 2. \tag{13.41}$$

Then the action of the 11-dimensional supermembrane is given by

$$S = -T_2 \int d^3\sigma \left\{ \sqrt{-h} + \epsilon^{abc} \Pi_a^A \Pi_b^B \Pi_c^C B_{CBA} \right\}, \tag{13.42}$$

where the three-form field B_{CBA} couples to 11-dimensional supergravity, appropriately formulated in superspace [212], and

$$h_{ab} \equiv \gamma^{ab} \Pi_a^\mu \Pi_b^\nu \eta_{\mu\nu}, \qquad h \equiv \det h_{ab}. \tag{13.43}$$

Alternatively, the supermembrane action can be expressed via the auxiliary metric γ_{ab} as follows:

$$S = -\frac{T_2}{2} \int d^3\sigma \left\{ \sqrt{-\gamma} \left[\gamma^{ab} h_{ab} - 1 \right] + 2\epsilon^{abc} \Pi_a^A \Pi_b^B \Pi_c^C B_{CBA} \right\}. \tag{13.44}$$

Actions (13.42)–(13.44) are invariant under 3-dimensional reparametrizations/diffeomorphisms of the superspace coordinates Z^M as well as local fermionic κ-transformations. As a function of the background fields E_M^A and B_{CBA}, (13.42)–(13.44) are also invariant under 11-dimensional gauge transformations. As in the case of bosonic membranes, (13.42)–(13.44) may be varied w.r.t. the superspace coordinates Z^M and the worldvolume metric γ_{ab}, giving rise to the supermembrane analogs of the bosonic equations of motion (13.3)–(13.6).

To obtain the supermembrane action in flat 11-dimensional spacetime, we must set:

$$E_m^\mu = \delta_m^\mu, \qquad E_m^\alpha = 0 \tag{13.45}$$

$$E_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha, \qquad E_\alpha^\mu = -i \left(\Gamma^\mu\right)_{\alpha\beta} \theta^\beta \tag{13.46}$$

$$B_{mn\alpha} = -\frac{i}{6} \left(\Gamma_{mn}\theta\right)_\alpha, \qquad B_{m\alpha\beta} = -\frac{1}{6} \left(\Gamma_{mn}\theta\right)_{(\alpha} \left(\Gamma^n\theta\right)_{\beta)} \tag{13.47}$$

$$B_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{i}{6} \left(\Gamma_{\mu\nu}\theta\right)_{(\alpha} \left(\Gamma^\mu\theta\right)_\beta \left(\Gamma^\nu\theta\right)_{\gamma)}, \qquad B_{mnr} = 0, \tag{13.48}$$

where θ_α are 32-component Majorana spinors and $E_{\hat{\alpha}}^\alpha = \delta_{\hat{\alpha}}^\alpha$. The flat spacetime action then becomes,

$$S = -\frac{T_2}{2} \int d^3\sigma \Bigg\{ \sqrt{-\gamma} \left[\gamma^{ab} \Pi_a^\mu \Pi_{b\mu} - 1 \right] + \\ + i\epsilon^{abc} \left(\bar{\theta}\Gamma_{mn}\partial_a\theta\right) \left[\Pi_b^m \Pi_c^n + i\Pi_b^m \left(\bar{\theta}\Gamma^n \partial_c\theta\right) - \frac{1}{3} \left(\bar{\theta}\Gamma^m\partial_b\theta\right) \left(\bar{\theta}\Gamma^n\partial_c\theta\right) \right] \Bigg\}, \tag{13.49}$$

where

$$\Pi_a^m = \partial_a X^m - i\bar{\theta}\Gamma^m\partial_a\theta. \tag{13.50}$$

In addition to local reparametrization and κ-invariance, (13.49) is invariant under the super-Poincaré transformations. As before, we may go on to fix the gauge as in (13.12) and obtain the corresponding equations of motion and constraints in the standard way. The fermionic κ-symmetry of the supermembrane is fixed as follows:

$$\Gamma^+\theta = 0, \tag{13.51}$$

where the 11-dimensional (32×32) light-cone gamma matrices are defined as:

$$\Gamma^{+} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma^{0}+\Gamma^{10}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2}i & 0 \end{pmatrix} \tag{13.52}$$

$$\Gamma^{-} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\Gamma^{0}+\Gamma^{10}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13.53}$$

$$\Gamma^{i} \equiv \begin{pmatrix} \gamma_i & 0 \\ 0 & -\gamma_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, 9, \tag{13.54}$$

where γ_i are 16×16 Euclidean gamma matrices ($\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}$). If we further fix the light-cone gauge as in (13.24) the corresponding supermembrane Hamiltonian gets significantly simplified. The result is:

$$H = \frac{\nu T_2}{4}\int d^2\sigma \left[\dot{X}^j\dot{X}^j + \frac{2}{\nu^2}\left\{X^j, X^k\right\}\left\{X^j X^k\right\} - \frac{4}{\nu}\,\theta^T\gamma_i\left\{X^i, \theta\right\}\right], \tag{13.55}$$

where θ stand for 16-component Majorana spinors.

In §3.4 we formulated the IIB superstring action on $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ à la Metsaev and Tseytlin, that is by writing it as a nonlinear sigma model (NLSM) in the super-coset space (3.10). With the full GS supermembrane formalism at our disposal, we may similarly proceed and set up the supermembrane Lagrangians in the curved 11-dimensional AdS/CFT backgrounds that are part of exact solutions of 11-dimensional supergravity, namely $\text{AdS}_{4,7} \times \text{S}^{7,4}$. The corresponding super-coset spaces are:

$$\frac{F_1}{G_1} = \frac{\mathfrak{osp}\,(8|4)}{\mathfrak{so}\,(3,1)\times\mathfrak{so}\,(7)} \qquad \& \qquad \frac{F_2}{G_2} = \frac{\mathfrak{osp}\,(6,2|4)}{\mathfrak{so}\,(6,1)\times\mathfrak{so}\,(4)}. \tag{13.56}$$

More about the supermembrane action in these backgrounds can be found in the papers [213].

13.3.1 11-Dimensional Supergravity

Let us now briefly examine the theory that couples to the 11-dimensional supermembrane, that is 11-dimensional supergravity. More can be found in the original Cremmer-Julia-Scherk (CJS) paper [214] as well as in many textbooks, e.g. [215].

The Lagrangian of 11-dimensional supergravity (1_{11} sugra for short) is built out of three fields, the graviton/elfbein e_m^{μ}, Majorana gravitino ψ_m and the antisymmetric 3-form field A_{mnp} (13.11):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& -\frac{e}{2\kappa_{11}^2}R - \frac{ie}{2}\overline{\psi}_m\Gamma^{mnr}D_n\psi_r - \frac{e}{48}F_{mnrs}F^{mnrs} + \frac{\sqrt{2}\,e\,\kappa_{11}}{384}\left(\overline{\psi}_m\Gamma^{mnrspq}\psi_n + 12\overline{\psi}^r\Gamma^{pq}\psi^s\right)\Bigg(F_{rspq}+ \\ &+\hat{F}_{rspq}\Bigg) + \frac{\sqrt{2}\,\kappa_{11}}{144^2}\,\epsilon^{m_1\ldots m_{11}}F_{m_1\ldots m_4}F_{m_5\ldots m_8}A_{m_n\ldots m_{11}}\ ,\end{aligned} \tag{13.57}$$

where we have followed the conventions of the CJS paper according to which $\eta_{\mu\nu} = (+,-,-,\ldots,-)$,[64]

$$K_{m\rho\sigma} \equiv \frac{i\kappa_{11}^2}{8}\left[-\overline{\psi}_p\Gamma_{m\rho\sigma}{}^{pq}\psi_q + \left(\overline{\psi}_m\Gamma_\sigma\psi_\rho - \overline{\psi}_m\Gamma_\rho\psi_\sigma + \overline{\psi}_\sigma\Gamma_m\psi_\rho\right)\right] \tag{13.58}$$

[64] With the exception of the present paragraph, the metric we have been using in this thesis is a "mostly plus" metric. However we are a bit sloppy with our notation in this section, since our main purpose is to briefly present the original formulation of 11-dimensional supergravity without going into too many details.

$$\omega_{m\rho\sigma} \equiv \omega^0_{m\rho\sigma} + K_{m\rho\sigma} \quad \& \quad \hat{\omega}_{m\rho\sigma} \equiv \omega_{m\rho\sigma} + \frac{i\kappa_{11}^2}{8}\,\overline{\psi}_p \Gamma_{m\rho\sigma}{}^{pq}\psi_q \tag{13.59}$$

$$D_n \equiv \partial_n + \frac{1}{8}\left(\omega_{n\rho\sigma} + \hat{\omega}_{n\rho\sigma}\right)\Gamma^{\rho\sigma} \tag{13.60}$$

$$F_{mnrs} \equiv 4\partial_{[m}A_{nrs]} \quad \& \quad \hat{F}_{mnrs} \equiv F_{mnrs} - \frac{3\kappa_{11}}{\sqrt{2}}\,\psi_{[m}\Gamma_{nr}\psi_{s]}, \tag{13.61}$$

$\kappa_{11}^2 \equiv 8\pi G_{11}$, e is the elfbein determinant $e \equiv \det e^\mu_m = \sqrt{-g}$ and $\omega^0_{m\rho\sigma}$ is the Christoffel connection. Care should be taken as to distinguish between the Christoffel symbols of §13.1 and the 32×32 Dirac gamma matrices in $D = 11$ dimensions that appear in the present section:

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \qquad \Gamma^m = e^m_\mu \Gamma^\mu. \tag{13.62}$$

Note also that $\{\ ,\ \}$ stands for the anti-commutator and not the Poisson bracket (13.14) of §13.1. The bosonic part of the action (13.57) is obtained by setting the gravitino field ψ_m equal to zero:

$$\mathcal{L}_B = -\frac{e}{2\kappa_{11}^2}R - \frac{e}{48}F_{mnrs}F^{mnrs} + \frac{\sqrt{2}\kappa_{11}}{144^2}\,\epsilon^{m_1\ldots m_{11}}F_{m_1\ldots m_4}F_{m_5\ldots m_8}A_{m_n\ldots m_{11}}. \tag{13.63}$$

13.4 M(atrix) Theory

13.4.1 Matrix-Regularized Membranes

2-dimensional spherical surfaces may be regularized by an ingenious method that was devised by Goldstone and Hoppe in 1982 [194]. Consider a 2-dimensional unit sphere,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{13.64}$$

in spherical coordinates:

$$x_1 = \cos\varphi \sin\vartheta, \quad x_2 = \sin\varphi\sin\vartheta, \quad x_3 = \cos\vartheta. \tag{13.65}$$

For the worldvolume variables $\sigma_1 = \varphi$, $\sigma_2 = \cos\vartheta$, the Poisson brackets of x_i's satisfy,

$$\{x_i, x_j\} = e_{ijk}x_k, \tag{13.66}$$

which is very reminiscent of the $\mathfrak{su}\,(2)$ algebra. One is then tempted to make the following replacements:

$$x_i \mapsto \frac{2}{N}\mathbf{J}_i, \qquad \{\ ,\ \} \mapsto -\frac{iN}{2}[\ ,\ ], \qquad \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma \ldots, \mapsto \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,[\ldots] \tag{13.67}$$

where the $N \times N$ matrices $\mathbf{J}_i$ furnish a representation of $\mathfrak{su}\,(2)$ with spin equal to $(N-1)/2$:

$$[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = ie_{ijk}\mathbf{J}_k. \tag{13.68}$$

Replacement rules (13.67) suggest a way to regularize gauge-fixed spherical bosonic membranes in flat backgrounds that are described by the system (13.25)–(13.27). Spatial spacetime coordinates X^i are upgraded to $N \times N$ matrices $\mathbf{X}^i$, Poisson brackets are replaced by commutators and integrals by traces as follows:

$$x_i \mapsto \mathbf{X}_i, \qquad \{\ ,\ \} \mapsto -\frac{iN}{2}[\ ,\ ], \qquad \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma \ldots, \mapsto \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,[\ldots]. \tag{13.69}$$

With (13.69), the Hamiltonian (13.27) becomes:

$$H = \frac{1}{2\pi\ell_p^3} \cdot \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{X}}^i\dot{\mathbf{X}}^i - \frac{1}{4}\left[\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j\right]\left[\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j\right]\right), \tag{13.70}$$

where ν in (13.27) has been set equal to the matrix dimensionality N. The regularized (spatial) equations of motion and constraints (13.25)–(13.26) become:

$$\ddot{\mathbf{X}}^i + \left[\left[\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j\right], \mathbf{X}^k\right] = 0 \quad \& \quad \left[\dot{\mathbf{X}}^i, \mathbf{X}^j\right] = 0. \tag{13.71}$$

To go supersymmetric, rules (13.69) are applied to the susy Hamiltonian (13.55). The result is known as Matrix Theory [216]:

$$\boxed{H_0 = \frac{1}{2\pi\ell_p^3} \cdot \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{X}}^i\dot{\mathbf{X}}^i - \frac{1}{4}\left[\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j\right]\left[\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j\right] + \theta^T\gamma_i\left[\mathbf{X}^i, \theta\right]\right)}, \tag{13.72}$$

which although it has been derived only for spherical membranes,[65] it can be directly generalized to supersymmetric membranes of arbitrary topologies with the replacement rule (13.69).

We have already mentioned in §12.2.1 that the theory of classical (bosonic and supersymmetric) membranes suffers from incurable instabilities that apparently hinder all reasonable attempts to quantize the theory. Matrix theory however appears to cure the problem in the case of bosonic membranes (13.70). The reasoning is this: flat directions ("spikes") are eventually disfavored because they give rise to a large effective confining potential that stabilizes the system.

On the other hand, super-matrix theory (13.72) resurrects instabilities in the form of continuous supermembrane spectra [186]. The fermionic contribution to the zero-point energy of the membrane is exactly the opposite of the bosonic one, so that the supermembrane spectrum is no longer discrete (I) and cannot be possibly associated to particles. As we will see below, the BFSS conjecture [218] provides a very satisfactory explanation for this fact, which ceases to be problematic.

13.4.2 The Matrix Theory Conjecture

The matrix theory conjecture (aka. BFSS conjecture) [218], strengthened the intimate connection between the theory of quantum supermembranes and M-theory that was first established by Townsend during the M-theory revolution. Banks, Fischler, Shenker and Susskind (BFSS) observed that the low-energy Hamiltonian of N, type IIA D0-branes is precisely equivalent to the matrix theory (13.72). Since IIA string theory arises from the compactification of M-theory on S^1 and the latter becomes non-relativistic in the infinite-momentum frame (IMF), BFSS concluded that:

$$\left.\begin{array}{r} \#N \to \infty,\ \text{(non-relativistic) type IIA D0-branes} \\ \mathfrak{su}(\infty)\ \text{ susy QM (13.72)} \end{array}\right\} = \begin{array}{c} \text{M-theory compactified} \\ \text{on the IMF.} \end{array} \tag{13.73}$$

With the matrix theory conjecture, the problem of continuous supermembrane spectra is resolved because supermembranes are treated not as elementary objects but as composite ones that are made up from gravitons = D0-branes. The energy of a system that contains two or more gravitons can

[65] The case of the 2-torus can be studied along the lines of the 2-sphere. More can be found in [217].

take any value whatsoever and super-matrix theory with $N \geq 2$ contains multi-particle states with continuous spectra.

The finite-N version of the matrix theory conjecture was put forward in 1997 by Susskind [219]. Instead of M-theory on the IMF, finite-N matrix theory (13.72) is equivalent to a sector of M-theory where the retarded time x^- has been periodically identified. This is generally known as discrete light-cone quantization (DLCQ):

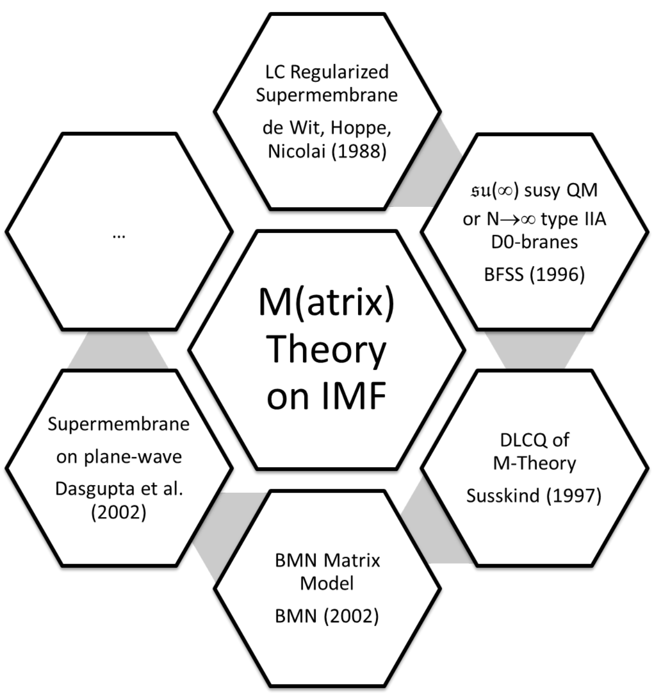
$$\left.\begin{array}{r}\#N \text{ (low-energy) type IIA D0-branes} \\ \mathfrak{su}\,(N) \text{ susy QM (13.72)}\end{array}\right\} = \begin{array}{l}\text{DLCQ Sector of M-theory with} \\ \#N \text{ units of compact momentum.}\end{array} \tag{13.74}$$

In sum, matrix theory is an inherently many-body theory that provides a second-quantized model of M-theory in flat 11-dimensional target space. Gravitational interactions in matrix theory arise through the inclusion of quantum effects.

13.4.3 Matrix Theory in Curved Backgrounds

The matrix theory Hamiltonian (13.72) and the corresponding matrix theory conjectures (13.73)–(13.74) have been formulated and are only valid in flat 11-dimensional backgrounds. It is natural to want to set up matrix models of M-theory on curved 11-dimensional backgrounds and especially plane-wave backgrounds and $\mathrm{AdS}_{4,7} \times \mathrm{S}^{7,4}$ spacetimes that are directly related to exact solutions of 11-dimensional supergravity.

A DLCQ description of 6-dimensional $\mathrm{A}_{N-1}\,(2,0)$ SCFT theory, that as we saw in §3.7 is the holographic dual of M-theory on $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ has been proposed in [220]. It is based on quantum mechanics on some appropriately defined large-instanton moduli space. Matrix theory on weakly curved backgrounds has been studied by Taylor and Van Raamsdonk [221].



In 2002, Berenstein, Maldacena and Nastase (BMN) [43] proposed a matrix model description of the DLCQ of M-theory on the following (homogeneous) plane-wave background (C.5):

$$ds^2 = -2dudv - \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\mu^2}{9} x^i x^i - \sum_{j=4}^{9} \frac{\mu^2}{36} x^j x^j\right] du^2 + \sum_{i=1}^{9} dx^i dx^i. \tag{13.75}$$

The DLCQ of M-theory on the homogeneous plane-wave (13.75) is given by the following Hamiltonian:

$$H = H_0 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\mu^2}{9}\,\mathbf{X}_i^2 + \sum_{j=4}^{9} \frac{\mu^2}{36}\,\mathbf{X}_j^2 - \frac{i\mu}{8}\,\theta^T \gamma_{123}\,\theta - \frac{2i\mu}{3}\,\epsilon^{ijk}\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k\right). \tag{13.76}$$

For simplicity, we have omitted the overall Planck length factor. The authors of [222] have showed that the BMN matrix model (13.76) can be derived either by regularizing the supermembrane on the plane-wave background (13.75), or from the dynamics of type IIA D0-branes.

Part IV
Rotating Membranes

14 Introduction and Motivation

Having introduced supersymmetric branes and presented the main ideas about them, we are ready to zoom on AdS/CFT correspondence and ask whether the study of branes as individual entities can elucidate certain aspects of the duality and contribute to the redaction of its "dictionary". However, one has to realize that the procedure of turning from particles and strings to p-branes can occasionally be quite murky. Instabilities, anomalies, non-renormalizability, non-integrability, elusive quantization, non-interactivity and nonexistent perturbation theory, are some of the issues that have always plagued Mp-branes, as saw in §12.2. These issues are very likely to persist in AdS/CFT. Therefore, a down-to-earth strategy would suggest investing only in those traits of branes that stand greater chances of fitting in a self-consistent framework.

In this spirit, we have chosen to focus on the study of stringy properties of classical M2-branes that live in the 11-dimensional spacetimes that are relevant to the AdS/CFT correspondence. As we have explained in §12.2, M2-branes in curved 11-dimensional backgrounds such as $\mathrm{AdS}_m \times \mathrm{S}^n$ are relatively immune to most of the usual "maladies" of Mp-brane virology. Even in the worst-case scenario where 11-dimensional M2-branes in anti-de Sitter spacetime turn out to be unreliable to work with, we have chosen to invest in perhaps their most reliable aspect, that is their stringy behavior. The purpose of part IV of this thesis is therefore twofold:

1. Elucidate the role of individual Mp-branes in AdS/CFT.

2. Study the stringy aspects of M2-branes in the context of AdS/CFT correspondence.

In part II of the thesis, we studied extensively the three basic string setups of GKP and explained in detail all of their virtues with regard to the AdS/CFT correspondence. The GKP strings convey important information about the scaling of the dual gauge theory states at strong coupling, which is impossible to obtain by other (i.e. perturbative) means. In the present part, we will prove an interesting property of anti-de Sitter membranes, namely that they are capable of encoding all the dynamics of anti-de Sitter GKP strings. In fact AdS membranes are capable of reproducing not only the anti-de Sitter GKP strings, but any classical string configuration in $\mathrm{AdS}_5 \subset \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$.

"Stringy membranes" are literally membrane configurations in a stringy disguise. They are defined in spacetimes with a compact submanifold, such as all the backgrounds that are related to the AdS/CFT correspondence (listed in §3.7). Their essential property is that they are wrapped around one of the compact dimensions of the background and they reproduce the action, equations of motion and conserved charges of a string that lives in the non-compact part of spacetime. There are two interesting consequences of this construction. Firstly, at the level of classical quadratic fluctuations of stringy membranes in $\mathrm{AdS}_m \times \mathrm{S}^n$ there seems to exist an infinite set of purely membrane modes, in addition to the set of purely stringy ones. Secondly, just as the $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ parameter matching affords to strings in the bulk of AdS an effective string tension that is equal to the square root of the 't Hooft coupling $\sqrt{\lambda}$, stringy membranes are similarly endowed with an effective tension that is equal to $\sqrt{\lambda'} = R\sqrt{\lambda}/g_s\,\ell_s$.[66]

One family of stringy membranes with the above properties can be obtained by embedding the bosonic string (conformal) Polyakov action in AdS_5 into the Polyakov action of membranes in

[66] R denotes the radius of the compact dimension, g_s is the string coupling constant and ℓ_s is the fundamental string length.

$AdS_7 \times S^4$. It can then be shown that the action, equations of motion and Virasoro constraints of every string solution in AdS_5 can be reproduced by a properly constructed membrane of $AdS_7 \times S^4$. Similarly, every string configuration in $AdS_4 \subset AdS_5$ can be reproduced by a stringy membrane of $AdS_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$. As an illustration of the properties of stringy membranes, we may write down membrane ansätze that reproduce the dynamics of the two anti-de Sitter GKP configurations, namely the rotating GKP string (I) that we examined in §6.1 and the pulsating GKP string (III) that we examined in §6.3. To further investigate the true relationship between the stringy membranes and the string solutions that they reproduce, we may analyze the spectrum of quadratic fluctuations around the corresponding stringy membranes. For the two stringy membranes that reproduce the GKP strings, we find that a decoupled subset of fluctuations that is transverse to the direction of the stringy membrane admits a Lamé multi-band/multi-gap structure, which uniquely characterises their membrane nature. On the other hand, string excitations are represented by a single-band/single-gap pattern. These findings confirm the picture that we have of membranes as collective excitations of some stringy counterparts.

Thus we see that the study of classical membranes à la GKP begins to pay off. More will be said in the discussion section §18, but let us give a brief overview here. Because of the way we constructed them, we have all the reasons to expect that stringy membranes will correspond to certain string-like operators of the dual SCFTs. For example, the GKP configuration (I), given by (6.8) is dual to twist-2 operators (6.2). The stringy membrane that reproduces GKP (I) should also be dual to twist-2 SCFT operators like (6.2). The state-operator correspondence is also likely to be applicable here and the energies of stringy membranes are expected to equal the scaling dimensions of the stringy gauge theory operators. Without stringy membranes we had no way to find SCFT operators that are dual to M-theory states, especially in theories like the 6-dimensional $\mathrm{A}_{N_c-1}\,(2,0)$ SCFT about which very few things are known. The stringy limit of AdS/CFT membranes teaches us that stringy membranes are mapped to the gauge theory operators that are dual to the strings they reproduce and that the scaling dimensions of the latter are equal to the energies of the stringy membranes.

A second lesson that we draw from stringy membranes is that M-theory in backgrounds such as $AdS_{4,7} \times S^{7,4}$, most probably has certain classically integrable "stringy" sectors, where all the technology and methods from the integrable $AdS_5 \times S^5$ string paradigm can be imported. The reason for this is simple: stringy membranes have the same action and equations of motion with bosonic strings in $AdS_5 \subset AdS_5 \times S^5$, which are known to be classically integrable [58] (see also §5.2). Therefore they too are expected to be classically integrable. Stringy membranes also seem to confirm a conjecture that was put forward some time ago [201], that the various AdS/CFT dualities possess common integrable sectors. As this conjecture awaits for a rigorous proof (probably coming from integrability), stringy membranes further suggest that the "family" of theories with common integrable sectors could actually be bigger and contain, apart from the AdS/CFT group, other theories like QCD and ABJM.

Part IV is organized as follows. §15 is a brief introduction to classical bosonic membranes in $AdS_7 \times S^4$. In §16 we present stringy membranes. We examine two principal ansätze of stringy membranes in $AdS_7 \times S^4$ that fully reproduce the action and equations of motion of the GKP spinning string configurations in AdS: (I) the AdS_3 closed & folded GKP string (6.8) and (III) the AdS_3 pulsating GKP string (6.78). Subsequently, we prove (along the general lines of the paper [223]) that the on-shell action, equations of motion and conserved charges of bosonic strings that live in $AdS_5 \subset AdS_5 \times S^5$ can be reproduced by appropriate membrane ansätze in $AdS_7 \times S^4$. Analogous statements are formulated for bosonic strings in $AdS_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$ in §16.2–§16.3. In §17 we examine the stability of the two stringy membranes that correspond to the GKP strings (I) and (III). A summary and a discussion of stringy membranes can be found in §18.

15 Spinning Membranes in $\text{AdS}_7 \times \text{S}^4$

In this section we will briefly consider classical and uncharged (WZ term (13.10) is absent) bosonic membranes in $\text{AdS}_7 \times \text{S}^4$,[67]

$$
\begin{aligned}
& Y_{07} = Y_0 + iY_7 = 2\cosh\rho\, e^{it} && X_{12} = X_1 + iX_2 = \cos\overline{\theta}_1\, e^{i\overline{\phi}_1} \\
& Y_{12} = Y_1 + iY_2 = 2\sinh\rho\cos\theta_1\, e^{i\phi_1} \qquad \& && X_{34} = X_3 + iX_4 = \sin\overline{\theta}_1\cos\overline{\theta}_2\, e^{i\overline{\phi}_2} \\
& Y_{34} = Y_3 + iY_4 = 2\sinh\rho\sin\theta_1\cos\theta_2\, e^{i\phi_2} && X_5 = \sin\overline{\theta}_1\sin\overline{\theta}_2 \\
& Y_{56} = Y_5 + iY_6 = 2\sinh\rho\sin\theta_1\sin\theta_2\, e^{i\phi_3}, &&
\end{aligned} \tag{15.1}
$$

where Y^μ and X^i are the embedding coordinates of $\text{AdS}_7 \times \text{S}^4$ and $\rho \geq 0$, $t \in [0,\, 2\pi)$,[68] $\theta_1,\, \overline{\theta}_1 \in [0,\, \pi]$, and $\theta_2,\, \phi_1,\, \phi_2,\, \phi_3,\, \overline{\theta}_2,\, \overline{\phi}_1,\, \overline{\phi}_2 \in [0,\, 2\pi)$. The $\text{AdS}_7 \times \text{S}^4$ line element is given by:

$$
\begin{aligned}
ds^2 = {} & G^{\text{AdS}}_{mn}(y)dy^m dy^n + G^{\text{S}}_{mn}(x)dx^m dx^n = \\
& = 4\Big[-\cosh^2\rho\, dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho\left(d\theta_1^2 + \cos^2\theta_1\, d\phi_1^2 + \sin^2\theta_1\left(d\theta_2^2 + \cos^2\theta_2 d\phi_2^2 + \right.\right. \\
& \left.\left. + \sin^2\theta_2 d\phi_3^2\right)\right)\Big] + \Big[d\overline{\theta}_1^2 + \cos^2\overline{\theta}_1\, d\overline{\phi}_1^2 + \sin^2\overline{\theta}_1\, \left(d\overline{\theta}_2^2 + \cos^2\overline{\theta}_2\, d\overline{\phi}_2^2\right)\Big],
\end{aligned} \tag{15.2}
$$

where $y^m \equiv (t,\, \rho,\, \theta_1,\, \theta_2,\, \phi_1,\, \phi_2,\, \phi_3)$ and $x^m \equiv \left(\overline{\theta}_1,\, \overline{\theta}_2,\, \overline{\phi}_1,\, \overline{\phi}_2\right)$. With the gauge choice (13.12), the membrane Polyakov action (13.13) becomes (for $\nu = 2$) in $\text{AdS}_7 \times \text{S}^4$ (15.2):

$$
\begin{aligned}
S_P = \frac{T_2}{2}\int \Big[& G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\dot{y}^m\dot{y}^n + G^{\text{S}}_{mn}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n - \frac{1}{2}G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{AdS}}_{pq}(y)\{y^m, y^p\}\{y^n, y^q\} - \\
& - \frac{1}{2}G^{\text{S}}_{mn}(x)G^{\text{S}}_{pq}(x)\{x^m, x^p\}\{x^n, x^q\} - G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{S}}_{pq}(x)\{y^m, x^p\}\{y^n, x^q\}\Big] d\tau\, d\sigma\, d\delta.
\end{aligned} \tag{15.3}
$$

The constraints (13.17)–(13.18) that follow from gauge-fixing (13.12) become ($i, j = 1, 2,\ \nu = 2$):

$$
\begin{aligned}
\gamma_{00} = & -\det h_{ij} \Rightarrow G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\dot{y}^m\dot{y}^n + G^{\text{S}}_{mn}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n + \frac{1}{2}G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{AdS}}_{pq}(y)\{y^m, y^p\}\{y^n, y^q\} + \\
& + \frac{1}{2}G^{\text{S}}_{mn}(x)G^{\text{S}}_{pq}(x)\{x^m, x^p\}\{x^n, x^q\} + G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{S}}_{pq}(x)\{y^m, x^p\}\{y^n, x^q\} = 0
\end{aligned} \tag{15.4}
$$

$$
\gamma_{0i} = G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\,\dot{y}^m\partial_i y^n + G^{\text{S}}_{mn}(x)\dot{x}^m\partial_i x^n = 0 \Rightarrow \Big\{G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\,\dot{y}^m, y^n\Big\} + \Big\{G^{\text{S}}_{mn}(x)\,\dot{x}^m, x^n\Big\} = 0. \tag{15.5}
$$

The action (15.3) and the constraints (15.4)–(15.5) are invariant under the global isometry group of $\text{AdS}_7 \times \text{S}^4$, that is $\mathfrak{so}(6,2) \times \mathfrak{so}(5)$. The following 28 + 10 Noether charges (spins and angular

[67] In $\text{AdS}_7 \times \text{S}^4$ it's $\mathfrak{k} = \ell/R = 2$, as we saw in §3.7. Then, for $R = 1 \Leftrightarrow \ell = 2$. R and ℓ may be restored in all of the formulas of part IV, by setting $\delta \mapsto \delta/R$ and $\delta \in [0,\, 2\pi R)$.

[68] To avoid time periodicity (a typical feature of anti-de Sitter spacetime) we must consider the universal covering space of AdS, in which $t \in \mathbb{R}$.

momenta) are conserved on-shell:

$$S^{\mu\nu} = T_2 \int_0^{2\pi} \left(Y^\mu \dot{Y}^\nu - Y^\nu \dot{Y}^\mu\right) d\sigma d\delta, \qquad \mu\,,\nu = 0, 1, \ldots, 7 \tag{15.6}$$

$$J^{ij} = T_2 \int_0^{2\pi} \left(X^i \dot{X}^j - X^j \dot{X}^i\right) d\sigma d\delta, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, 5. \tag{15.7}$$

Certain charges among (15.6)–(15.7) correspond to the cyclic coordinates of the action (15.3), namely t, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, $\overline{\phi}_1$, $\overline{\phi}_2$. The expressions for the cyclic charges can be directly read off from (15.3), by using the corresponding line element (15.2):

$$E = \left|\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right| = 4\,T_2 \int_0^{2\pi} \dot{t} \cosh^2 \rho \, d\sigma d\delta = S^{07} \tag{15.8}$$

$$S_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = 4\,T_2 \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_1 \sinh^2 \rho \, \cos^2 \theta_1 \, d\sigma d\delta = S^{12} \tag{15.9}$$

$$S_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = 4\,T_2 \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_2 \sinh^2 \rho \, \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \, d\sigma d\delta = S^{34} \tag{15.10}$$

$$S_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_3} = 4\,T_2 \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_3 \sinh^2 \rho \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \, d\sigma d\delta = S^{56} \tag{15.11}$$

$$J_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{\phi}}_1} = 4\,T_2 \int_0^{2\pi} \dot{\overline{\phi}}_1 \cos^2 \overline{\theta}_1 \, d\sigma d\delta = J^{12} \tag{15.12}$$

$$J_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{\phi}}_2} = 4\,T_2 \int_0^{2\pi} \dot{\overline{\phi}}_2 \sin^2 \overline{\theta}_1 \cos^2 \overline{\theta}_2 \, d\sigma d\delta = J^{34}. \tag{15.13}$$

In (15.8)–(15.13), L stands for the membrane Lagrangian that is defined by the formula $S_P = \int L \, d\tau$.

16 Spinning Membranes as Spinning Strings

16.1 Stringy Membranes in $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$

The purpose of this section is to investigate the stringy behavior of classical membranes in $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$. It will be shown that the GKP folded closed string (I) that rotates in $\mathrm{AdS}_3 \subset \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$,[69] has the same action and equations of motion with a specific membrane soliton that spins in $\mathrm{AdS}_3 \subset \mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$. A similar result will be shown to hold for the pulsating closed folded string (III) of GKP.[70] The two results will then be generalized to all string solitons that live in $\mathrm{AdS}_5 \subset \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$, for which it will be shown that there is always a membrane soliton in $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ with the same action and equations of motion.

Consider the following ansatz for a membrane that rotates in $\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^1 \subset \mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$:

$$\Big\{t = \kappa\tau, \; \rho = \rho(\sigma), \; \phi_1 = \kappa\omega\tau, \; \phi_2 = \phi_3 = \theta_1 = \theta_2 \quad = 0\Big\} \times \Big\{\overline{\phi}_1 = \delta, \; \overline{\theta}_1 = \overline{\theta}_2 = \overline{\phi}_2 = 0\Big\}. \tag{16.1}$$

[69]The AdS_3 folded closed string (I) of GKP [11] was studied in §6.1.

[70]The AdS_3 pulsating closed folded string (III) of GKP [11] was studied in §6.3.

In embedding coordinates ($R = 1$, $\ell = 2$), ansatz (16.1) reads:

$$\begin{aligned}
&Y_0 = 2\cosh\rho(\sigma)\cos\kappa\tau \ , \quad Y_3 = Y_4 = Y_5 = Y_6 = 0\,, && X_1 = \cos\delta \\
&Y_1 = 2\sinh\rho(\sigma)\cos\kappa\omega\tau && X_2 = \sin\delta \\
&Y_2 = 2\sinh\rho(\sigma)\sin\kappa\omega\tau && X_3 = X_4 = X_5 = 0 \\
&Y_7 = 2\cosh\rho(\sigma)\sin\kappa\tau.
\end{aligned} \tag{16.2}$$

Polyakov's action (15.3) and constraint equation (15.4) become:[71]

$$S_P = 2\,T_2 \int \left(-\dot{t}^2\cosh^2\rho + \dot{\phi}_1^2\sinh^2\rho\,\cos^2\theta_1 - \cos^2\overline{\theta}_1\,\rho'^2\,\overline{\phi}_1'^2\,\left\{\sigma,\delta\right\}^2\right) d\tau d\sigma d\delta = \tag{16.4}$$

$$= \frac{2\,T_1}{\ell_s g_s}\int\left(-\kappa^2\cosh^2\rho + \kappa^2\omega^2\sinh^2\rho - \rho'^{\,2}\right) d\tau d\sigma \tag{16.5}$$

$$\rho'^{\,2} - \kappa^2\left(\cosh^2\rho - \omega^2\sinh^2\rho\right) = 0 \qquad \text{(constraint).} \tag{16.6}$$

Now compare the action (16.5) and the corresponding gauge constraint (16.6), with the on-shell action (6.11) and Virasoro constraint (6.13) of the GKP string (I). They are identical! With the exception of the factor $\cos^2\overline{\theta}_1\,\overline{\phi}_1'^2$, the off-shell action (16.4) is also identical to the off-shell stringy action (6.10). To prove the equivalence of systems (6.10)–(6.13) and (16.4)–(16.6), just note that the action (16.4) has only ρ with a non-vanishing equation of motion:

$$\rho'' + \kappa^2\left(\omega^2 - 1\right)\sinh\rho\cosh\rho = 0, \tag{16.7}$$

Equation (16.7) is the same as the stringy one, equation (6.12). At the same time, all conserved charges of the membrane action (16.4) are identical to the ($\omega^2 > 1$) stringy ones (6.22)–(6.23):

$$E(\omega) = \frac{16\,T_1}{g_s\ell_s}\cdot\frac{\omega}{\omega^2-1}\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \tag{16.8}$$

$$S(\omega) = \frac{16\,T_1}{g_s\ell_s}\cdot\left(\frac{\omega^2}{\omega^2-1}\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) - \mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)\right) = S_1. \tag{16.9}$$

We have therefore proven that the membrane (16.1) is dynamically equivalent to the AdS_3 closed folded GKP string (I) that is given by the ansatz (6.8).

---

[71] In $D = 11$ spacetime dimensions, we may express the 10-dimensional string coupling constant g_s in terms of the Planck length ℓ_{11} and the string fundamental length ℓ_s, by dimensionally reducing 11-dimensional supergravity to $D = 10$ spacetime dimensions:

$$g_s = \left(\frac{R_c}{\ell_{11}}\right)^{3/2}, \qquad \ell_s^2 = \frac{\ell_{11}^3}{R_c} \quad\longrightarrow\quad g_s = \left(\frac{\ell_{11}}{\ell_s}\right)^3, \tag{16.3}$$

where R_c is the radius of compactification. The 11-dimensional membrane tension becomes $T_2 = \left[(2\pi)^2 g_s\ell_s^3\right]^{-1}$ [16].

For the oscillating AdS_3 GKP string (III), we can also find a dynamically equivalent membrane in $AdS_7\times S^4$. Consider the following ansatz of a pulsating membrane in $AdS_7\times S^4$:

$$\Big\{t=t\left(\tau\right),\,\rho=\rho\left(\tau\right),\,\theta_1=\frac{\pi}{2},\,\theta_2=\sigma,\,\phi_1=\phi_2=\phi_3=0\Big\}\times\Big\{\overline{\phi}_1=\delta,\,\overline{\theta}_1=\overline{\theta}_2=\overline{\phi}_2=0\Big\}. \tag{16.10}$$

In embedding coordinates, ansatz (16.10) reads:

$$\begin{aligned}
&Y_0=2\cosh\rho(\tau)\cos t\left(\tau\right)\,, \quad Y_1=Y_2=Y_4=Y_6=0\,, && X_1=\cos\delta\\
&Y_3=2\sinh\rho(\tau)\cos\sigma && X_2=\sin\delta\\
&Y_5=2\sinh\rho(\tau)\sin\sigma && X_3=X_4=X_5=0\\
&Y_7=2\cosh\rho(\tau)\sin t\left(\tau\right).
\end{aligned} \tag{16.11}$$

The off-shell and on-shell Polyakov action of the pulsating membrane configuration (16.10), along with the corresponding constraint equation are given by:

$$S_P{=}\,2\,T_2\int\Big(-\dot{t}^2\cosh^2\rho+\dot{\rho}^2-\sinh^2\rho\,\sin^2\theta_1\,\cos^2\overline{\theta}_1\,\theta_2'^2\,\overline{\phi}_1'^2\,\left\{\sigma,\delta\right\}^2\Big)\,d\tau d\sigma d\delta= \tag{16.12}$$

$$=\frac{2\,T_1}{\ell_s g_s}\int\left(-\dot{t}^2\cosh^2\rho+\dot{\rho}^2-\sinh^2\rho\right)d\tau d\sigma \tag{16.13}$$

$$\dot{\rho}^2-\dot{t}^2\cosh^2\rho+\sinh^2\rho=0 \qquad \text{(constraint)}. \tag{16.14}$$

The on-shell membrane Polyakov action (16.13) and its constraint (16.14), are identical to the stringy ones that are given by equations (6.81)–(6.84) for $w=1$. Therefore the pulsating membrane (16.10) is dynamically equivalent to the AdS_3 pulsating GKP string (6.78). The t and ρ equations of motion of the membrane (16.10) are also identical to the stringy ones, (6.82)–(6.83) (with $w=1$):

$$\ddot{t}\cosh^2\rho+2\,\dot{t}\,\dot{\rho}\,\cosh\rho\sinh\rho=0 \tag{16.15}$$

$$\ddot{\rho}+\sinh\rho\cosh\rho\left(\dot{t}^2+1\right)=0. \tag{16.16}$$

As promised, we may generalize the two previous examples to any[72] string soliton that lives in $AdS_5\subset AdS_5\times S^5$ and has no dynamical parts in S^5.[73] Thus we are going to prove the following proposition:

■ **16.1.1.** *Every classical pure AdS_5 string soliton has an equivalent $AdS_7\times S^4$ membrane soliton (and not vice versa).*

[72]This statement does not include all ansätze that are incompatible with the choice of conformal gauge ($\gamma_{ab}=\eta_{ab}$) in the string Polyakov action (5.3). An interesting generalization of our proposal would include all AdS_5 Polyakov string configurations independently of the gauge choice, or equivalently all AdS_5 Nambu-Goto string ansätze.

[73]For convenience, we are going to dub all the $\mathfrak{sl}(2)$ string solitons that have no S^5 counterparts, "pure".

Proof: Consider the membrane Polyakov action (15.3) and the corresponding constraint equations (15.4)–(15.5) in the gauge (13.12):

$$S_2 = \frac{T_2}{2}\int\Big[G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\dot{y}^m\dot{y}^n + G^{\text{S}}_{mn}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n - \frac{1}{2}G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{AdS}}_{pq}(y)\{y^m,y^p\}\{y^n,y^q\}- \\ -\frac{1}{2}G^{\text{S}}_{mn}(x)G^{\text{S}}_{pq}(x)\{x^m,x^p\}\{x^n,x^q\} - G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{S}}_{pq}(x)\{y^m,x^p\}\{y^n,x^q\}\Big]d\tau\, d\sigma\, d\delta \tag{16.17}$$

$$G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\dot{y}^m\dot{y}^n + G^{\text{S}}_{mn}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n + \frac{1}{2}G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{AdS}}_{pq}(y)\{y^m,y^p\}\{y^n,y^q\}+ \\ +\frac{1}{2}G^{\text{S}}_{mn}(x)G^{\text{S}}_{pq}(x)\{x^m,x^p\}\{x^n,x^q\} + G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{S}}_{pq}(x)\{y^m,x^p\}\{y^n,x^q\} = 0 \tag{16.18}$$

$$G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\,\dot{y}^m\partial_i y^n + G^{\text{S}}_{mn}(x)\,\dot{x}^m\partial_i x^n = \Big\{G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\,\dot{y}^m, y^n\Big\} + \Big\{G^{\text{S}}_{mn}(x)\,\dot{x}^m, x^n\Big\} = 0, \tag{16.19}$$

where as before $y^m \equiv (t,\,\rho,\,\theta_1,\,\theta_2,\,\phi_1,\,\phi_2,\,\phi_3)$ and $x^m \equiv \left(\overline{\theta}_1,\,\overline{\theta}_2,\,\overline{\phi}_1,\,\overline{\phi}_2\right)$ and $G_{mn}\,(y,\,x)$ are the components of (15.2). Let σ denote the spatial string worldsheet coordinate:

$$y^m = y^m\,(\tau\,,\sigma) \quad \& \quad x^m = x^m\,(\tau\,,\delta)\,, \tag{16.20}$$

then the above action and constraints become:

$$S_2 = \frac{T_2}{2}\int\Big[G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\dot{y}^m\dot{y}^n + G^{\text{S}}_{mn}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n - G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{S}}_{pq}(x)y'^{\,m}y'^{\,n}x'^{\,p}x'^{\,q}\Big]d\tau\, d\sigma\, d\delta \tag{16.21}$$

$$G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\dot{y}^m\dot{y}^n + G^{\text{S}}_{mn}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n + G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{S}}_{pq}(x)y'^{\,m}y'^{\,n}x'^{\,p}x'^{\,q} = 0 \tag{16.22}$$

$$G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\,\dot{y}^m y'^{\,n} = G^{\text{S}}_{mn}(x)\,\dot{x}^m x'^{\,n} = 0. \tag{16.23}$$

We now set $x^3 = \overline{\phi}_1 = \delta$ for the coordinate of the 4-sphere that corresponds to $G^{\text{S}}_{33} = \cos^2\overline{\theta}_1$. Then,

$$S_2 = \frac{T_2}{2}\int\Big[G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\Big(\dot{y}^m\dot{y}^n - \cos^2\overline{\theta}_1\,\overline{\phi}_1'^{\,2}\,y'^{\,m}y'^{\,n}\Big) + G^{\text{S}}_{mn\neq 3}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n- \\ -G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{S}}_{pq\neq 3}(x)y'^{\,m}y'^{\,n}x'^{\,p}x'^{\,q}\Big]d\tau\, d\sigma\, d\delta \tag{16.24}$$

$$G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\,\left(\dot{y}^m\dot{y}^n + \,\cos^2\overline{\theta}_1\,y'^{\,m}y'^{\,n}\right) + G^{\text{S}}_{mn\neq 3}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n+ \\ +G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{S}}_{pq\neq 3}(x)y'^{\,m}y'^{\,n}x'^{\,p}x'^{\,q} = 0 \tag{16.25}$$

$$G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\,\dot{y}^m y'^{\,n} = G^{\text{S}}_{mn\neq 3}(x)\,\dot{x}^m x'^{\,n} = 0. \tag{16.26}$$

Proposition 16.1.1 follows upon setting $x^{m\neq 3} = 0$, $y^{m>5} = 0$ and performing the δ-integration:

$$S_2 = \frac{T_2}{2}\int G^{\text{AdS}}_{mn\leq 5}(y^{p\leq 5})\left(\dot{y}^m\dot{y}^n - \cos^2\overline{\theta}_1\,\overline{\phi}_1'^{\,2}\,y'^{\,m}y'^{\,n}\right)d\tau\, d\sigma = \tag{16.27}$$

$$= \frac{T_1}{2g_s\ell_s}\int G^{\text{AdS}}_{mn\leq 5}(y^{p\leq 5})\left(\dot{y}^m\dot{y}^n - y'^{\,m}y'^{\,n}\right)d\tau\, d\sigma = \frac{S_1}{g_s\ell_s} \tag{16.28}$$

$$G^{\text{AdS}}_{mn\leq 5}(y^{p\leq 5})\left(\dot{y}^m\dot{y}^n + y'^{\,m}y'^{\,n}\right) = G^{\text{AdS}}_{mn\leq 5}(y^{p\leq 5})\,\dot{y}^m y'^{\,n} = 0, \tag{16.29}$$

which is a just the action and Virasoro constraints of a classical string in AdS_5. To see this, compare (16.28)–(16.29) with the corresponding string Polyakov action and Virasoro constraints in $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ (in the conformal gauge, $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$), (5.3)–(5.5):

$$S_1 = \frac{T_1}{2}\int\left[G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\left(\dot{y}^m\dot{y}^n - y'^{\,m}y'^{\,n}\right) + G^{\text{S}}_{mn}(x)\left(\dot{x}^m\dot{x}^n - x'^{\,m}x'^{\,n}\right)\right]d\tau\, d\sigma \tag{16.30}$$

$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2}\left[G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\left(\dot{y}^m\dot{y}^n + y'^{\,m}y'^{\,n}\right) + G^{\text{S}}_{mn}(x)\left(\dot{x}^m\dot{x}^n + x'^{\,m}x'^{\,n}\right)\right] = 0 \tag{16.31}$$

$$T_{01} = T_{10} = G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\,\dot{y}^m y'^{\,n} + G^{\text{S}}_{mn}(x)\,\dot{x}^m x'^{\,n} = 0. \tag{16.32}$$

The $\overline{\theta}_1$ and $\overline{\phi}_1$ equations of motion in (16.27) are trivially satisfied and the remaining equations of motion of (16.27) are identical to the equations of motion that are obtained by varying the string action (16.30). Therefore the two systems are dynamically equivalent.

The not vice versa part in 16.1.1 follows from the fact that we may construct many inequivalent $\text{AdS}_7 \times \text{S}^4$ membrane configurations with dependence on both σ and δ, that are impossible to obtain from the action of a classical bosonic string in $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$. □

16.2 Stringy Membranes in $\text{AdS}_4 \times \text{S}^7$

Proposition 16.1.1 may be modified in order to apply in $\text{AdS}_4 \times \text{S}^7$. If we assume that the string's target space coordinates depend on both world-sheet coordinates $\{\tau\,,\sigma\}$,

$$y^m = \left(t = t\,(\tau\,,\sigma)\,,\ \rho = \rho\,(\tau\,,\sigma)\,,\ \theta = \theta\,(\tau\,,\sigma)\,,\ \phi_1 = \phi_1\,(\tau\,,\sigma)\,,\ \phi_2 = \phi_2\,(\tau\,,\sigma)\right), \tag{16.33}$$

then proposition 16.1.1 can only apply to a subset of all possible AdS_5 classical string configurations, namely strings in $\text{AdS}_4 \subset \text{AdS}_5$. These are the only ones that can be obtained from a membrane in $\text{AdS}_4 \times \text{S}^7$. For example both stringy membranes (16.1)–(16.10) that we encountered above and give rise to GKP strings in $\text{AdS}_3 \subset \text{AdS}_4 \subset \text{AdS}_5$, are such membranes since they live in $\text{AdS}_4 \subset \text{AdS}_4 \times \text{S}^7$. More generically,

■ **16.2.1.** *Every classical pure string soliton of $AdS_4 \subset AdS_5$*[74] *has an equivalent $AdS_4 \times S^7$ membrane soliton (and not vice versa).*

If we drop the condition of full dependence of the string's target-space coordinates on both world-sheet coordinates $\{\tau\,,\sigma\}$ as in (16.33), it should be possible to apply the above method and obtain (i) $\text{AdS}_{4/7} \times \text{S}^{7/4}$ stringy membranes that are equivalent to certain special string configurations that live in $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ and (ii) $\text{AdS}_4 \times \text{S}^7$ stringy membranes that are equivalent to strings that live in AdS_5.

[74] By writing $\text{AdS}_4 \subset \text{AdS}_5$ we mean that one of the two azimuthal angles of the 3-sphere of AdS_5 has been set equal to zero.

16.3 Stringy Membranes in $\mathbf{AdS}_4 \times \mathbf{S}^7/\mathbb{Z}_k$

Stringy membranes are also meaningful in orbifolded spacetimes such as $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$. For $k = 1$, this is just the $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$ spacetime that we saw above. As we have discussed in §3.8, geometries like $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$ provide the gravitational backgrounds of the ABJM correspondence (3.37).

In the context of ABJM theory, the question has been posed whether a logarithmic type behavior is possible for the anomalous dimensions of any state in the theory. As we saw back in §6, logarithmic behavior of anomalous dimensions is possible for twist-2 operators of $\mathcal{N} = 4$ SYM theory and their dual closed and folded GKP strings in AdS_3 (I). Based on what we have said, we can answer the above question in an affirmative way by using the properties of stringy membranes. Consider the metric of $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$ [203]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= G_{mn}^{\mathrm{AdS}}(y)dy^m dy^n + G_{mn}^{\mathrm{S}/\mathbb{Z}}(x)dx^m dx^n = \\ &= \ell^2\left(-\cosh^2\rho\, dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho \cdot d\Omega_2^2\right) + R^2 d\overline{\Omega}_{7/\mathbb{Z}_k}^2 \end{aligned} \tag{16.34}$$

$$d\overline{\Omega}_{7/\mathbb{Z}_k}^2 = \left(\frac{d\overline{y}}{k} + \widetilde{A}\right)^2 + ds_{\mathbb{CP}^3}^2\,, \tag{16.35}$$

$$\widetilde{A} \equiv \frac{1}{2}\left(\cos^2\overline{\xi} - \sin^2\overline{\xi}\right)d\overline{\psi} + \frac{1}{2}\cos^2\overline{\xi}\,\cos\overline{\theta}_1\,d\overline{\phi}_1 + \frac{1}{2}\sin^2\overline{\xi}\,\cos\overline{\theta}_2\,d\overline{\phi}_2$$

$$\begin{aligned} ds_{\mathbb{CP}^3}^2 &= d\overline{\xi}^2 + \cos^2\overline{\xi}\,\sin^2\overline{\xi}\left(d\overline{\psi} + \frac{1}{2}\cos\overline{\theta}_1\,d\overline{\phi}_1 - \frac{1}{2}\cos\overline{\theta}_2\,d\overline{\phi}_2\right)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{4}\cos^2\overline{\xi}\left(d\overline{\theta}_1^2 + \sin^2\overline{\theta}_1\,d\overline{\phi}_1^2\right) + \frac{1}{4}\sin^2\overline{\xi}\left(d\overline{\theta}_2^2 + \sin^2\overline{\theta}_2\,d\overline{\phi}_2^2\right). \end{aligned} \tag{16.36}$$

Membrane configurations (16.1)–(16.10) may easily be obtained from (16.34)–(16.36). In ansätze (16.1)–(16.10), we only have to assign $\overline{y} = k\delta$ (also, for $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$ it's $\mathfrak{k} = \ell/R = 1/2$) and set the six remaining angles in S^7 equal to zero. Logarithmic behavior will then be possible for the ABJM states that are dual to the $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$ avatar of the stringy membrane (16.1), that fully captures the dynamics and properties of the closed and folded GKP strings (I). More generally, we may formulate the following proposition:

■ **16.3.1.** *Every classical pure string soliton of $AdS_4 \subset AdS_5$ has an equivalent $AdS_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$ membrane soliton (and not vice versa).*

Statements like 16.3.1 are to be expected, since it is known that type IIA string theory on $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{CP}^3$ can be obtained from the supermembrane action on $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$ by double dimensional reduction [224].

With this we conclude our presentation of stringy membranes in anti-de Sitter spacetimes. In the following section we are going to study the stability properties of the two stringy membrane configurations that we've examined above, namely (16.1)–(16.10).

17 Membrane Fluctuations

The subject of the present section is the stability of stringy membranes. Generally, we would expect stringy membranes to be unstable, because of their δ-component that is wound around a great circle of $S^{4/7}$. The δ-component is prone to collapsing towards either pole of the corresponding hypersphere, leading the total system towards a more stable configuration with lower energy. Indeed, this has been known to be true for classical bosonic strings that are wound around a great circle of a 2-sphere and have no other dynamics [225]. On the other hand stringy membranes share a common Lagrangian, equations of motion and gauge constraints with their equivalent strings, so that we would expect them to inherit many of their stabilities/instabilities. If we suppose for the sake of the argument that the string configuration that is dual to the stringy membrane is unstable, there exist many ways that can render it stable, e.g. adding more angular momenta [225, 226], stable AdS components [76, 227], pulsating parts [228], orientifold projections [229] and flux terms [230]. Even those strings that are known to be unstable have been extensively studied and have proven very useful in the context of the AdS/CFT correspondence [76, 225], since the instabilities may sometimes be quite insignificant from the point of view of the dual gauge theory [231]. One possible way to explain this state of affairs is that unstable solutions are often easily extendable to stable configurations, while at the same time they maintain their wanted gauge theory properties. The stability analysis of strings and membranes in anti-de Sitter spacetimes has not been developed satisfactorily (even at the level of numerics), mainly because of its difficulty [232]. Having at our disposal results about the stability of AdS strings and membranes, would enable us to draw very useful conclusions about the stability of our stringy membrane configurations.

On the other hand, we should not forget that stringy membranes are membranes and not strings. This property can sometimes enhance the stability of the resulting system. Whereas a simple stringy membrane that is wound around a 2-sphere has zero surface tension and it is expected to be stable, a similarly wound string around the 2-sphere cannot be stable as we saw above. Since stringy membranes are meant to reproduce the behavior of classical strings in AdS_5, it is important to be able to make concrete statements about their advantages/disadvantages in the domain of stability. Work on membrane fluctuations in various backgrounds can be found in [233].

The main result of the present section will be that the fluctuations of stringy membranes are governed by the Lamé equation. Let us briefly review the main applications of Lamé equations, before we embark on the stability analysis of stringy membranes. The Lamé equation arises when we separate the variables of the Laplace equation in the ellipsoidal coordinate system [234]. It belongs to the class of "quasi-exactly solvable" (QES) systems [235], so-called because their solutions can be determined by algebraic means in certain cases [236, 237]. Because the stabilities and instabilities of Lamé systems are organized in multiple bands and gaps, the range of their physical applications is quite extended. Among their most interesting applications are: (a) they provide an alternative to the Kronig-Penney model of electrons in one-dimensional crystals [238, 236]; (b) they seem to govern explosive particle production (preheating) due to parametric resonance in post-inflationary universe [239]; (c) they come up in sphaleron fluctuations of the ϕ^4 and 1+1 dimensional abelian Higgs models [240]; (d) they are intimately connected to the spectral curve of $\mathfrak{su}(2)$ BPS monopoles [241]; (e) they arise very often in supersymmetric quantum mechanics [242], etc. [243, 244]. The Lamé equation repeatedly appears in all studies of string fluctuations in anti-de Sitter spacetimes [81, 105, 228]. As we will see below, the fluctuations of stringy membranes give rise to a much richer Lamé band/gap structure.

We will mainly work in the embedding coordinate system of $AdS_{p+2} \times S^q$ for which,

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dY^\mu dY^\nu + \delta_{ij} dX^i dX^j = -dY_0^2 + \sum_{i=1}^{p+1} dY_i^2 - dY_{p+2}^2 + \sum_{i=1}^{q+1} dX_i^2 \tag{17.1}$$

$$-\eta_{\mu\nu} Y^\mu Y^\nu = Y_0^2 - \sum_{i=1}^{p+1} Y_i^2 + Y_{p+2}^2 = \ell^2 \quad , \quad \delta_{ij} X^i X^j = \sum_{i=1}^{q+1} X_i^2 = R^2, \tag{17.2}$$

where $\eta_{\mu\nu} = (-,+,+,\ldots,+,-)$, $\delta_{ij} = (+,+,\ldots,+)$, $\mu,\nu = 0,1,\ldots,p+2$ and $i,j = 1,2,\ldots,q+1$. The constraints (17.2) are taken into account by including two Lagrange multipliers Λ, $\widetilde{\Lambda}$ in the gauge-fixed according to (13.12) membrane Polyakov action (13.13) (with $\nu = 2$):

$$S_P = \frac{T_2}{2}\int d^3\sigma\Bigg[\dot{Y}^\mu\dot{Y}_\mu + \dot{X}^i\dot{X}^i - \frac{1}{2}\{Y^\mu,Y^\nu\}\{Y_\mu,Y_\nu\} - \frac{1}{2}\{X^i,X^j\}\{X^i,X^j\} - \\ -\{Y^\mu,X^i\}\{Y_\mu,X^i\} + \Lambda\left(Y^\mu Y_\mu + \ell^2\right) + \widetilde{\Lambda}\left(X^i X^i - R^2\right)\Bigg]. \tag{17.3}$$

If we vary action (17.3), we obtain the following equations of motion:

$$\ddot{Y}^\mu = \{\{Y^\mu,Y^\nu\},Y_\nu\} + \left\{\{Y^\mu,X^i\},X^i\right\} + \Lambda\,Y^\mu \tag{17.4}$$

$$\ddot{X}^i = \left\{\{X^i,X^j\},X^j\right\} + \left\{\{X^i,Y^\mu\},Y_\mu\right\} + \widetilde{\Lambda}\,X^i. \tag{17.5}$$

The Lagrange constraints are:

$$Y^\mu Y_\mu = -\ell^2, \qquad X^i X^i = R^2, \tag{17.6}$$

while the two constraints that follow from gauge-fixing (13.12) are given by:

$$\dot{Y}^\mu\partial_\sigma Y_\mu + \dot{X}^i\partial_\sigma X^i = \dot{Y}^\mu\partial_\delta Y_\mu + \dot{X}^i\partial_\delta X^i = 0 \tag{17.7}$$

$$\dot{Y}^\mu\dot{Y}_\mu + \dot{X}^i\dot{X}^i + \frac{1}{2}\{Y^\mu,Y^\nu\}\{Y_\mu,Y_\nu\} + \frac{1}{2}\{X^i,X^j\}\{X^i,X^j\} + \{Y^\mu,X^i\}\{Y_\mu,X^i\} = 0. \tag{17.8}$$

Because of the constraint (17.8), the membrane Hamiltonian is identically equal to zero:

$$H = \frac{T_2}{2}\int d^2\sigma\Bigg[\dot{Y}^\mu\dot{Y}_\mu + \dot{X}^i\dot{X}^i + \frac{1}{2}\{Y^\mu,Y^\nu\}\{Y_\mu,Y_\nu\} + \frac{1}{2}\{X^i,X^j\}\{X^i,X^j\} + \\ +\{Y^\mu,X^i\}\{Y_\mu,X^i\} - \Lambda\left(Y^\mu Y_\mu + \ell^2\right) - \widetilde{\Lambda}\left(X^i X^i - R^2\right)\Bigg] = 0. \tag{17.9}$$

Let us consider the following perturbations:[75]

$$Y^\mu = Y_0^\mu + \delta Y^\mu \quad , \quad X^i = X_0^i + \delta X^i \quad , \quad \Lambda = \Lambda_0 + \delta\Lambda \quad , \quad \widetilde{\Lambda} = \widetilde{\Lambda}_0 + \delta\widetilde{\Lambda}, \tag{17.10}$$

where $\left\{Y_0, X_0, \Lambda_0, \widetilde{\Lambda}_0\right\}$ is a solution of the equations of motion (17.4)–(17.5) and the constraints

[75]The reader should be careful in order not to confuse the world-volume coordinate $\delta \equiv \sigma_2$, with the variational δ's that appear in δS_P, δX, δY, $\delta\Lambda$, $\delta\widetilde{\Lambda}$ and denote the perturbations of S_P, X, Y, Λ and $\widetilde{\Lambda}$.

(17.6)–(17.8). The quadratic fluctuation action is given by:

$$\delta S_P = \frac{T_2}{2}\int d^3\sigma \Bigg[\delta\dot{Y}^\mu\,\delta\dot{Y}_\mu + \delta\dot{X}^i\,\delta\dot{X}^i - \{Y_0^\mu, Y_0^\nu\}\{\delta Y_\mu, \delta Y_\nu\} - \{\delta Y^\mu, Y_0^\nu\}\{\delta Y_\mu, Y_{0\,\nu}\} -$$

$$-\{\delta Y^\mu, Y_0^\nu\}\{Y_{0\,\mu}, \delta Y_\nu\} - \{X_0^i, X_0^j\}\{\delta X^i, \delta X^j\} - \{\delta X^i, X_0^j\}\{\delta X^i, X_0^j\} -$$

$$-\{\delta X^i, X_0^j\}\{X_0^i, \delta X^j\} - 2\{Y_0^\mu, X_0^i\}\{\delta Y_\mu, \delta X^i\} - \{\delta Y^\mu, X_0^i\}\{\delta Y_\mu, X_0^i\} -$$

$$-2\{\delta Y^\mu, X_0^i\}\{Y_{0\,\mu}, \delta X^i\} - \{Y_0^\mu, \delta X^i\}\{Y_{0\,\mu}, \delta X^i\} + 2\,Y_0^\mu\,\delta Y_\mu\,\delta\Lambda +$$

$$+2\,X_0^i\,\delta X^i\,\delta\widetilde{\Lambda}\Bigg]. \tag{17.11}$$

To lowest order, the fluctuations obey the following equations:

$$\delta\ddot{Y}^\mu = \{\{Y_0^\mu, Y_0^\nu\}, \delta Y_\nu\} + \{\{\delta Y^\mu, Y_0^\nu\}, Y_{0\,\nu}\} + \{\{Y_0^\mu, \delta Y^\nu\}, Y_{0\,\nu}\} + \big\{\{Y_0^\mu, X_0^i\}, \delta X^i\big\} +$$

$$+ \big\{\{\delta Y^\mu, X_0^i\}, X_0^i\big\} + \big\{\{Y_0^\mu, \delta X^i\}, X^i\big\} + \Lambda_0 \delta Y^\mu + Y_0^\mu\,\delta\Lambda \tag{17.12}$$

$$\delta\ddot{X}^i = \Big\{\Big\{X_0^i, X_0^j\Big\}, \delta X_j\Big\} + \Big\{\Big\{\delta X^i, X_0^j\Big\}, X_0^j\Big\} + \Big\{\{X_0^i, \delta X^j\}, X_0^j\Big\} + \{\{X_0^i, Y_0^\mu\}, \delta Y_\mu\} +$$

$$+ \big\{\{\delta X^i, Y_0^\mu\}, Y_{0\,\mu}\big\} + \big\{\{X_0^i, \delta Y^\mu\}, Y_{0\,\mu}\big\} + \widetilde{\Lambda}_0 \delta X^i + X_0^i\,\delta\widetilde{\Lambda} \tag{17.13}$$

and constraints:

$$Y_0^\mu\,\delta Y_\mu = X_0^i\,\delta X^i = 0 \quad , \quad \dot{Y}_0^\mu\,\partial_\sigma \delta Y_\mu + \delta\dot{Y}^\mu\,\partial_\sigma Y_{0\,\mu} + \dot{X}_0^i\,\partial_\sigma \delta X^i + \delta\dot{X}^i\,\partial_\sigma X_0^i = 0$$

$$\dot{Y}_0^\mu\,\partial_\delta \delta Y_\mu + \delta\dot{Y}^\mu\,\partial_\delta Y_{0\,\mu} + \dot{X}_0^i\,\partial_\delta \delta X^i + \delta\dot{X}^i\,\partial_\delta X_0^i = 0 \tag{17.14}$$

$$\dot{Y}_0^\mu\,\delta\dot{Y}_\mu + \dot{X}_0^i\,\delta\dot{X}^i + \{Y_0^\mu, Y_0^\nu\}\{\delta Y_\mu, Y_{0\,\nu}\} + \{X_0^i, X_0^j\}\{\delta X^i, X_0^j\} + \{Y_0^\mu, X_0^i\}\{\delta Y_\mu, X_0^i\} +$$

$$+\{Y_0^\mu, X_0^i\}\{Y_{0\,\mu}, \delta X^i\} = 0. \tag{17.15}$$

Stringy membranes in $\mathrm{AdS}_{p+2} \times \mathrm{S}^q$ have:

$$Y_0^\mu = Y_0^\mu\,(\tau, \sigma) \tag{17.16}$$

$$X_0^i = (\cos\delta\,,\,\sin\delta\,,\,0\,,\,\ldots\,,\,0) \longrightarrow X_0^i X_0^i = 1 \tag{17.17}$$

$$X_0^{i\,\prime} = (-\sin\delta\,,\,\cos\delta\,,\,0\,,\,\ldots\,,\,0) \longrightarrow X_0^{i\,\prime} X_0^{i\,\prime} = 1 \tag{17.18}$$

$$X_0^{i\,\prime\prime} = -\left(\cos\delta\,,\,\sin\delta\,,\,0\,,\,\ldots\,,\,0\right) = -X_0^i \;\longrightarrow\; X^{i\,\prime\prime}X^{i\,\prime\prime} = 1. \tag{17.19}$$

Plugging (17.16)–(17.19) into the equations of motion and constraints of the solutions (17.4)–(17.8) and the equations of motion and constraints of the fluctuations (17.12)–(17.15), we obtain the following system of equations (setting $R = 1$):

$$\ddot{Y}_0^\mu = Y_0^{\mu\,\prime\prime} + \Lambda_0\,Y_0^\mu \quad , \quad Y_0^{\mu\,\prime}Y_{0\,\mu}^\prime = -\dot{Y}_0^\mu\dot{Y}_{0\,\mu} = \widetilde{\Lambda}_0 = -\ell^2/2\,\Lambda_0 \tag{17.20}$$

$$Y_0^\mu Y_{0\,\mu} = -\ell^2 \quad , \quad \dot{Y}_0^\mu Y_{0\,\mu}^\prime = 0, \tag{17.21}$$

fluctuation equations,

$$\begin{aligned}\delta\ddot{Y}^\mu =& \partial_\sigma^2\delta Y^\mu + \widetilde{\Lambda}_0\,\partial_\delta^2\delta Y^\mu - \left(X_0^{i\,\prime\prime}\,\partial_\sigma\delta X^i - X_0^{i\,\prime}\,\partial_{\sigma,\delta}^2\delta X^i + Y_0^{\nu\,\prime}\,\partial_\delta^2\delta Y_\nu\right)Y_0^{\mu\,\prime} + \\ &+2\left(X_0^{i\,\prime}\,\partial_\delta\delta X^i\right)Y_0^{\mu\,\prime\prime} + \Lambda_0\,\delta Y^\mu + Y_0^\mu\,\delta\Lambda\end{aligned} \tag{17.22}$$

$$\begin{aligned}\delta\ddot{X}^i =& \partial_\sigma^2\delta X^i + \widetilde{\Lambda}_0\,\partial_\delta^2\delta X^i - \left(X_0^{j\,\prime}\,\partial_\sigma^2\delta X^j + Y_0^{\mu\,\prime\prime}\,\partial_\delta\delta Y_\mu - Y_0^{\mu\,\prime}\,\partial_{\sigma,\delta}^2\delta Y_\mu\right)X_0^{i\,\prime} + \\ &+2\left(Y_0^{\mu\,\prime}\,\partial_\sigma\delta Y_\mu\right)X_0^{i\,\prime\prime} + \widetilde{\Lambda}_0\,\delta X^i + X_0^i\,\delta\widetilde{\Lambda}\end{aligned} \tag{17.23}$$

and constraints:

$$Y_0^\mu\,\delta Y_\mu = X_0^i\,\delta X^i = 0\,,\; \dot{Y}_0^\mu\,\partial_\sigma\delta Y_\mu + \delta\dot{Y}^\mu\,Y_{0\,\mu}^\prime = \dot{Y}_0^\mu\,\partial_\delta\delta Y_\mu + \delta\dot{X}^i\,X_0^{i\,\prime} = 0 \tag{17.24}$$

$$\dot{Y}_0^\mu\,\delta\dot{Y}_\mu + Y_0^{\mu\,\prime}\,\partial_\sigma\delta Y_\mu + \widetilde{\Lambda}_0\,\left(X_0^{i\,\prime}\,\partial_\delta\delta X^i\right) = 0. \tag{17.25}$$

It is interesting to note that, although the equations of motion (17.20)–(17.21) do not explicitly depend on the world-volume coordinate $\delta = \sigma_2$ (they are string equations), the fluctuation equations (17.22)–(17.25) depend explicitly on the world-volume coordinate δ through the S^4 coordinates $X^i\,(\delta)$ and their derivatives. Since no coordinate transformation that eliminates the δ-dependence from the fluctuation equations (17.22)–(17.25) exists, we conclude that stringy membranes are equivalent to strings only in leading order.

In what follows, only the fluctuations along the directions that are transverse to the membrane will be examined, i.e. fluctuations for which $Y_0^\mu = X_0^i = 0$. These fluctuations are easier to study, since they decouple from the ones that lie along the parallel directions of the stringy membrane, as can be seen from (17.22)–(17.25). The fluctuation equations then become:

$$\delta\ddot{Y}^\mu = \partial_\sigma^2\delta Y^\mu + \widetilde{\Lambda}_0\,\partial_\delta^2\delta Y^\mu + \Lambda_0\,\delta Y^\mu \tag{17.26}$$

$$\delta\ddot{X}^i = \partial_\sigma^2\delta X^i + \widetilde{\Lambda}_0\,\partial_\delta^2\delta X^i + \widetilde{\Lambda}_0\,\delta X^i. \tag{17.27}$$

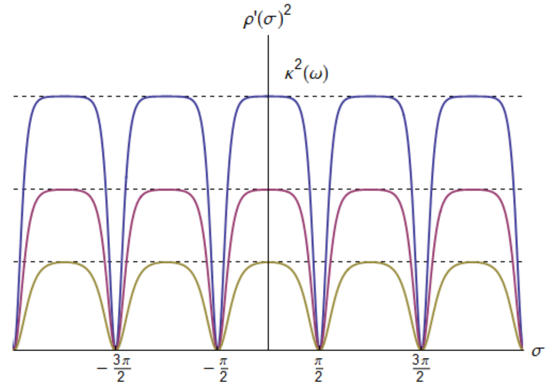


Figure 23: Plot of Lamé's potential (17.33) of the stringy membrane (16.1)–(17.31).

17.1 Rotating Stringy Membranes

To study the transverse fluctuations of rotating stringy membranes we set:

$$\delta Y^{\mu} = \sum_{r,m} e^{ir\tau + im\delta}\, \widetilde{y}^{\mu}_{r,m}(\sigma)\ , \qquad \delta X^{i} = \sum_{r,m} e^{ir\tau + im\delta}\, \widetilde{x}^{i}_{r,m}(\sigma)\ , \qquad m \in \mathbb{Z}. \tag{17.28}$$

If we plug (17.28) into (17.26)–(17.27), then the corresponding equations along the transverse directions $Y^{\mu}_0 = X^i_0 = 0$ take the following form (for simplicity, we omit the dependencies of $\widetilde{y}^{\mu}_{r,m}(\sigma)$ and $\widetilde{x}^{i}_{r,m}(\sigma)$ on r, m and σ):

$$\left(\widetilde{y}^{\mu}\right)'' + \left(r^2 - m^2\widetilde{\Lambda}_0 + \Lambda_0\right)\widetilde{y}^{\mu} = 0 \tag{17.29}$$

$$\left(\widetilde{x}^{i}\right)'' + \left(r^2 - m^2\widetilde{\Lambda}_0 + \widetilde{\Lambda}_0\right)\widetilde{x}^{i} = 0. \tag{17.30}$$

Now consider the $\text{AdS}_7 \times \text{S}^4$ stringy membranes (16.1) for which ($\ell = 2$),[76]

$$Y^{\mu}_0 = 2\left(\cosh\rho(\sigma)\cos\kappa\tau\,,\ \sinh\rho(\sigma)\cos\kappa\omega\tau\,,\ \sinh\rho(\sigma)\sin\kappa\omega\tau\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0\,,\ \cosh\rho(\sigma)\sin\kappa\tau\right). \tag{17.31}$$

The Lagrange multipliers Λ_0 and $\widetilde{\Lambda}_0$, for the stringy membrane (17.31) are given by:

$$\Lambda_0 = -2\rho'^2 \quad \& \quad \widetilde{\Lambda}_0 = 4\rho'^2, \tag{17.32}$$

where $\rho'(\sigma)^2$ is a σ-periodic, even function[77] (plotted for various ω in figure 23) that is given by:

$$\rho'^2 = \kappa^2\left(\cosh^2\rho - \omega^2\sinh^2\rho\right) = \kappa^2 \cdot sn^2\left[\kappa\omega\left(\sigma + \frac{\pi}{2}\right)\Big|\frac{1}{\omega^2}\right] \tag{17.33}$$

$$\omega \cdot \kappa(\omega) = \frac{2}{\pi}\cdot\mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \quad , \quad \omega^2 > 1.$$

The fluctuation equations (17.29)–(17.30) along the transverse directions $Y^{\mu} = X^i = 0$, can be shown

[76]It is straightforward to extend the results of this section to stringy membranes in $\text{AdS}_4 \times \text{S}^7/\mathbb{Z}^k$. See table 2.

[77]Note that for large ω's, we can make the approximation $\rho'^2 = \kappa^2 \cdot cd^2\left[\kappa\omega\sigma\Big|1/\omega^2\right] \sim \kappa^2\cos^2\sigma$.

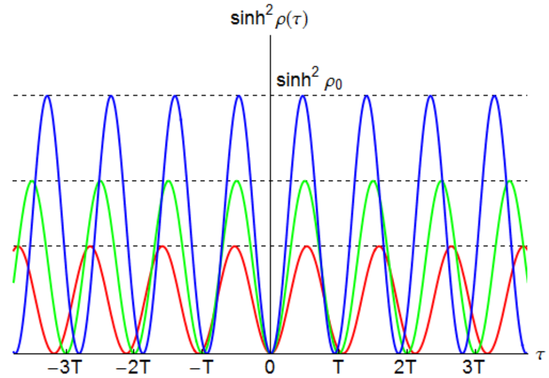


Figure 24: Plot of the Lamé potential (17.39) of the stringy membrane (16.10)–(17.38).

to obey the Jacobi form of Lamé's equation,

$$\frac{d^2z}{du^2}+\left[h-\nu\left(\nu+1\right)k^2 sn^2\left(u|k^2\right)\right]z=0, \tag{17.34}$$

provided that we set:

$$z=\widetilde{y}^{\mu}(\sigma)\ ,\ u=\kappa\omega\left(\sigma+\frac{\pi}{2}\right)\ ,\ h=\left(\frac{r}{\kappa\omega}\right)^2\ ,\ \nu\left(\nu+1\right)=2\left(2\,m^2+1\right)\ ,\ k=\frac{1}{\omega}$$
$$z=\widetilde{x}^{i}(\sigma)\ ,\ u=\kappa\omega\left(\sigma+\frac{\pi}{2}\right)\ ,\ h=\left(\frac{r}{\kappa\omega}\right)^2\ ,\ \nu\left(\nu+1\right)=4\left(m^2-1\right)\ ,\ k=\frac{1}{\omega}.$$

17.2 Pulsating Stringy Membranes

To study the transverse fluctuations of pulsating stringy membranes we set:

$$\delta Y^{\mu}=\sum_{m,n}e^{in\sigma+im\delta}\,\widetilde{y}^{\mu}_{m,n}\left(\tau\right)\,,\qquad \delta X^{i}=\sum_{m,n}e^{in\sigma+im\delta}\,\widetilde{x}^{i}_{m,n}\left(\tau\right)\,,\qquad m\in\mathbb{Z}, \tag{17.35}$$

then the equations for the transverse fluctuations (17.26)–(17.27), take the following form (again we have omitted the dependencies of $\widetilde{y}^{\mu}_{n,m}\left(\tau\right)$ and $\widetilde{x}^{i}_{n,m}\left(\tau\right)$ on n, m and τ):

$$\ddot{\widetilde{y}}^{\mu}+\left(n^2+m^2\widetilde{\Lambda}_0-\Lambda_0\right)\widetilde{y}^{\mu}=0 \tag{17.36}$$

$$\ddot{\widetilde{x}}^{i}+\left(n^2+m^2\widetilde{\Lambda}_0-\widetilde{\Lambda}_0\right)\widetilde{x}^{i}=0. \tag{17.37}$$

Consider the $\text{AdS}_7\times\text{S}^4$ pulsating configuration (16.10) ($\ell=2$):

$$Y^{\mu}_0=2\left(\cosh\rho(\tau)\cos t\left(\tau\right)\ ,\,0\,,\,0\,,\,\sinh\rho(\tau)\cos\sigma\,,\,0\,,\,\sinh\rho(\tau)\sin\sigma\,,\,0\,,\,\cosh\rho(\tau)\sin t\left(\tau\right)\right). \tag{17.38}$$

If we solve the equations of motion (17.20)–(17.21), the following Lamé potential is obtained:

$$\sinh^2\rho\left(\tau\right)=\sinh^2\rho_0\cdot sn^2\left[\tau\cdot\cosh\rho_0\,\Big|\,-\tanh^2\rho_0\right], \tag{17.39}$$

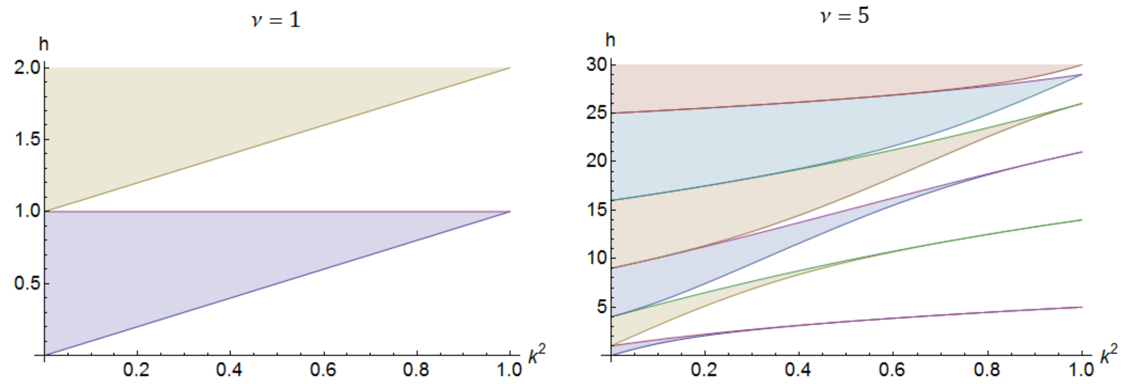


Figure 25: Stability bands (in color) of Lamé's equation (17.34) for $\nu = 1$ (left) and $\nu = 5$ (right).

where ρ_0 can be found from $4e^2 = \sinh^2 2\rho_0$ and e was defined in equation (6.86). The Lamé potential (17.39) has been plotted for various values of ρ_0 in figure 24. The Lagrange multipliers Λ_0 and $\widetilde{\Lambda}_0$ are found to be:

$$\Lambda_0 = -2\sinh^2\rho \quad \& \quad \widetilde{\Lambda}_0 = 4\sinh^2\rho. \tag{17.40}$$

The fluctuations along the transverse directions $Y^\mu = X^i = 0$ (17.36)–(17.37), again obey Lamé's equation (17.34). To bring the latter to the Jacobi form, we write the potential (17.39) as follows:

$$\sinh^2\rho\,(\tau) = \sinh^2\rho_0 \cdot \left(1 - sn^2\left[\tau\cdot\sqrt{\cosh 2\rho_0} + \mathbb{K}\left(\frac{\sinh^2\rho_0}{\cosh 2\rho_0}\right)\,\Big|\,\frac{\sinh^2\rho_0}{\cosh 2\rho_0}\right]\right) \tag{17.41}$$

and substitute $u = \tau\cdot\sqrt{\cosh 2\rho_0} + \mathbb{K}\left(k^2\right)$ and

$$z = \widetilde{y}^\mu(\tau)\,,\;\; h = \frac{n^2}{\cosh 2\rho_0} + 2k^2\left(2\,m^2+1\right)\,,\;\; \nu\,(\nu+1) = 4m^2+2\,,\;\; k = \frac{\sinh\rho_0}{\sqrt{\cosh 2\rho_0}}$$

$$z = \widetilde{x}^i(\tau)\,,\;\; h = \frac{n^2}{\cosh 2\rho_0} + 4k^2\left(m^2-1\right)\,,\;\; \nu\,(\nu+1) = 4m^2-4\,,\;\; k = \frac{\sinh\rho_0}{\sqrt{\cosh 2\rho_0}},$$

in equation (17.34).

We have found that the transverse fluctuations ($Y_0^\mu = X_0^i = 0$) of stringy membranes in $\text{AdS}_7\times\text{S}^4$ (16.1)–(16.10) fall under Lamé's equation:

$$\frac{d^2z}{du^2} + \left[h - \nu\,(\nu+1)\,k^2 sn^2\left(u|k^2\right)\right]z = 0. \tag{17.42}$$

As it is explained in appendix K, when $\nu\,(\nu+1)\in\mathbb{R}$ and $0<k<1$, Lamé's equation (17.42) always has an infinite set of real eigenvalues $a_\nu^s\left(k^2\right)$ and $b_\nu^s\left(k^2\right)$ that correspond to the equation's periodic eigenfunctions.[78] The Lamé eigenvalues can be classified into four groups, according to the parity (even or odd) and the period (equal to $2\mathbb{K}$ or $4\mathbb{K}$) of the corresponding eigenfunctions. For a generic Lamé eigenvalue h (not necessarily of a periodic eigenfunction), Lamé's equation (17.42) is stable if

[78]Note also that Lamé's equation (17.42) is symmetric under the exchange $\nu \leftrightarrow -\nu-1$, so that we only need to consider $\nu > -1/2$ and $\nu(\nu+1) > -1/4$.

Ansatz	u	k	h	z	$\nu\,(\nu+1)$
(16.1) $\mathrm{AdS}_7\times\mathrm{S}^4$	$\kappa\omega\left(\sigma+\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{1}{\omega}$	$\left(\frac{r}{\kappa\omega}\right)^2$	$\widetilde{y}$	$4\,m^2+2$
				$\widetilde{x}$	$4\left(m^2-1\right)$
(16.1) $\mathrm{AdS}_4\times\mathrm{S}^7$	$\kappa\omega\left(\sigma+\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{1}{\omega}$	$\left(\frac{r}{\kappa\omega}\right)^2$	$\widetilde{y}$	$m^2/4+2$
				$\widetilde{x}$	$\frac{1}{4}\left(m^2-1\right)$
(16.10) $\mathrm{AdS}_7\times\mathrm{S}^4$	$\tau\cdot\sqrt{\cosh 2\rho_0}+\mathbb{K}\left(k^2\right)$	$\frac{\sinh\rho_0}{\sqrt{\cosh 2\rho_0}}$	$\frac{n^2}{\cosh 2\rho_0}+k^2\left(4\,m^2+2\right)$	$\widetilde{y}$	$4\,m^2+2$
			$\frac{n^2}{\cosh 2\rho_0}+4k^2\left(m^2-1\right)$	$\widetilde{x}$	$4\left(m^2-1\right)$
(16.10) $\mathrm{AdS}_4\times\mathrm{S}^7$	$\tau\cdot\sqrt{\cosh 2\rho_0}+\mathbb{K}\left(k^2\right)$	$\frac{\sinh\rho_0}{\sqrt{\cosh 2\rho_0}}$	$\frac{n^2}{\cosh 2\rho_0}+k^2\left(m^2/4+2\right)$	$\widetilde{y}$	$m^2/4+2$
			$\frac{n^2}{\cosh 2\rho_0}+\frac{k^2}{4}\left(m^2-1\right)$	$\widetilde{x}$	$\frac{1}{4}\left(m^2-1\right)$

Table 2: Lamé fluctuation parameters (17.42) for stringy membranes (16.1)–(16.10) in $\mathrm{AdS}_{7/4}\times\mathrm{S}^{4/7}$.

and only if (iff) all corresponding eigenfunctions $z\,(u,h)$ are bounded. Otherwise the equation is unstable. The intervals of stability are determined by the eigenvalues of the equation's periodic solutions which are ordered as follows:

$$(a_\nu^0\,,\,\underbrace{a_\nu^1)\,\cup\,(b_\nu^1}\,,\,\underbrace{b_\nu^2)\,\cup\,(a_\nu^2}\,,\,\underbrace{a_\nu^3)\,\cup\,(b_\nu^3}\,,\,\underbrace{b_\nu^4)\,\cup\,\ldots} \tag{17.43}$$

The solutions of Lamé's equation are stable inside the above intervals and unstable outside them. The contraction symbols under adjacent eigenvalues mean that the relative order of the two consecutive eigenvalues is not generally known and may well be the opposite one for different values of $\nu\in\mathbb{R}$, $s=0,1,2,\ldots$ and $k\in(0,1)$. The Lamé eigenvalues have another interesting property that is known as "coexistence". The property of coexistence implies that $\nu\in\mathbb{N}$ iff Lamé's equation has exactly $\nu+1$ intervals of stability (bands) that follow exactly $\nu+1$ intervals of instability (gaps). The plot of the Lamé bands (colored) and gaps (white) for $\nu=1$ and $\nu=5$ can be found in figure 25.

Summing up, the stability of Lamé solutions is organized in (stable) bands and (unstable) gaps. The parameters of Lamé's equation (17.42), for each of the stringy membrane ansätze (17.31)–(17.38), are given in table 2 (for the definitions of m, r and n, see (17.28)–(17.35)). It is rather straightforward to extend our results from $\mathrm{AdS}_7\times\mathrm{S}^4$ to $\mathrm{AdS}_4\times\mathrm{S}^7$ (where $\mathfrak{k}=\ell/R=1/2$ and $\Lambda_0=-8\widetilde{\Lambda}_0$). Table 2 includes both cases. The data for the $\mathrm{AdS}_{7/4}$ fluctuations $\widetilde{y}\equiv\{\widetilde{y}^\mu_{r,m}\,(\sigma)\,,\,\widetilde{y}^\mu_{m,n}\,(\tau)\}$ occupy the first row of each entry, while the second row contains the data for the fluctuations on $\mathrm{S}^{4/7}$, $\widetilde{x}\equiv\left\{\widetilde{x}^i_{r,m}\,(\sigma)\,,\,\widetilde{x}^i_{m,n}\,(\tau)\right\}$. Given ω, ρ_0, and $m\in\mathbb{Z}$ ($\kappa=\kappa\,(\omega)=2/\pi\omega\cdot\mathbb{K}\left(1/\omega^2\right)$), the allowed values of r, $n\in\mathbb{R}$ are determined by the overlap of the $\widetilde{y}$ and $\widetilde{x}$ bands, the lowest endpoint of which satisfies:

$$h_{\min}\geq 0,\text{ in ansatz (16.1) \& }h_{\min}\geq\left(4\,m^2+2\right)\frac{\sinh^2\rho_0}{\cosh 2\rho_0},\text{ in ansatz (16.10) }(\mathrm{AdS}_7\times\mathrm{S}^4)$$

$$h_{\min}\geq\left(m^2/4+2\right)\frac{\sinh^2\rho_0}{\cosh 2\rho_0},\text{ in ansatz (16.10) }(\mathrm{AdS}_4\times\mathrm{S}^7). \tag{17.44}$$

18 Part IV Summary and Discussion

The final part IV of this thesis (§14–§17) was consecrated to the study of membranes from the perspective of the AdS/CFT correspondence. After some rudiments of p-branes and M-theory, we introduced the concept of the "stringy membrane" and studied some simple stringy membrane configurations in $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ and $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$. In order to learn about the stringy properties of uncharged classical bosonic membranes in $\mathrm{AdS}_m \times \mathrm{S}^n$ spacetimes, we have asked ourselves the question what are the basic premises that allow us to embed the string sigma model in $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ into the membrane sigma model in $\mathrm{AdS}_{4/7} \times \mathrm{S}^{7/4}$. We found that all string configurations inside AdS_5 (which is the non-compact part of $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$) may be reproduced by membranes that live inside $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$. Moreover, the behavior of any string configuration living inside $\mathrm{AdS}_4 \subset \mathrm{AdS}_5$ may be reproduced by a membrane of $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$.

The construction of stringy membranes in $\mathrm{AdS}_m \times \mathrm{S}^n$ is extremely simple. Two basic ingredients are needed in order to define stringy membranes: a compact and a non-compact counterpart in the background. The two world-volume coordinates of the stringy membrane are shared between the two component manifolds, so that the configuration is essentially one-dimensional in each of the two product spaces. Although the gauge-fixed Polyakov action of bosonic membranes (15.3) has a completely different structure than the corresponding string action (5.3), we prove that the former may reduce to the latter when the membrane coordinates are shared between two product spaces and the coordinate of the compact space is static. This treatment is in many ways very reminiscent of that of Duff, Howe, Inami and Stelle in [223], although our motivation is somewhat closer to the papers [149, 245, 246]. Apart from studying only bosonic membranes in $\mathrm{AdS}_m \times \mathrm{S}^n$, at no point did we perform a double dimensional reduction (DDR) à la [223]. Our aim was to reproduce the behavior of the GKP string from the membrane point of view. Other papers with similar considerations are [247].

The stability of stringy membranes in the linearized approximation was examined in §17. One important outcome stemming from the stability analysis, is that the similarities between stringy membranes and strings cannot be extended beyond the leading order. This is due to the fact that the perturbation equations of stringy membranes depend on the second world-volume coordinate δ which cannot be eliminated. In the same context, it was also found that the stability of stringy membranes along their transverse directions is governed by Lamé's equation. As a consequence, stringy membranes exhibit the standard stability/instability pattern of bands and gaps that is a commonplace property of the Lamé spectrum. The typical single-band/single-gap structure of classical bosonic strings in AdS_3 [81, 105] is recovered from stringy membranes as a special limiting case (entry $m = 0$ in table 2). The Lamé structure gives rise to various interesting issues of interpretation for both strings and membranes. One is whether the Lamé band/gap structure of AdS strings and membranes affords an interpretation as explosive particle production, in close analogy with the parametric resonance phenomenon that is encountered in post-inflationary universe. Secondly, we can ask what is the holographic dual, as well as what is the meaning of the Lamé band/gap structure from the point of view of the dual SCFT.

Part IV will conclude with a discussion of our results on stringy membranes along with some interesting further prospects on diverse emerging problems.

• *Scaling dimensions and stringy membranes.*

Stringy membrane (16.1) is essentially the same with the "type-I" solution of Hartnoll and Nuñez in $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$ [245], expressed in terms of the conformal gauge Polyakov action in $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ (see §16.2–§16.3 for $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$). In §6 we saw that the folded closed GKP string (I) of AdS_3 is dual to the twist-2 operators $\mathrm{Tr}\big[\mathcal{Z}\,\mathcal{D}_+^S\,\mathcal{Z}\big]$ of the $\mathfrak{sl}(2)$ sector of $\mathcal{N} = 4$ SYM. Therefore, in complete agreement with GKP [11] and Hartnoll–Nuñez [245], the stringy membrane (16.1) is expected to be dual to the above twist-2 operators, given also in (6.2). The classical part of the corresponding anomalous scaling dimensions will then be given by (6.30) for small values of the spin S and by (7.5)–(7.95) for large spins S:

$$E^2 = 2\sqrt{\lambda'}\, S + \ldots \quad \left(\text{Short Stringy Membranes, } S \ll \sqrt{\lambda'}\right) \tag{18.1}$$

$$E - S = f\left(\lambda'\right) \ln \frac{S}{\sqrt{\lambda'}} + \ldots \quad \left(\text{Long Stringy Membranes, } S \gg \sqrt{\lambda'}\right). \tag{18.2}$$

where S equals the stringy membrane charge $S_1 = S^{12}$ of (15.9) and the effective coupling constant λ' is defined as $\sqrt{\lambda'} \equiv R\,\ell^2/g_s\ell_s^3$.

The full classical "short" series (18.1) has been obtained in §6.1.1, see equations (6.29)–(6.30). The classical part of the "long" series (18.2) was the subject of the whole section §7.2, where it was explicitly shown how to calculate the series terms with the Lambert W-function. In §6.1.3 we proved a formula (originally proposed in [12]) that links the classical "short" and "long" scaling dimensions (18.1)–(18.2). In §7.3 we showed that the terms of the long series (7.5)–(7.95) satisfy the Moch-Vermaseren-Vogt (MVV) relations that follow from the property of "reciprocity" or parity-preservation. Reciprocity was originally proposed by Gribov and Lipatov [110] in the context of deep inelastic scattering (DIS) and it has been verified for twist-2 operators up to three loops in perturbative QCD [109] and up to four loops in weakly coupled $\mathcal{N} = 4$ SYM [108, 248]. Naturally, all of the above statements are expected to carry over to stringy membranes.

Conversely, it turns out that the above statements cannot be extended to the quantum level. The "cusp anomalous dimension" $f(\lambda)$ receives quantum corrections that we may compute in superstring theory by evaluating the Lamé fluctuation determinants, as in [105]. However, the quadratic supermembrane sigma model on $\text{AdS}_{7/4} \times \text{S}^{4/7}$ is completely different from the corresponding superstring model. This picture was confirmed in §17 of the present thesis, where the transverse fluctuations of the AdS_3 stringy membranes were studied and were found to have a much richer Lamé band/gap structure than the corresponding GKP strings. Therefore, we generally expect that the quantum corrections to the anomalous dimensions of twist-2 operators that are dual to $\text{AdS}_{7/4} \times \text{S}^{4/7}$ stringy membranes, will be different from the quantum corrections that the corresponding GKP strings receive.

• *Integrability.*

The main result of §16 was that all classical strings of AdS_5 can be reproduced by a stringy membrane of $\text{AdS}_7 \times \text{S}^4$ and all classical strings of AdS_4 can be reproduced by a stringy membrane of $\text{AdS}_4 \times \text{S}^7/\mathbb{Z}_k$. As we have seen in §5.2 the classical string sigma model on $\text{AdS}_{2/3/4}$ is equivalent to the Liouville, sinh-Gordon and B_2-Toda equation respectively. Therefore, the stringy membranes that reproduce classical strings of $\text{AdS}_{2/3/4}$ are expected to be classically equivalent to the Liouville, sinh-Gordon and B_2-Toda model respectively.

Our analysis also has important consequences for the dual gauge theories. The fact that two or more completely different bulk theories have excitations with similar spectra implies that the dual SCFTs (however different they may be, e.g. they may have different dimensionalities) ought to include sectors with a similar underlying structure. Take for example the GKP string (I) that rotates in AdS_3. We saw in §7 that the GKP string (I) is dual to twist-2 operators and its energy that is equal to the operator scaling dimensions scales like the logarithm of the string's spin. The fact that we can find a stringy membrane of a different bulk theory that is dual to a different SCFT than the original GKP string but both nevertheless have the same dispersion relations (7.5)–(18.2), implies that the two SCFTs contain the same twist-2 operators, having the same spectra. In sum, we have shown that the following gauge/gravity dualities contain states/operators with anomalous dimensions that scale like $\Delta - S \sim \ln S$:

Gauge Theory	dual Gravity Theory
$\mathcal{N}=4\ \mathfrak{su}(N)$ Super Y-M Theory	IIB String Theory on $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$
$\mathcal{N}=8$ SCFT $\Big/$ $A_{N-1}(2,0)$ SCFT	M-Theory on $\mathrm{AdS}_{4/7}\times\mathrm{S}^{7/4}$
$\mathcal{N}=6\ U(N)_k\times U(N)_{-k}$ Super C-S Theory	
$N\to\infty$	M-Theory on $\mathrm{AdS}_4\times\mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$
$k^5\gg N\to\infty$, $\lambda\equiv 2\pi^2 N/k=\text{const.}$	IIA String Theory on $\mathrm{AdS}_4\times\mathbb{CP}^3$

The study of stringy membranes seems to strengthen the following conjecture that was put forward by Bozhilov in [201]. The SCFTs:

(a) $\mathcal{N}=4\ \mathfrak{su}(N)$ SYM theory (dual to IIB String Theory on $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$)

(b) $A_{N-1}(2,0)$ SCFT (dual to M-theory on $\mathrm{AdS}_7\times\mathrm{S}^4$)

(c) $\mathcal{N}=8$ SCFT (dual to M-theory on $\mathrm{AdS}_4\times\mathrm{S}^7$),

might all possess common integrable sectors. Stringy membranes further imply that the above "family" could contain more members (e.g. QCD, $\mathcal{N}=6$ quiver Super Chern-Simons, $\mathcal{N}=1$ SYM [245, 249], etc.). A similar result is that $\mathcal{N}=0,1,2,4$ SYM theories possess a common universal one-loop dilatation operator [250]. Analogous considerations are presently being put forward by the QSC (quantum spectral curve) community, where a "mysterious relation" between the integrable structures of ABJM and $\mathcal{N}=4$ SYM theories has been reported [251]. Elli Pomoni is also currently putting forward very interesting observations in the same direction [252].

• *Possible generalizations.*

We finish this section with some further observations. We have tried to think of a general argument that demonstrates that all (super-) string theories that can be formulated on AdS_5 as well as the corresponding sector of its dual $\mathcal{N}=4$ SYM, may respectively be embedded in (super-) membrane theory in $\mathrm{AdS}_7\times\mathrm{S}^4$ and its dual SCFT. However it is known that double dimensional reduction (DDR) [223] is generally impossible in the case

$$\Big\{\text{membranes}/\mathrm{AdS}_{4/7}\times\mathrm{S}^{7/4}\Big\}\longrightarrow\big\{\text{strings}/\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5\big\},$$

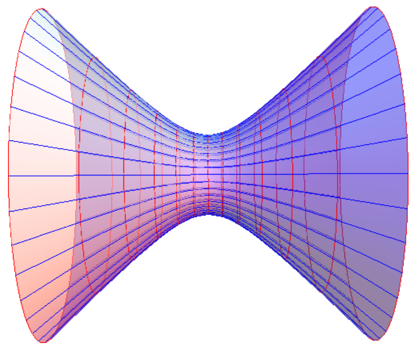
therefore at no circumstances should we expect that string theory on $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ is embeddable in M-theory on $\mathrm{AdS}_{4/7}\times\mathrm{S}^{7/4}$. This doesn't mean that the results of Duff, Howe, Inami and Stelle [223] cannot be applied to $\mathrm{AdS}_{4/7}\times\mathrm{S}^{7/4}$. There could exist certain embeddings of the full Green-Schwarz action on $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ [38, 253] into the full supermembrane action on $\mathrm{AdS}_{4/7}\times\mathrm{S}^{7/4}$ [213] that are allowed. It would be interesting to investigate the degree up to which this is true.

Finally, we could attempt to study more rigorously the functional difference of the membrane and string Polyakov action S_2-S_1, in more complicated situations. Mathematically, it should be possible to prove that any membrane configuration can be obtained by considering a higher-dimensional extended object (e.g. a 3-brane or a 5-brane) that lives in a higher-dimensional spacetime. More generally, any p-brane solution that lives in AdS_m should be obtainable from a $(p+1)$-brane that lives in $\mathrm{AdS}_{m'}\times\mathrm{S}^{m+n+1-m'}$ or from a $(p+q)$-brane that lives in a higher-dimensional spacetime.

Part V

Appendixes

A Anti-de Sitter Space



In this appendix we review the basic properties of AdS spacetimes.[79] Anti-de Sitter space in $p+2$ dimensions (denoted as AdS_{p+2}) consists of the hyperboloid

$$-\eta_{\mu\nu}Y^{\mu}Y^{\nu} = Y_0^2 - \sum_{i=1}^{p+1} Y_i^2 + Y_{p+2}^2 = \ell^2, \qquad \eta_{\mu\nu} = (-,+,\ldots,+,-)\,, \tag{A.1}$$

isometrically embedded in flat $p+3$ dimensional spacetime:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dY^{\mu}dY^{\nu} = -dY_0^2 + \sum_{i=1}^{p+1} dY_i^2 - dY_{p+2}^2. \tag{A.2}$$

Anti-de Sitter space is a maximally symmetric solution of Einstein's equations in vacuum, with a (negative) cosmological constant Λ:

$$S = \frac{1}{2\kappa_{d+1}^2}\int d^{d+1}x\sqrt{-g}\,(R-2\Lambda) \quad\longrightarrow\quad R_{mn} - \frac{R}{2}\,g_{mn} + \Lambda\, g_{mn} = 0. \tag{A.3}$$

Maximally symmetric spaces (or spaces of constant curvature) enjoy a number of very appealing features:[80]

1. Their metric admits the maximum number of bosonic/Killing symmetries.
2. They are homogeneous and isotropic about their every point.
3. They are uniquely characterized by their (constant) curvatures R.

All maximally symmetric spaces in $D = d+1 = p+2$ dimensions are conformally flat (i.e. they have a vanishing Weyl tensor), Einstein spaces (i.e. their Ricci tensor is proportional to the metric tensor). Their basic metric properties are:

$$R_{mnrs} = \frac{R}{d\,(d+1)}\,(g_{mr}g_{ns} - g_{nr}g_{ms}) \quad\Rightarrow\quad W_{mnrs} = 0 \tag{A.4}$$

[79] Two basic references that we follow are [254, 255].

[80] Weinberg's book [256] contains a complete discussion of maximally symmetric spaces.

$$R_{mn} = \frac{R}{d+1}\, g_{mn} \tag{A.5}$$

$$R = -d\,(d+1)\,K = \text{constant}, \quad \Lambda = \frac{d-1}{2\,(d+1)}\,R, \tag{A.6}$$

where $K \equiv R_{1212}/g$ is the Gaussian curvature and W_{mnrs} is the Weyl tensor. The curvature of AdS_{p+2} is constant and negative ($d = p+1$):

$$R = -\frac{(p+1)\,(p+2)}{\ell^2} \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda = -\frac{p\,(p+1)}{2\ell^2}. \tag{A.7}$$

Therefore anti-de Sitter space is a maximally symmetric space with the maximum allowed number of bosonic symmetries, $(p+2)(p+3)/2$ (determined by the corresponding symmetry group $\mathfrak{so}\,(p+1,2)$). For example in AdS_5 it's $p=3$, so that $R = -20/\ell^2$ and $\Lambda = -6/\ell^2$.

The isometry group of AdS_{p+2} is the orthogonal group $\mathfrak{so}(p+1,2)$, which is isomorphic to the conformal group in $d = p+1$ dimensions. Some of the distinguishing properties of AdS are:

- It is not Globally Hyperbolic.
- Possesses Closed Timelike Curves (CTCs).
- It is not Geodesically Convex.
- It is "Holographic".

The topology $\mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}^d$ of AdS_{d+1} is responsible for the existence of closed timelike curves (CTCs) and closed timelike geodesics (CTGs) in anti-de Sitter space. CTCs and CTGs can be avoided by passing to the universal covering space of AdS (CAdS), by simply ignoring time periodicity. Equivalently we say that anti-de Sitter space is not globally hyperbolic or that it does not have a Cauchy surface. This means that the future and the past cannot be defined in AdS in a deterministic way. Moreover, temporal evolution in AdS can always be controlled by the information that flows into it from spatial infinity. This state of affairs can be avoided by imposing appropriate boundary conditions on the boundary of AdS.

Another special feature of AdS is that it is not geodesically convex, meaning that not all of its points can be connected with a geodesic. AdS is also inherently "holographic". The exact formulation of the holographic property of AdS will be given with the help of the "sausage" coordinate system in §A.2. As a preview, it can be proven that the total volume of AdS_{p+2} scales as its total area and consequently, the degrees of freedom of any theory that is defined in AdS can be mapped to its boundary. Therefore the boundary of AdS assumes the role of the holographic screen that we saw in §2.2.

Note however that the picture of a CFT that lives on the boundary of anti-de Sitter space is not entirely correct in AdS/CFT correspondence.[81] As we will see below, the boundary geometries of anti-de Sitter space and its universal covering space ∂AdS and ∂CAdS, depend on the coordinate system with which we describe the AdS bulk. Specifically, the boundary geometry is flat Minkowski space $\mathbb{R}^{1,p}$ in the system of global AdS coordinates and Einstein static universe (ESU) $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^p$ in the Poincaré coordinate system. Therefore the bulk geometry will either have a Poincaré horizon (if it is described in Poincaré coordinates) or not (if it is described in a global coordinate system) and as a consequence, the dual CFT may develop a mass gap or it may not. The following table contains a

[81] See e.g. [9], §3.1.3.

brief summary of the various topologies and geometries of anti-de Sitter space.

	Topology	Boundary
Spacetime AdS_{p+2}:	$\mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}^{p+1}$	$\partial\mathrm{AdS}$: $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^p$ or $\mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}^p$
Universal Covering Space CAdS_{p+2}:	$\mathbb{R}^{p+2}$	$\partial\mathrm{CAdS}$: $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^p$ (ESU) or $\mathbb{R}^{1,p}$ (Minkowski)

Let us consider the bosonic coset space representation of AdS_{d+1} [257]:

$$\mathrm{AdS}_{d+1} = \frac{\mathfrak{so}\,(d,2)}{\mathfrak{so}\,(d,1)} \tag{A.8}$$

In this representation, AdS_{d+1} is generated by acting the group $\mathfrak{so}\,(d,2)$ on either of its two temporal directions, $\hat{Y}_0 = \{1,0,\ldots,0\}$ or $\hat{Y}_{d+1} = \{0,0,\ldots,1\}$, while $\mathfrak{so}\,(d,1)$ is its stability group w.r.t. the chosen temporal direction. We may use the classical group isomorphisms to express the first few dimensionalities, as follows:

AdS_{p+2}	$d = p+1$	p	Coset Space
AdS_1	0	–	$\frac{\mathfrak{so}\,(2)}{\mathfrak{so}\,(1)}$
AdS_2	1	0	$\frac{\mathfrak{su}\,(1,1)}{\mathfrak{so}\,(1,1)}$
AdS_3	2	1	$\frac{\mathfrak{sl}\,(2)\times\mathfrak{sl}\,(2)}{\mathfrak{so}\,(2,1)}$
AdS_4	3	2	$\frac{\mathfrak{sp}\,(4)}{\mathfrak{sl}\,(2)}$
AdS_5	4	3	$\frac{\mathfrak{su}\,(2,2)}{\mathfrak{usp}\,(2,2)}$
AdS_6	5	4	$\frac{\mathfrak{so}\,(5,2)}{\mathfrak{su}\,(4)}$

We will now present the most commonly used coordinate systems of AdS space. A nice collection of coordinate systems in AdS_3, enriched with some extra possibilities that are not presented here, can be found in appendix A of the paper [258].

A.1 Global Coordinates

To pass from embedding coordinates to the global coordinate system of AdS, we perform the following change of variables:

$$\begin{aligned}
&Y_0 = \ell\cosh\rho\,\cos\tau\,, \qquad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi \\
&Y_i = \ell\sinh\rho\,\Omega_i\,, \qquad i = 1,2,\ldots,p+1 \\
&Y_{p+2} = \ell\cosh\rho\,\sin\tau
\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\boxed{ds^2 = \ell^2 \left(-\cosh^2\rho\, d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho\, d\Omega_p^2\right)}. \tag{A.10}$$

Another often employed version of global AdS is the following:

$$\begin{aligned}
&Y_0 = \ell \sec\varphi\, \cos\tau\,, \quad 0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2}, \quad 0 \le \tau \le 2\pi \\
&Y_i = \ell \tan\varphi\, \Omega_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, p+1 \\
&Y_{p+2} = \ell \sec\varphi\, \sin\tau
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\boxed{ds^2 = \frac{\ell^2}{\cos^2\varphi}\left(-d\tau^2 + d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\Omega_p^2\right)}. \tag{A.12}$$

To change between the two global descriptions we must set:

$$\tanh\rho = \sin\varphi \Leftrightarrow \sinh\rho = \tan\varphi. \tag{A.13}$$

In the global coordinate system, the topology $S^1 \times \mathbb{R}^{p+1}$ of AdS, as well as the existence of CTCs (due to time periodicity) are made manifest. The AdS boundary (∂AdS) is approached for $\rho \to \infty$ and $\varphi \to \pi/2$. According to (A.12), $\partial\text{AdS} = S^1 \times S^p$ in global coordinates.

By unwrapping the periodic time (i.e. by sending $S^1 \to \mathbb{R}$), we may reduce AdS to its universal covering space CAdS that has the topology $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p+1}$. The boundary of CAdS is the Einstein static universe ESU_{p+1}: $\partial\text{CAdS} = \mathbb{R} \times S^p$.

The system (A.11)–(A.12) is also suited for the study of the causal structure of AdS, which is preserved under conformal rescalings. According to (A.12), the AdS spacetime is conformally equivalent to one-half the Einstein static universe $\text{ESU}_{p+2} = \mathbb{R} \times S^{p+1}$:[82]

$$ds^2 = -d\tau^2 + d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\Omega_p^2 = -d\tau^2 + d\Omega_{p+1}^2. \tag{A.14}$$

A.2 "Sausage" Coordinates

"Sausage" coordinates, are defined as follows ($i = 1, 2, \ldots, p+1$):

$$\begin{aligned}
&Y_0 = \ell \cos\tau \left(\frac{1+v^2}{1-v^2}\right) \\
&Y_i = \ell\, \Omega_i \left(\frac{2v}{1-v^2}\right) \quad \longrightarrow \quad \boxed{ds^2 = \ell^2\left[-\left(\frac{1+v^2}{1-v^2}\right)^2 d\tau^2 + \frac{4}{(1-v^2)^2}\left(dv^2 + v^2 d\Omega_p^2\right)\right]}. \\
&Y_{p+2} = \ell \sin\tau \left(\frac{1+v^2}{1-v^2}\right)
\end{aligned} \tag{A.15}$$

We may switch between "sausage" and global coordinates with the following change of variables:

$$\sinh\rho = \frac{2v}{1-v^2} \tag{A.16}$$

[82] Since here it's $0 \le \varphi \le \pi/2$, instead of the usual range $0 \le \varphi \le \pi$ of spherical angles (cf. appendix B).

$$\cosh\rho = \frac{1+v^2}{1-v^2}. \tag{A.17}$$

Equivalently we may use the variables ζ_k:

$$\zeta_k = 2v\cdot\Omega_k \quad \& \quad \zeta^2 = \zeta_k\cdot\zeta_k = 4v^2, \tag{A.18}$$

with which (A.15) becomes:

$$\boxed{ds^2 = \ell^2\left[-\left(\frac{1+\zeta^2/4}{1-\zeta^2/4}\right)^2 d\tau^2 + \frac{d\zeta_k\cdot d\zeta^k}{\left(1-\zeta^2/4\right)^2}\right]}. \tag{A.19}$$

In the sausage coordinate system the boundary of anti-de Sitter space (∂AdS) is located at $v\to 1$. Sausage coordinates are suitable for proving the following two propositions about anti-de Sitter space.

Proposition I [259]

The geodesic distance between two points x_1, x_2 near the AdS boundary scales as $\log|x_{12}|/\epsilon$, where $x_{12}\equiv x_1-x_2$ and $\epsilon\ll 1$.

Proposition II

The ratio of the area over the volume of AdS_{p+2} approaches p/ℓ:

$$\lim_{v\to 1}\left[\frac{\mathrm{Area}\left(\mathrm{AdS}_{p+2}\right)}{\mathrm{Vol}\left(\mathrm{AdS}_{p+2}\right)}\right] = \frac{p}{\ell}\,, \quad p = 0,\,1,\,2,\,\ldots, \tag{A.20}$$

where ℓ is the radius of anti-de Sitter space.

A.3 Horospheric/Poincaré Coordinates

If we go over to light-cone coordinates,

$$\left\{\frac{1}{2}\left(Y_0 - Y_{p+1}\right) = \frac{\ell^2}{2y}\,,\ \frac{1}{2}\left(Y_0+Y_{p+1}\right) = \frac{s^2}{2y}\,,\ Y_i = \frac{\ell x_i}{y}\,,\ Y_{p+2} = \frac{\ell t}{y}\right\},\ s^2\equiv -t^2+\mathbf{x}_p^2+y^2, \tag{A.21}$$

we can set up the horospheric or Poincaré coordinate system as follows [260]:

$$\begin{aligned}
Y_0 &= \frac{1}{2y}\left[-t^2+\mathbf{x}_p^2+y^2+\ell^2\right],\ y\in[0,\infty) & & Y_0 = \frac{1}{2u}\left[1+u^2\left(-t^2+\mathbf{x}_p^2+\ell^2\right)\right],\ u\in[0,\infty)\\
Y_i &= \frac{\ell x_i}{y}\quad (i=1,\ 2,\ldots,\ p) & \xleftrightarrow{u=1/y}\ & Y_i = \ell u x_i \quad (i=1,\ 2,\ldots,\ p)\\
Y_{p+1} &= \frac{1}{2y}\left[-t^2+\mathbf{x}_p^2+y^2-\ell^2\right] & & Y_{p+1} = \frac{1}{2u}\left[1+u^2\left(-t^2+\mathbf{x}_p^2-\ell^2\right)\right]\\
Y_{p+2} &= \frac{\ell t}{y} & & Y_{p+2} = \ell u t.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

There's a small web of equivalent representations of Poincaré/horospheric coordinates:

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{ds^2=\ell^2\left(dr^2+e^{2r}\left(-dt^2+d\mathbf{x}_p^2\right)\right)} & & \\
\text{(Klebanov-Maldacena [261])} & & \\
\big\uparrow u=e^r & & \\
\boxed{ds^2=\ell^2\left(\frac{du^2}{u^2}+u^2\left(-dt^2+d\mathbf{x}_p^2\right)\right)} & \xrightarrow{u=1/y} & \boxed{ds^2=\frac{\ell^2}{y^2}\left(-dt^2+d\mathbf{x}_p^2+dy^2\right)} \\
\text{(Poincaré Frame)} & & \text{(Conformal Frame)} \\
\big\downarrow u=\frac{z}{\ell^2} & & \big\downarrow y=\ell e^{-\widetilde{u}/\ell} \\
\boxed{ds^2=\frac{z^2}{\ell^2}\left(-dt^2+d\mathbf{x}_p^2\right)+\frac{\ell^2}{z^2}dz^2} & & \boxed{ds^2=e^{2\widetilde{u}/\ell}\left(-dt^2+d\mathbf{x}_p^2\right)+d\widetilde{u}^2} \\
\text{(Maldacena [6])} & & \text{(Domain-Wall Frame)}
\end{array} \tag{A.23}$$

In the conformal frame, the metric is manifestly invariant under the following transformations:

$$\text{Poincaré:}\ \ x'_\mu=M^\nu_\mu x_\mu+a_\mu \quad (\mathfrak{iso}(p,1)) \tag{A.24}$$

$$\text{Dilations:}\ x'_m=\alpha\cdot x_m, \tag{A.25}$$

where $x_\mu=(t,\,x_i)$ and $x_m=(t,\,x_i,\,y)$, $i=1,2,\ldots,p$. Together with inversions

$$\frac{x'_m}{x'^2}=\frac{x_m}{x^2}, \tag{A.26}$$

this gives a total of $(d+2)\,(d+1)\,/2$ conservation laws.

The boundary of anti-de Sitter space in horospheric/Poincaré coordinates is the flat $p+1$ dimensional Minkowski spacetime $\mathbb{R}^{1,p}$, that is obtained for $y\to 0$ and $u,\,z,\,r,\,\widetilde{u}\to\infty$.[83] A Poincaré horizon is approached for $u,\,z\to 0$.

The Poincaré coordinate system is just a patch of the full anti-de Sitter space, since it covers only one-half of it. To see this, notice that in Poincaré coordinates $z\in[0,+\infty)$, while in the case of the full AdS, $z\in(-\infty,0]\bigcup[0,+\infty)$. To illustrate this point better, we express the Poincaré coordinate z in the global coordinate system (A.11):

$$z=\frac{\ell^2}{y}=Y_0-Y_{p+1}=\ell\sec\varphi\cos\tau-\ell\tan\varphi\cos\theta\geq 0\Rightarrow\cos\tau\geq\sin\varphi\cos\theta, \tag{A.27}$$

so that it describes one-half of the AdS hyperboloid. Summarizing,

$$\mathrm{AdS}_{p+2}\mapsto\frac{1}{2}\cdot\mathrm{ESU}_{p+2}\quad\&\quad\text{Poincaré patch}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AdS}, \tag{A.28}$$

since anti-de Sitter space can be conformally mapped to one-half the Einstein static universe (ESU), as we saw in §A.1 by using global coordinates in the form (A.12).

[83] The transformation between the global and the Poincaré boundaries of AdS has been studied in [262].

A.4 Stereographic Coordinates

The stereographic coordinate system of anti-de Sitter space is defined as follows [254]:

$$\begin{aligned}
Y_0 &= \frac{2\ell t}{1-s^2}, \qquad s^2 \equiv -t^2 + \mathbf{x}_{p+1}^2 \\
Y_i &= \frac{2\ell x_i}{1-s^2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p+1 \quad \longrightarrow \quad \boxed{ds^2 = \frac{4\ell^2}{(1-s^2)^2}\left(-dt^2 + d\mathbf{x}_{p+1}^2\right)}. \\
Y_{p+2} &= \ell \cdot \frac{1+s^2}{1-s^2}
\end{aligned} \tag{A.29}$$

All the frames that are conformally equivalent to Minkowski spacetimes (like the stereographic coordinates and (A.22)) have the nice property that they preserve the light cone structure.

A.5 "Static" Coordinates

In [263], Hawking and Page used the following metric for the universal covering space of anti-de Sitter space (CAdS):

$$\boxed{ds^2 = -\left[\frac{r^2}{\ell^2}+1\right] d\widetilde{\tau}^2 + \frac{dr^2}{\left[\frac{r^2}{\ell^2}+1\right]} + r^2 d\Omega_p^2}. \tag{A.30}$$

This system is known as "static" coordinates. It is related to the system of global coordinates (A.10) as follows:

$$r = \ell \sinh\rho, \qquad \widetilde{\tau} = \frac{\tau}{\ell} \tag{A.31}$$

To transform this metric to the conformal frame in (A.23), we perform the following change of variables (for the case of AdS_4, see [264]):

$$\begin{aligned}
t &= \frac{\sqrt{r^2+\ell^2}\,\sin(\widetilde{\tau}/\ell)}{\sqrt{r^2+\ell^2}\,\cos(\widetilde{\tau}/\ell) + r\,\Omega_1} \\
x_i &= \frac{r\,\Omega_{i+1}}{\sqrt{r^2+\ell^2}\,\cos(\widetilde{\tau}/\ell) + r\,\Omega_1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p \\
y &= \frac{\ell}{\sqrt{r^2+\ell^2}\,\cos(\widetilde{\tau}/\ell) + r\,\Omega_1}.
\end{aligned} \tag{A.32}$$

The boundary ∂CAdS is reached for $r \to \infty$. It is the Einstein static universe (ESU), $\mathbb{R} \times S^p$.

A.6 AdS as a Ruled Surface[84]

In [265], we find the following coordinate system of AdS_{p+2}:

$$Y_0 = \ell\,(\cos\phi - M \sin\phi) \tag{A.33}$$

[84] This subsection is based on unpublished research material by the author's PhD supervisor, E. Floratos.

$$Y_i = \ell\, M\, \Omega_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p+1 \tag{A.34}$$

$$Y_{p+2} = \ell\, (\sin\phi + M\cos\phi)\,, \tag{A.35}$$

the line element of which is given by

$$\boxed{ds^2 = \ell^2 \left(\left(1+M^2\right) d\phi^2 + 2\, d\phi\, dM - M^2 d\Omega_p^2 \right)}\,. \tag{A.36}$$

If we complete the square we obtain the line element,

$$ds^2 = \ell^2 \left\{ \left(1+M^2\right) \left(d\phi + \frac{dM}{1+M^2} \right)^2 - \frac{dM^2}{1+M^2} - M^2 d\Omega_p^2 \right\} \tag{A.37}$$

and by setting $\chi \equiv \arctan M$, we may bring the above metrics in the following forms:

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\cos^2\chi} \left\{ d(\phi+\chi)^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi\, d\Omega_p^2 \right\}. \tag{A.38}$$

A.6.1 Light-Cone Frame

We may now pass to light-cone coordinates:

$$Y_\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Y_0 \pm Y_{p+1} \right), \tag{A.39}$$

which we may invert and obtain

$$Y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Y_+ + Y_- \right) \tag{A.40}$$

$$Y_{p+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Y_+ - Y_- \right). \tag{A.41}$$

Since Y_0 and Y_{p+1} lie on the AdS hyperboloid (A.1), the remaining AdS coordinates are constrained:

$$\ell^2 = Y_0^2 - \sum_{i=1}^{p+1} Y_i^2 + Y_{p+2}^2 = 2Y_+Y_- - \sum_{i=1}^{p} Y_i^2 + Y_{p+2}^2. \tag{A.42}$$

In the case of AdS_2 we get:

$$\ell^2 = 2Y_+Y_- + Y_2^2 \Rightarrow Y_2 = \pm\sqrt{\ell^2 - 2Y_+Y_-} \tag{A.43}$$

and the corresponding line element is given by:

$$\boxed{ds^2 = \frac{1}{\ell^2 - 2Y_+Y_-} \left[Y_-^2 dY_+^2 + Y_+^2 dY_-^2 + 2\left(\ell^2 - Y_+Y_-\right) dY_+ dY_- \right]}\,. \tag{A.44}$$

A.7 AdS Coordinate Systems Summary

Here's a summary of all the coordinate systems of AdS_{p+2} that we saw above:

	Metric	∂AdS	∂CAdS
1. Embedding Coordinates:	$ds^2 = -dY_0^2 + \sum_{i=1}^{p+1} dY_i^2 - dY_{p+2}^2$	$Y \longrightarrow \infty$	ESU
	$Y_0^2 - \sum_{i=1}^{p+1} Y_i^2 + Y_{p+2}^2 = \ell^2$		
2. Global Coordinates:	$ds^2 = \ell^2 \left(-\cosh^2\rho\, d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho\, d\Omega_p^2\right)$	$\rho \to \infty$	ESU
	$ds^2 = \frac{\ell^2}{\cos^2\varphi}\left(-d\tau^2 + d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\Omega_p^2\right)$	$\varphi \to \frac{\pi}{2}$	ESU
3. Sausage Coordinates:	$ds^2 = \ell^2\left[-\left(\frac{1+v^2}{1-v^2}\right)^2 d\tau^2 + \frac{4}{\left(1-v^2\right)^2}\left(dv^2 + v^2 d\Omega_p^2\right)\right]$	$v \to 1$	ESU
4. Poincaré Frame:	$ds^2 = \ell^2\left(\frac{du^2}{u^2} + u^2\left(-dt^2 + d\mathbf{x}_p^2\right)\right)$	$u \to \infty$	Minkowski
	$ds^2 = \frac{z^2}{\ell^2}\left(-dt^2 + d\mathbf{x}_p^2\right) + \frac{\ell^2}{z^2}dz^2$	$z \to \infty$	Minkowski
5. Conformal Frame:	$ds^2 = \frac{\ell^2}{y^2}\left(-dt^2 + d\mathbf{x}_p^2 + dy^2\right)$	$y \to 0$	Minkowski
6. Domain-Wall Frame:	$ds^2 = e^{2\widetilde{u}/\ell}\left(-dt^2 + d\mathbf{x}_p^2\right) + d\widetilde{u}^2$	$\widetilde{u} \to \infty$	Minkowski
	$ds^2 = \ell^2\left(dr^2 + e^{2r}\left(-dt^2 + d\mathbf{x}_p^2\right)\right)$	$r \to \infty$	Minkowski
7. Stereographic Projection:	$ds^2 = \frac{4\ell^2}{\left(1-s^2\right)^2}\left(-dt^2 + d\mathbf{x}_{p+1}^2\right)$	$s \to 1$	Minkowski
8. "Static" Coordinates:	$ds^2 = -\left[\frac{r^2}{\ell^2} + 1\right] d\widetilde{\tau}^2 + \frac{dr^2}{\left[\frac{r^2}{\ell^2} + 1\right]} + r^2 d\Omega_p^2$	$r \to \infty$	ESU

B Parametrizations of S^n

The purpose of the present appendix is to briefly review the various parametrizations of the n-dimensional unit sphere S^n that are used in this thesis.

B.1 Standard Parametrizations

The standard parametrization of the unit n-sphere comes in two main flavors, one consisting mostly of sines and one having basically cosines. To obtain either one of them we set:

B.1.1 Sine Parametrization

$$\begin{aligned}
&\Omega_1 = \cos x_1 \\
&\Omega_2 = \sin x_1 \, \cos x_2 \\
&\Omega_3 = \sin x_1 \, \sin x_2 \, \cos x_3 \\
&\vdots \qquad\qquad , \; x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in [0, \pi] \, , \; x_n \in [0, 2\pi) \, , \quad \sum_{j=1}^{n+1} \Omega_j^2 = 1 \\
&\Omega_n = \sin x_1 \, \sin x_2 \, \sin x_3 \ldots \sin x_{n-1} \cos x_n \\
&\Omega_{n+1} = \sin x_1 \, \sin x_2 \, \sin x_3 \ldots \sin x_{n-1} \sin x_n
\end{aligned}$$

$$\text{Induced Metric: } \boxed{d\Omega_n^2 = dx_1^2 + s_1^2 \, dx_2^2 + s_1^2 \, s_2^2 \, dx_3^2 + \ldots + s_1^2 \, s_2^2 \, s_3^2 \ldots s_{n-1}^2 \, dx_n^2} \, . \tag{B.1}$$

B.1.2 Cosine Parametrization

$$\begin{aligned}
&\Omega_1 = \sin x_1 \\
&\Omega_2 = \cos x_1 \, \sin x_2 \\
&\Omega_3 = \cos x_1 \, \cos x_2 \, \sin x_3 \\
&\vdots \qquad\qquad , \; x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] , \; x_n \in [0, 2\pi) \, , \quad \sum_{j=1}^{n+1} \Omega_j^2 = 1 \\
&\Omega_n = \cos x_1 \, \cos x_2 \, \cos x_3 \ldots \cos x_{n-1} \sin x_n \\
&\Omega_{n+1} = \cos x_1 \, \cos x_2 \, \cos x_3 \ldots \cos x_{n-1} \cos x_n
\end{aligned}$$

$$\text{Induced Metric: } \boxed{d\Omega_n^2 = dx_1^2 + c_1^2 \, dx_2^2 + c_1^2 \, c_2^2 \, dx_3^2 + \ldots + c_1^2 \, c_2^2 \, c_3^2 \ldots c_{n-1}^2 \, dx_n^2} \, . \tag{B.2}$$

B.2 Complex Parametrizations

The complex parametrization of the unit n-sphere depends crucially on whether the sphere is odd or even-dimensional. To obtain the complex parametrization, we must divide all of its points $\Omega_1, \ldots, \Omega_{n+1}$ into two main sets of coordinates that are labelled X_j and Y_j, $j = 1, 2, \ldots, \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. The two sets are then arranged into pairs (X_j, Y_j) which serve as components of the complex coordinates of the unit n-sphere $Z_j \equiv X_j + iY_j$.

More concretely, for each of the two cases (odd and even-dimensional) we set:

$\underline{n=2k+1}$ (odd): $Z_j = X_j + i\,Y_j = \Omega_j \cdot e^{iy_j}$

$\underline{n=2k}$ (even): $Z_j = X_j + i\,Y_j = \Omega_j \cdot e^{iy_j}, \quad y_j \in [0, 2\pi)\,,\; j = 1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$

$$Z_{k+1} = X_{k+1} = \Omega_{k+1}, \qquad \sum_{j=1}^{k+1} |Z_j|^2 = \sum_{j=1}^{k+1} X_j^2 + Y_j^2 = 1$$

$$\text{Induced Metric: } \boxed{ds^2 = \sum_{j=1}^{k+1} |dZ_j|^2 = \sum_{j=1}^{k+1} dX_j^2 + dY_j^2 = d\Omega_k^2 + \sum_{j=1}^{\lfloor n+1/2 \rfloor} (\Omega_j\, dy_j)^2}\,, \tag{B.3}$$

Let us give some examples of the complex parametrization in both its odd and even-dimensional instances. The majority of them are employed in this thesis time and again.

$\mathbf{S}^3:$
$$Z_1 = \cos\theta\, e^{\phi_1} \longrightarrow ds^2 = d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\phi_1^2 + \sin^2\theta\, d\phi_2^2$$
$$Z_2 = \sin\theta\, e^{\phi_2}$$

$\mathbf{S}^4:$
$$Z_1 = \cos\theta_1\, e^{\phi_1}$$
$$Z_2 = \sin\theta_1 \cos\theta_2\, e^{\phi_2} \longrightarrow ds^2 = d\theta_1^2 + \cos^2\theta_1 d\phi_1^2 + \sin^2\theta_1 \left(d\theta_2^2 + \cos^2\theta_2\, d\phi_2^2\right)$$
$$Z_3 = \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

$$Z_1 = \sin\theta_1\, e^{\phi_1}$$
$$Z_2 = \cos\theta_1 \sin\theta_2\, e^{\phi_2} \longrightarrow ds^2 = d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\phi_1^2 + \cos^2\theta_1 \left(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2\, d\phi_2^2\right)$$
$$Z_3 = \cos\theta_1 \cos\theta_2$$

$\mathbf{S}^5:$
$$Z_1 = \cos\theta_1\, e^{\phi_1}$$
$$Z_2 = \sin\theta_1 \cos\theta_2\, e^{\phi_2} \longrightarrow ds^2 = d\theta_1^2 + \cos^2\theta_1\, d\phi_1^2 + \sin^2\theta_1 \left(d\theta_2^2 + \cos^2\theta_2\, d\phi_2^2 + \sin^2\theta_2\, d\phi_3^2\right)$$
$$Z_3 = \sin\theta_1 \sin\theta_2\, e^{\phi_3}$$

$$Z_1 = \sin\theta_1\, e^{\phi_1}$$
$$Z_2 = \cos\theta_1 \sin\theta_2\, e^{\phi_2} \longrightarrow ds^2 = d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1\, d\phi_1^2 + \cos^2\theta_1 \left(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2\, d\phi_2^2 + \cos^2\theta_2\, d\phi_3^2\right)$$
$$Z_3 = \cos\theta_1 \cos\theta_2\, e^{\phi_3}$$

$\mathbf{S}^7:$
$$Z_1 = \cos\theta_1\, e^{\phi_1}$$
$$Z_2 = \sin\theta_1 \cos\theta_2\, e^{\phi_2}$$
$$Z_3 = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3\, e^{\phi_3}$$

$$Z_4 = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \, e^{\phi_4}$$

$$ds^2 = d\theta_1^2 + \cos^2\theta_1 \, d\phi_1^2 + \sin^2\theta_1 \left(d\theta_2^2 + \cos^2\theta_2 \, d\phi_2^2 + \sin^2\theta_2 \left(d\theta_3^2 + \cos^2\theta_3 \, d\phi_3^2 + \sin^2\theta_4 \, d\phi_4^2\right)\right)$$

$$Z_1 = \sin\theta_1 \, e^{\phi_1}$$

$$Z_2 = \cos\theta_1 \sin\theta_2 \, e^{\phi_2}$$

$$Z_3 = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 \, e^{\phi_3}$$

$$Z_4 = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 \, e^{\phi_4}$$

$$ds^2 = d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 \, d\phi_1^2 + \cos^2\theta_1 \left(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 \, d\phi_2^2 + \cos^2\theta_2 \left(d\theta_3^2 + \sin^2\theta_3 \, d\phi_3^2 + \cos^2\theta_4 \, d\phi_4^2\right)\right).$$

B.3 "Sausage" Coordinates

We may also write down the analog of the "sausage" metric (A.15) for the unit n-sphere:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \cos\phi \left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right) \\ \Omega_i &= \widetilde{\Omega}_i \left(\frac{2v}{1+v^2}\right) \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{ds^2 = \left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^2 d\phi^2 + \frac{4}{(1+v^2)^2}\left(dv^2 + v^2 d\widetilde{\Omega}_{n-2}^2\right)}, \\ \Omega_{n+1} &= \sin\phi \left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right) \end{aligned} \tag{B.4}$$

where

$$\sum_{j=1}^{n+1} \Omega_j^2 = \sum_{i=2}^{n} \widetilde{\Omega}_i^2 = 1 \quad \& \quad i = 2, 3, \ldots, n. \tag{B.5}$$

B.4 Stereographic Coordinates

The stereographic coordinates of the unit n-sphere S^n are defined as follows:

$$\Omega_i = \frac{2x_i}{s^2+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{B.6}$$

$$\Omega_{n+1} = \frac{s^2-1}{s^2+1}, \quad s^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \mathbf{x}_n^2 \quad \longrightarrow \quad \boxed{ds^2 = \frac{4d\mathbf{x}_n^2}{(1+s^2)^2}}. \tag{B.7}$$

For completeness in our presentation let us also write down the coset representation of the n-sphere [257]:

$$\mathrm{S}^n = \frac{\mathfrak{so}(n+1)}{\mathfrak{so}(n)}, \tag{B.8}$$

which the analog of (A.8) for S^n.

C Plane-Wave Backgrounds & Penrose Limits

C.1 Plane-Wave Backgrounds

Plane-waves in $d+1$ dimensions are special cases of pp-wave spacetimes:

$$ds^2 = -2dudv - F(u,x^i)du^2 + 2A_j(u,x^i)dudx^j + g_{jk}(u,x^i)dx^j dx^k, \tag{C.1}$$

where u and v are the light-cone coordinates:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^0 + x^d\right), \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^0 - x^d\right), \quad i = 1, 2, \ldots, d-1. \tag{C.2}$$

The functions $F(u,x^i)$, $A_j(u,x^i)$, $g_{jk}(u,x^i)$ (= metric of transverse spacetime) are determined from the supergravity equations of motion. Pp-waves admit a covariantly constant and null Killing vector field, while for $A_j = 0$, $g_{jk} = \delta_{jk}$, they are α'-exact solutions of supergravity [42]:

$$ds^2 = -2dudv - F(u,x^i)du^2 + dx^i dx^i. \tag{C.3}$$

Plane-waves are pp-waves for which $F(u,x^i) = f_{ij}(u)x^i x^j$, $A_j = 0$ and $g_{jk} = \delta_{jk}$:

$$ds^2 = -2dudv - f_{ij}(u)x^i x^j du^2 + dx^i dx^i. \tag{C.4}$$

Homogeneous plane-waves have constant $f_{ij}(u) = \mu_{ij}$:

$$ds^2 = -2dudv - \mu_{ij}^2 x^i x^j du^2 + dx^i dx^i. \tag{C.5}$$

Homogeneous and isotropic plane-waves are given by:

$$ds^2 = -2dudv - \mu^2 x^i x^i du^2 + dx^i dx^i. \tag{C.6}$$

One of the most important properties of plane-wave spacetimes is that they are the Penrose limits of any given spacetime. It can be proven that the plane-wave limits of the maximally supersymmetric backgrounds $\mathrm{AdS}_{4/5/7} \times \mathrm{S}^{7/5/4}$ of type IIB supergravity, are also backgrounds of maximally supersymmetric solutions that preserve the maximum number of 32 supersymmetries.[85] As we saw in §3.6, type IIB string theory can be exactly solved on the homogeneous and isotropic plane-wave background (C.6) that is the Penrose limit of $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. The plane wave/SYM duality states that IIB string theory on the plane-wave limit of $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ is the AdS/CFT dual of the BMN sector of $\mathcal{N} = 4$ SYM theory [43].

[85]In type IIB supergravity, the only maximally supersymmetric backgrounds are flat spacetime, $\mathrm{AdS}_{4/5/7} \times \mathrm{S}^{7/5/4}$ and their Penrose limits. In type IIA supergravity it is only flat space. See [266]. A summary can be found in §C.3.

C.2 Penrose Limits

According a theorem of Penrose [267], every spacetime has a plane wave as a limit. Starting from any given metric we may obtain its plane-wave limit in two steps:

(a). Consider only a small neighbourhood of the spacetime near a null geodesic.

(b). Blow up spacetime near the geodesic to fill all spacetime.

The resulting metric is a plane wave that is known as the Penrose limit of the original spacetime. Güven [268] generalized Penrose's theorem and limiting procedure to supergravity. Below we shall obtain the Penrose limits of $\mathrm{AdS}_{p+2} \times \mathrm{S}^{q+2}$ and $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$.

C.2.1 Penrose Limits of $\mathrm{AdS}_{p+2} \times \mathrm{S}^{q+2}$

Let us first consider the Penrose limit of $\mathrm{AdS}_{p+2} \times \mathrm{S}^{q+2}$ (more can be found in [44]). Begin from the line element of $\mathrm{AdS}_{p+2} \times \mathrm{S}^{q+2}$ in global coordinates:

$$ds^2 = \ell^2 \left(-\cosh^2\rho\, dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho\, d\Omega_p^2\right) + R^2 \left(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\phi^2 + \sin^2\theta\, d\widetilde{\Omega}_q^2\right). \tag{C.7}$$

If we perform the change of coordinates

$$u = \frac{1}{2}\left(t + \frac{R}{\ell}\,\phi\right), \quad v = \ell^2\left(t - \frac{R}{\ell}\,\phi\right) \quad \& \quad x^2 = x^i x^i = \ell^2 \sinh^2\rho\,, \quad y^2 = y^j y^j = R^2 \sin^2\theta, \tag{C.8}$$

for $i = 1, 2, \ldots, p+1$ and $j = 1, 2, \ldots, q+1$, the $\mathrm{AdS}_{p+2} \times \mathrm{S}^{q+2}$ metric (C.7) becomes:

$$\begin{aligned} ds^2 = &- \left(\ell^2 + x^2\right)\left(du^2 + \frac{dv^2}{4\ell^4} + \frac{du dv}{\ell^2}\right) + \frac{\ell^2 dx^2}{\ell^2 + x^2} + x^2 d\Omega_p^2 + \\ &+ \frac{R^2 dy^2}{R^2 - y^2} + \frac{\ell^2}{R^2}\left(R^2 - y^2\right)\left(du^2 + \frac{dv^2}{4\ell^4} - \frac{du dv}{\ell^2}\right) + y^2 d\widetilde{\Omega}_q^2. \end{aligned} \tag{C.9}$$

To take the Penrose limit we must let ℓ, $R \to \infty$ with $\ell^2/R^2 = \mathfrak{k}^2 = \text{const.}$ (C.9) becomes:

$$ds^2 = -\left(\ell^2 + x^2\right) du^2 - du dv + dx^2 + x^2 d\Omega_p^2 + dy^2 + \left(\ell^2 - \mathfrak{k}^2 y^2\right) du^2 - du dv + y^2 d\widetilde{\Omega}_q^2, \tag{C.10}$$

or equivalently,

$$ds^2 = -2du dv - \left(x^2 + \mathfrak{k}^2 y^2\right) du^2 + dx^i dx^i + dy^j dy^j. \tag{C.11}$$

This is just the metric of a homogeneous anisotropic plane wave (C.5). For $x^i = 0$ or $y^j = 0$, the metric of homogeneous and isotropic plane waves (C.6) is obtained.

C.2.2 Penrose Limit of $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$

We will now examine the Penrose limits of the orbifolded spacetime $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$. More on the Penrose limits of $\mathrm{AdS}_{p+2} \times \mathrm{S}^{q+2}$ orbifolds and orientifolds can be found in [269] and references therein.

The metric of $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$ in global coordinates is:

$$ds^2 = \ell^2 \left(-\cosh^2\rho\, dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho\, d\Omega_2^2\right) + R^2 \left(d\alpha^2 + \cos^2\alpha\, d\overline{\Omega}_3^2 + \sin^2\alpha\, d\widetilde{\Omega}_3^2\right), \quad \text{(C.12)}$$

where $R = 2\ell$ and

$$d\overline{\Omega}_3^2 = d\beta^2 + \cos^2\beta d\phi_1^2 + \sin^2\beta d\phi_2^2 \quad \& \quad d\widetilde{\Omega}_3^2 = \frac{1}{4} d\overline{\Omega}_2^2 + \left[\frac{d\chi}{k} + \frac{1}{2}(\cos\gamma - 1)\, d\delta\right]^2 \quad \text{(C.13)}$$

$$d\overline{\Omega}_2^2 = d\gamma^2 + \sin^2\gamma d\delta^2. \quad \text{(C.14)}$$

There exist two distinct ways to take the Penrose limit of $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$. Either we can boost along the (t, ϕ_1) direction or along the direction (t, χ). The former is very similar to the case of $\mathrm{AdS}_{p+2} \times \mathrm{S}^{q+2}$ that we studied above.

- Boost along (t, ϕ_1). Let us make the following change of coordinates,

$$u = \frac{1}{2}\left(t + \frac{R}{\ell}\phi_1\right), \quad v = \ell^2 \left(t - \frac{R}{\ell}\phi_1\right) \quad \& \quad x^2 = x^i x^i = \ell^2 \sinh^2\rho, \quad y^2 = y^j y^j = R^2 \sin^2\alpha,$$

$$z^2 = z^k z^k = R^2 \sin^2\beta.$$

Metric (C.12) then becomes:

$$\begin{aligned} ds^2 =& -\left(\ell^2 + x^2\right)\left(du^2 + \frac{dv^2}{4\ell^4} + \frac{du dv}{\ell^2}\right) + \frac{\ell^2 dx^2}{\ell^2 + x^2} + x^2 d\Omega_2^2 + \frac{R^2 dy^2}{R^2 - y^2} + \\ &+ \left(R^2 - y^2\right)\left\{\frac{dz^2}{R^2 - z^2} + \mathfrak{k}^2\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)\left[du^2 + \frac{dv^2}{4\ell^4} - \frac{du dv}{\ell^2}\right] + \frac{z^2 d\phi_2^2}{R^2}\right\} + y^2 d\widetilde{\Omega}_3^2. \end{aligned} \quad \text{(C.15)}$$

If we take the Penrose limit ℓ, $R \to \infty$ with $\ell^2/R^2 = \mathfrak{k}^2 = 1/4$ we obtain

$$ds^2 = -2du dv - \left[x^2 + \mathfrak{k}^2\left(z^2 + y^2\right)\right]du^2 + dx^2 + x^2 d\Omega_2^2 + dz^2 + z^2 d\phi_2^2 + dy^2 + y^2 d\widetilde{\Omega}_3^2. \quad \text{(C.16)}$$

For $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$ and $k = 1, 2$ the Penrose limit along (t, ϕ_1) takes the following form:

$$ds^2 = -2du dv - \left[x^2 + \frac{1}{4}\left(y^2 + z^2\right)\right]du^2 + dx^i dx^i + dy^j dy^j + dz^k dz^k. \quad \text{(C.17)}$$

- Boost along (t, χ). We make the following change of coordinates:

$$u = \frac{1}{2}\left(t + \frac{R}{\ell}\cdot\frac{\chi}{k}\right), \quad v = \ell^2\left(t - \frac{R}{\ell}\cdot\frac{\chi}{k}\right) \quad \& \quad x^2 = x^i x^i = \ell^2 \sinh^2\rho, \quad y^2 = y^j y^j = R^2\cos^2\alpha,$$

$$z^2 = z^k z^k = R^2 \sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Metric (C.12) takes the form:

$$ds^2 = -\left(\ell^2 + x^2\right)\left(du^2 + \frac{dv^2}{4\ell^4} + \frac{dudv}{\ell^2}\right) + \frac{\ell^2 dx^2}{\ell^2 + x^2} + x^2 d\Omega_2^2 + \frac{R^2 dy^2}{R^2 - y^2} + y^2 d\overline{\Omega}_3^2$$
$$+ \left(R^2 - y^2\right)\left\{\frac{dz^2}{R^2 - z^2} + \frac{z^2}{R^2}\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)d\delta^2 + \left[\mathfrak{k}\left(du - \frac{dv}{2\ell^2}\right) - \frac{x^2 d\delta}{R^2}\right]^2\right\}. \quad \text{(C.18)}$$

Taking the Penrose limit ℓ, $R \to \infty$ with $\ell^2/R^2 = \mathfrak{k}^2 = 1/4$ we obtain

$$ds^2 = -2dudv - \left[x^2 + \mathfrak{k}^2\left(y^2 + z^2\right)\right]du^2 + dx^2 + x^2 d\Omega_2^2 + dy^2 + y^2 d\overline{\Omega}_3^2 + dz^2 + z^2\left(d\delta - \mathfrak{k}du\right)^2 \quad \text{(C.19)}$$

For $\widetilde{\delta} \equiv \delta - \mathfrak{k} \cdot u$, the Penrose limit along (t, χ) takes the form (C.17):

$$ds^2 = -2dudv - \left[x^2 + \frac{1}{4}\left(y^2 + z^2\right)\right]du^2 + dx^i dx^i + dy^j dy^j + dz^k dz^k. \quad \text{(C.20)}$$

where again $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3,4$ and $k = 1,2$. Metric (C.20) describes a homogeneous and anisotropic plane wave (C.5). For $x^i = 0$ or $y^i = z^i = 0$ it reduces to the isotropic case (C.6).

C.3 Freund-Rubin Ansatz

The Freund-Rubin ansatz [270] is a very strong theorem that allows to obtain solutions of supergravity by taking advantage of the symmetries of spacetime. The theorem generally states that there exists a natural way to compactify a $(d+1)$-dimensional supergravity theory with an s-form antisymmetric field F_s, either as $\mathrm{X}_{(d+1-s)} \times \mathrm{M}_s$, where M_s is a compact s-dimensional manifold and $\mathrm{X}_{(d+1-s)}$ is a $(d+1-s)$ dimensional manifold of negative curvature, or as $\mathrm{X}_s \times \mathrm{M}_{(d+1-s)}$. Applying the Freund-Rubin ansatz to 1_{11} supergravity (which has a 4-form field—see §13.3.1) and IIB supergravity (with 3-form and 5-form fields), the following exact supergravity solutions are obtained [271]:

$$\mathrm{AdS}_{4/7} \times \mathrm{S}^{7/4} \quad \& \quad \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5, \quad \mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^3 \times \mathrm{M}^4.$$

These solutions have also been encountered in the context of the Maldacena dualities in §3.7. Generally, any compact manifold can take the place of the p-sphere in the above compactifications. As proven by Figueroa-O'Farrill and Papadopoulos [266], only the p-sphere guarantees maximal supersymmetry. $\mathrm{AdS}_{4/5/7} \times \mathrm{S}^{7/5/4}$ spacetimes (along with flat space and a special type of plane-wave background in 10 and 11 dimensions) are maximally supersymmetric backgrounds of 1_{11} and IIB supergravity, preserving 32 supersymmetries. Conversely, IIA supergravity only admits flat space as maximally supersymmetric background.

D Strings in Flat Spacetime

When strings are infinitesimally small, the curvature of spacetime is expected to have a negligible effect in their motion, which will essentially take place in a flat background. In §6, GKP strings were studied in great detail. According to what we have just said, the negative curvature of anti-de Sitter space and the positive curvature of the sphere will only have a subleading contribution to the short-string limits of GKP strings, which will essentially "see" an almost flat spacetime. In this appendix we are going to study the analogues of GKP configurations in flat space:

$$ds^2 = \ell^2\Big[-dt^2 + d\rho^2 + \rho^2\left(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\phi_1^2 + \sin^2\theta\, d\phi_2^2\right)\Big].^{86} \tag{D.1}$$

In particular we are going to derive the dispersion relations of rotating and pulsating strings.

D.1 Rotating String

Consider the rotating configuration (6.8):

$$\Big\{t = \kappa\tau,\ \rho = \rho(\sigma),\ \theta = \kappa\omega\tau,\ \phi_1 = \phi_2 = 0\Big\}, \tag{D.2}$$

inside the 5-dimensional flat background (D.1). Ansatz (6.40) can be obtained from (D.2) for $\rho \to \overline{\theta}_1$. The conformal gauge ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) Polyakov action is given by:

$$S_P = \frac{T\ell^2}{2}\int\Big(-\dot{t}^2 + \rho^2\,\dot{\theta}^2 - \rho'^2\Big)d\tau d\sigma = \frac{T\ell^2}{2}\int\Big(-\kappa^2 + \kappa^2\,\omega^2\,\rho^2 - \rho'^2\Big)d\tau d\sigma. \tag{D.3}$$

This is essentially the same as taking $\rho, \overline{\theta}_1 \to 0$ in actions (6.11)–(6.42). κ is again a factor that guarantees that $\sigma(\rho_0) = \pi/2$:

$$\sigma(\rho_0) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{\rho_0}\frac{d\rho}{\kappa\sqrt{1-\omega^2\,\rho^2}} = \frac{\pi}{2\kappa\,\omega} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{\omega} = \rho_0. \tag{D.4}$$

The conserved charges can be calculated either from the Polyakov action (D.3) or as the $\rho, \overline{\theta}_1 \to 0$ limits of charges (6.15)–(6.16) and (6.47)–(6.48):

$$E = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}\kappa\,\cosh^2\rho\,d\sigma \xrightarrow{\rho\to 0} \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\omega}\,d\sigma = \frac{\ell^2}{\omega\,\alpha'} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega} \tag{D.5}$$

$$S = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}\kappa\,\omega\,\sinh^2\rho\,d\sigma \xrightarrow{\rho\to 0} \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}\rho^2\,d\sigma = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{\rho_0}\frac{4\omega\rho^2\,d\rho}{\sqrt{1-\omega^2\,\rho^2}} = \frac{\ell^2}{2\alpha'\omega^2} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\omega^2}. \tag{D.6}$$

We thus obtain the energy of the string as a function of its spin:

$$E = \left(2\sqrt{\lambda}\,S\right)^{1/2}. \tag{D.7}$$

[86] The $\ell^2 = \alpha'\sqrt{\lambda}$ factor in front of the flat metric has been included in order to enable the comparison between the flat spacetime results and those from $AdS_5 \times S^5$.

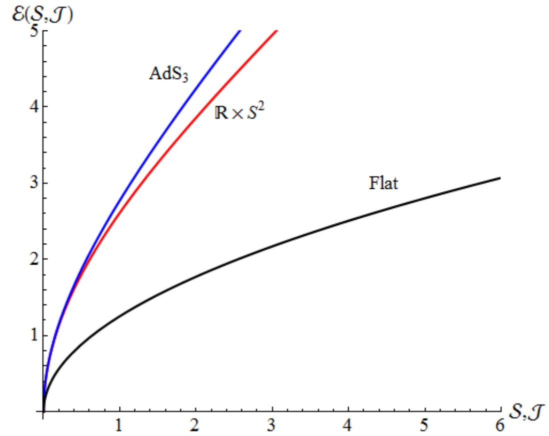


Figure 26: $\mathcal{E} = \mathcal{E}\left(\mathcal{S},\mathcal{J}\right)$ for rotating strings in AdS$_3$, $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ and flat spacetimes.

Notice that (D.7) coincides with the leading term of the short series (6.30)–(6.62) of GKP strings in AdS$_3$ and $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$. The subleading terms of these series are due to the curvature of spacetime and quantify the deviation of the string background from the flat metric (D.1). In figure 26 we have plotted in a common diagram the energy as a function of spin for folded closed strings that rotate in AdS$_3$ (6.22)–(6.23), $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ (6.55)–(6.56) and flat spacetime (D.7).

The universal scaling (D.7) for the leading contribution to the energy of small excitations inside anti-de Sitter space may also be obtained from the scaling dimensions (3.42) of scalar operators that are coupled to massive string states [7]. At strong coupling $\lambda\to\infty$, the scaling dimension of a generic scalar field of mass m in AdS$_{p+2}$ is given by (3.42):

$$\Delta_\pm = \frac{1}{2}\left(p+1\pm\sqrt{(p+1)^2+(2\,m\,\ell)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(p+1\pm\sqrt{(p+1)^2+16\sqrt{\lambda}\,n}\right) \xrightarrow{\lambda\to\infty} 2\left(\sqrt{\lambda}n\right)^{1/2},$$

where $m^2 = 4\,n/\alpha'$ is the excitation level of the string and $S = 2n$. The scaling $E = 2\left(\sqrt{\lambda}n\right)^{1/2}$ of the string energy is valid for small n's.

D.2 Pulsating String

The pulsating GKP string configuration (6.78)

$$\Big\{t = t\left(\tau\right),\, \rho = \rho(\tau),\, \theta = 0,\, \phi_1 = w\sigma,\, \phi_2 = 0\Big\} \tag{D.8}$$

inside the flat background (D.1), is expected to reproduce the leading contribution to the energy of the pulsating GKP string (6.102) in the limit of small excitation levels n. The corresponding Polyakov action (in the conformal gauge, $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) is:

$$S_P = \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'}\int\Big(-\dot{t}^2+\dot{\rho}^2-\rho^2\,\phi_1'^2\Big)d\tau d\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\int\Big(-\dot{t}^2+\dot{\rho}^2-w^2\,\rho^2\Big)d\tau. \tag{D.9}$$

The equations of motion and the Virasoro constraints correspond to harmonic motion:

$$\ddot{t} = 0 \Rightarrow t = \kappa\,\tau\,, \quad \ddot{\rho}+w^2\rho = 0\,, \quad \dot{\rho}^2-\kappa^2+w^2\rho^2 = 0. \tag{D.10}$$

Denoting by ρ_0 the classical turning point, we obtain the string length and conserved energy:

$$E = \left| \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right| = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{t}\, d\sigma = \kappa\sqrt{\lambda} \tag{D.11}$$

$$\tau\left(\rho\right) = \int_0^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\kappa^2 - w^2\,\rho^2}} = \frac{1}{w}\arcsin\frac{w\rho}{\kappa} \Leftrightarrow \rho\left(\tau\right) = \frac{\kappa}{w}\,\sin w\tau\,, \quad \rho_0 = \frac{\kappa}{w} = \frac{E}{w\sqrt{\lambda}} = e. \tag{D.12}$$

The system may now be first-quantized, as it was done in §6.3.1. The corresponding wave equation is:

$$-\hbar^2\,\psi''\left(\rho\right) = \left(E^2 - w^2\lambda\,\rho^2\right)\cdot\psi\left(\rho\right)\,, \quad \Psi\left(t,\rho\right) = e^{-i\,E\,t/\hbar}\cdot\psi\left(\rho\right). \tag{D.13}$$

This is a "half" harmonic oscillator. Imposing the boundary condition, $\psi\left(0\right) = \pm 1$, its eigenenergies are:

$$E = 2\left(\hbar\sqrt{\lambda}\,w\right)^{1/2}\cdot\left(n + \frac{1}{4}\right)^{1/2}\,, \quad n = 0\,,1\,,2\,,\ldots \tag{D.14}$$

which is (6.102) to lowest order. Another way to obtain this result has been given in [80] (pp. 4-6).

E More Short-Long Dualities

In this appendix we will formulate some additional short-long dualities for the two rotating GKP configurations (I–II) and provide some classical expressions that link the conserved charges of strings that spin in AdS_3 to the charges of strings that rotate in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$. Let us start with a few definitions:

<u>Folded Strings in AdS_3</u>

$$\mathcal{E}_1 \equiv \frac{\pi E_1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\,\omega}{\omega^2-1}\,\mathbb{E} = \frac{2\sqrt{1-x}}{x}\,\mathbb{E} = \frac{2}{3}\sqrt{1-x}\Big(\mathbb{R}_D\left(0,x,1\right) + \mathbb{R}_D\left(0,1,x\right)\Big)$$

$$\mathcal{S}_1 \equiv \frac{\pi S_1}{\sqrt{\lambda}} = 2\left[\frac{\omega^2}{\omega^2-1}\,\mathbb{E} - \mathbb{K}\right] = 2\left[\frac{1}{x}\,\mathbb{E} - \mathbb{K}\right] = \frac{2}{3}\left(1-x\right)\mathbb{R}_D\left(0,1,x\right)$$

$$\gamma_1 = 2\left[\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}\,\mathbb{E} + \mathbb{K}\right] = 2\left[\frac{\sqrt{1-x}-1}{3}\Big(\mathbb{R}_D\left(0,x,1\right) + \mathbb{R}_D\left(0,x,1\right)\Big) + \mathbb{R}_F\left(0,x,1\right)\right]$$

<u>Folded Strings in $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$</u>

$$\mathcal{E}_2 \equiv \frac{\pi E_2}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{\omega}\,\mathbb{K} = 2\sqrt{1-x}\,\mathbb{K} = 2\sqrt{1-x}\,\mathbb{R}_F\left(0,x,1\right)$$

$$\mathcal{J}_2 \equiv \frac{\pi J_2}{\sqrt{\lambda}} = 2\left(\mathbb{K}-\mathbb{E}\right) = \frac{2}{3}\left(1-x\right)\mathbb{R}_D\left(0,x,1\right)$$

$$\gamma_2 = 2\left[\left(\sqrt{1-x}-1\right)\ \mathbb{K} + \mathbb{E}\right] = 2\left(\sqrt{1-x}-1\right)\mathbb{R}_F\left(0,x,1\right) + \frac{2x}{3}\Big(\mathbb{R}_D\left(0,x,1\right) + \mathbb{R}_D\left(0,x,1\right)\Big),$$

where the arguments of all the elliptic functions are $1/\omega^2 \equiv 1-x$. We find:

$$\mathcal{E}_1 = -\omega\,\frac{d\mathcal{E}_2}{d\omega} \qquad \& \qquad \mathcal{S}_1 = -\omega\,\frac{d\left(\omega\,\mathcal{E}_2\right)}{d\omega} = -\frac{d\left(\omega\,\mathcal{J}_2\right)}{d\omega} \tag{E.1}$$

$$\omega\,\mathcal{E}_2 = \omega\,\mathcal{E}_1 - \mathcal{S}_1 = \mathcal{J}_2 + \left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)\mathcal{E}_1 = \omega^2\,\mathcal{J}_2 + \left(\omega^2-1\right)\mathcal{S}_1 = 2\,\mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \tag{E.2}$$

$$\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)\mathcal{E}_1 = \left(1-\frac{1}{\omega^2}\right)\mathcal{S}_1 + \left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)\mathcal{E}_2 = \omega\,\mathcal{E}_2 - \mathcal{J}_2 = \left(\omega^2-1\right)\left(\mathcal{S}_1+\mathcal{J}_2\right) = 2\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{\omega^2}\right). \tag{E.3}$$

Plugging some of these relations into Legendre's relation (6.37), we find the following additional short-long formulas:

$$\frac{\omega'}{\omega}\,\mathcal{E}_1'\,\mathcal{E}_2 + \frac{\omega}{\omega'}\,\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2' - \omega\,\omega'\,\mathcal{E}_2\,\mathcal{E}_2' = 2\pi \tag{E.4}$$

$$\frac{1}{\omega'}\,\mathcal{S}_1\,\mathcal{E}_2' + \frac{1}{\omega}\,\mathcal{S}_1'\,\mathcal{E}_2 = 2\pi \quad \& \quad \frac{1}{\omega\,\omega'}\,\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_1' - \mathcal{J}_2\,\mathcal{J}_2' = 2\pi \tag{E.5}$$

$$\mathcal{S}_1\,\mathcal{J}_2' + \mathcal{S}_1'\,\mathcal{J}_2 + \mathcal{S}_1\,\mathcal{S}_1' = 2\pi. \tag{E.6}$$

F Mathematica Code

This appendix contains Mathematica codes that generate the inverse spin functions x and anomalous dimensions γ of GKP strings (I–II), giant magnons and single spikes (elementary or doubled) in terms of their conserved spin/angular momentum $\mathcal{J}$, $\mathcal{S}$ and linear momentum p. The code can be directly copy-pasted and run with Mathematica. Some of the results that have been obtained with these algorithms have been put in the following appendix G.

F.1 GKP Strings in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$

F.1.1 Long Folded Strings ($\omega \to 1^+$)

Let us start from the long folded ($\omega \to 1^+$) string in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$. The inverse spin function $x = x(\mathcal{J})$ is given by `x[m, J, v]`, where `m` is the number of terms in the series, variable `J` corresponds to the (rescaled) angular momentum $\mathcal{J} = \pi J/\sqrt{\lambda}$ and `v` stands for $e^{-\mathcal{J}-2}$. The anomalous dimensions $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{J} = \gamma(\mathcal{J})$ are given by `gamma[m, J, z]`, with `m` and `J` as before and `z` being the computed value of x, `x[m, J, v]`.

The last three lines of the code are actually the ones that produce the output. The number of `nn = 10` terms in `x[nn, J, v]` and `gamma[nn, J, z]` is adjustable. The reader may well-change this value, depending on the desired output length and available computer power. As an indication, `nn = 13` terms take about 42s in our system. Equations (G.2)–(G.3) in appendix G, contain the first few terms of the result.

```
d[n_]:=-(1/2)((2n-1)!!/(2n)!!)^2;

h[n_]:=(-d[n])*(4*Log[2]+2*Sum[1/k-2/(2*k-1),{k,1,n}]);

c[n_]:=-(d[n]/(2*n-1));

b[n_]:=(-c[n])*(4*Log[2]+2*Sum[1/k-2/(2*k-1),{k,1,n}]+2/(2*n-1));

f[n_]:=-c[n]-Sum[((2*k-3)!!/(2*k)!!)*d[n-k],{k,0,n}];

g[n_]:=-b[n]-Sum[((2*k-3)!!/(2*k)!!)*h[n-k],{k,0,n}];

A[n_,J_]:=g[n]+f[n]*(4*Log[2]-J-2);

y[m_,J_,x_]:=Series[x*Exp[Sum[(b[n]/c[0])*x^n,{n,1,m}]-(((J/2)-b[0])/c[0]
            -Sum[(b[n]/c[0])*x^n,{n,1,m}])*Sum[(-1)^k*Sum[(c[l]/c[0])*x^l,{l,1,m}]
            ^k,{k,1,m}]],{x,0,m}];

x[m_,J_,v_]:=InverseSeries[(1/16)*y[m,J,x],v];

gamma[m_,J_,z_]:=2*Sum[z^p*(A[p,J]+f[p]*Log[z/(16*v)]),{p,0,m}];

nn = 10;

x[nn,J,v];

Normal[%]/.v->E^(-J-2)

Simplify[Collect[FullSimplify[gamma[nn,J,z]/.z->%%],{v,J}]]/.v->E^(-J-2)
```

One may recognize `d[n]`, `h[n]`, `c[n]`, `b[n]` as the series coefficients d_n, h_n, c_n, b_n given in (6.67). `f[n]`, `g[n]` and `A[n, J]` are respectively the coefficients f_n, g_n, A_n of (7.30)–(7.32). Series `y[m, J, x]` is derived by exponentiating and rearranging equation (7.18).

F.1.2 Fast Circular Strings ($\omega \to 1^-$)

With appropriate modifications, the previous algorithm can also be applied to the case of fast circular ($\omega \to 1^-$) strings in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$. Here again, `d[n]`, `h[n]`, `c[n]`, `b[n]` are the series coefficients d_n, h_n, c_n, b_n of (6.67), however the coefficients that appear in equation (6.75) are slightly different and are actually given by `cc[n]` and `bb[n]`. Coefficients `ff[n]`, `gg[n]` and `AA[n, J]` stand for f_n, g_n and A_n respectively, written down in equations (7.67)–(7.68). This algorithm (with `nn = 13` terms) took about 40s to run in our system. The first few terms of the output appear in equations (G.4)–(G.5) of appendix G.

```
d[n_]:=(-(1/2))*((2*n-1)!!/(2*n)!!)^2;

h[n_]:=(-d[n])*(4*Log[2]+2*Sum[1/k-2/(2*k-1),{k,1,n}]);

c[n_]:=-(d[n]/(2*n-1));

b[n_]:=(-c[n])*(4*Log[2]+2*Sum[1/k-2/(2*k-1),{k,1,n}]+2/(2*n-1));

cc[n_]:=Sum[((2*k-1)!!/(2*k)!!)*c[n-k],{k,0,n}];

bb[n_]:=Sum[((2*k-1)!!/(2*k)!!)*b[n-k],{k,0,n}];

ff[n_]:=d[n]-cc[n];

gg[n_]:=h[n]-bb[n];

AA[n_,J_]:=gg[n]+ff[n]*(4*Log[2]-J-2);

y[m_,J_,x_]:=Series[(x/16)*Exp[Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}]-((J-2*bb[0])/
           (2*cc[0])-Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}])*Sum[(-1)^k*
           Sum[(cc[l]/cc[0])*x^l,{l,1,m}]^k,{k,1,m}]],{x,0,m}];

x[m_,J_,v_]:=InverseSeries[y[m,J,x],v];

gamma[m_,J_,z_]:=2*Sum[z^p*(AA[p,J]+ff[p]*Log[z/(16*v)]),{p,0,m}];

nn = 13;

x[nn,J,v];

Normal[%]/.v->E^(-J-2)

Simplify[Collect[FullSimplify[gamma[nn,J,z]/.z->%%],{v,J}]]/.v->E^(-J-2)
```

F.2 GKP Strings in AdS$_3$

Mathematica may also be put to invert equation (7.71) for long, closed and folded single-spin strings that spin inside AdS$_3$, GKP case (I). This way, exact expressions for the inverse spin function $x = x(\mathcal{S})$ and anomalous dimensions $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{S} = \gamma(\mathcal{S})$ can be obtained, see equations (G.6)–(G.7) in appendix G. However, due to the presence of logarithms in the corresponding expansions, a rather different approach than that for strings in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^5$ must be followed. We make the following change of variables in equation (7.71):

$$x = \frac{2e^u}{\mathcal{S}}, \tag{F.1}$$

so that (7.71) becomes:

$$\ln \mathcal{S} = u + \ln 2 + \left[\frac{b_0}{c_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathcal{S}}{2c_0}\frac{(-u)^n}{n!} + \frac{2^n b_n}{c_0}\frac{e^{nu}}{\mathcal{S}^n}\right]\right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k c_k}{c_0}\frac{e^{ku}}{\mathcal{S}^k}\right)^n. \tag{F.2}$$

If we invert this equation for u, variable $x = x(\mathcal{S})$ can be obtained from equation (F.1). Then, $x = x(\mathcal{S})$ may be inserted into equation (7.85) and give the anomalous dimensions $\gamma = \gamma(\mathcal{S})$. Here's the Mathematica code:

```
d[n_]:=(-(1/4))*((2*n-1)!!/(2*n)!!)^2*((2*n+1)/(n+1));
h[n_]:=(-d[n])*(4*Log[2]+2*Sum[1/k-2/(2*k-1),{k,1,n}]+1/(n+1)-2/(2*n+1));
c[n_]:=-(d[n]/(2*n+1));
b[n_]:=(-c[n])*(4*Log[2]+2*Sum[1/k-2/(2*k-1),{k,1,n}]+1/(n+1));
f[n_]:=-c[n]-Sum[((2*k-3)!!/(2*k)!!)*d[n-k],{k,0,n}];
g[n_]:=-b[n]-(2*n-1)!!/(2*n+2)!!-Sum[((2*k-3)!!/(2*k)!!)*h[n-k],{k,0,n}];
A[n_,S_]:=g[n]+f[n]*(((S/2)-b[0])/c[0]+c[1]/c[0]^2);
y[m_,S_,u_]:=Series[u+Log[2]+(b[0]/c[0]+(1/c[0])*Sum[(S*(-u)^n)/(2*n!)+(2^n*b[n]*
             Exp[n*u])/S^n,{n,1,m}])/((1/c[0])*Sum[(2^k*c[k]*Exp[k*u])/S^k,
             {k,0,m}]),{u,0,m}];
x[m_,S_,v_]:=Series[(2/S)*Exp[InverseSeries[y[m,S,u],v]],{S,Infinity,m}];
SpinSeries[x_,S_,m_]:=Series[(-(1/x)+(S/2)-Sum[b[n]*x^n,{n,0,m}])/Sum[c[n]*x^n,
                      {n,0,m}],{x,0,m}];
a[n_,S_,m_]:=Coefficient[SpinSeries[x,S,m],x^n];
gamma[m_,S_,z_]:=2*Series[-((4*f[0])/z)+A[0,S]+Sum[z^n*(A[n,S]-4*f[n+1]+Sum[f[n-k-1]
                 *a[k+1,S,m],{k,0,n-1}]),{n,1,m}],{z,0,m}];
nn = 7;
x[nn,S,v];
Collect[Refine[Collect[%/.{v->Log[S]},{S,Log[2]}],S>0],{S,Log[S]}]
Collect[Refine[Collect[Normal[gamma[nn,S,z]]/.{z->%%}/.{v->Log[S]},
                       {S,Log[S],Log[2]}],S>0],{S,Log[S]}]
```

In the above algorithm, d[n], h[n], c[n], b[n] are the series coefficients d_n, h_n, c_n, b_n given in (6.35) and f[n], g[n], A[n, S] are respectively coefficients f_n, g_n, A_n of (7.87)–(7.89). Series y[m, S, u] and x[m, S, v] parametrize equations (F.1)–(F.2) that we saw above. The anomalous dimensions are computed from equation (7.91) with the variable gamma[m, S, z]. To compute the latter we need coefficients a_n from equation (7.72), which we write as a[n, S, m] and we find from equation (7.71), SpinSeries[x, S, m] in Mathematica. The output is again generated from the last three lines. For nn = 7 terms, the program took about 30s to run in our system.

F.3 Giant Magnons

F.3.1 Giant Magnon, Elementary Region: $0 \le |v| < 1/\omega \le 1$

Here's the Mathematica code for giant magnons in the elementary region ($0 \le |v| < 1/\omega \le 1$):

```
d[n_]:=(-(1/2))*((2*n-1)!!/(2*n)!!)^2
h[n_]:=-4*d[n]*(Log[2]+HarmonicNumber[n]-HarmonicNumber[2*n])
c[n_]:=-(d[n]/(2*n-1))
b[n_]:=-4*c[n]*(Log[2]+HarmonicNumber[n]-HarmonicNumber[2*n]+1/(2*(2*n-1)))
momentum[m_,a_,x_]:=Series[(Pi*EllipticF[a,x])/EllipticK[x]+((2*(1-x)*Tan[a])/
                    (EllipticK[x]*Sqrt[1-x*Sin[a]^2]))*(EllipticK[x]-
                    EllipticPi[(x*Cos[a]^2)/(1-x*Sin[a]^2),y])*(Sum[x^n*h[n],{n,0,m}]
                    +(Sum[x^n*d[n],{n,0,m}]/Sum[x^n*c[n],{n,0,m}])*(J/Sin[a]-
                    Sum[x^n*b[n],{n,0,m}])),{x,0,m}]/.y->x
velocity[m_,p_,x_]:=Series[Sin[Normal[InverseSeries[Series[Normal[
                    FullSimplify[momentum[m,a,x]]],{a,p/2,m}]-p]]/.a->0],{x,0,m}]
prefactor[m_,p_,x_]:=Series[((1-x)*z)/Sqrt[1-x*z^2],{x,0,m}]/.z->velocity[m,p,x]
energy[m_,p_,x_]:=prefactor[m,p,x]*Series[Sum[x^n*(d[n]*Log[x]+h[n]),{n,0,m}],{x,0,m}]
spin[m_,p_,x_]:=velocity[m,p,x]*Series[Sum[x^n*(c[n]*Log[x]+b[n]),{n,0,m}],{x,0,m}]
adimension[m_,p_,x_]:=energy[m,p,x]-spin[m,p,x]
A[n_,J_,p_]:=gg[n]+2*ff[n]*(2*Log[2]-J/Sin[p/2]-1)
x1[m_,J_,x_]:=Series[(x/16)*Exp[Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}]-((J-bb[0])/cc[0]-
              Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}])*Sum[(-1)^k*Sum[(cc[l]/cc[0])*x^l,
              {l,1,m}]^k,{k,1,m}]],{x,0,m}]
x2[m_,J_,v_]:=InverseSeries[x1[m,J,x],v]
\[Gamma][m_,p_,J_,v_]:=Sum[z^n*(A[n,J,p]+ff[n]*Log[z/(16*v)]),{n,0,m}]/.z->x2[m,J,v]
nn = 3; Collect[spin[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y,J}];
Do[cc[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[bb[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}];
Collect[adimension[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y,J}];
Do[ff[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[gg[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}];
Collect[velocity[nn,p,x],{x,J}]
Collect[x2[nn,J,v],{v,J},FullSimplify]/.v->E^(-L)
Collect[FullSimplify[\[Gamma][nn,p,J,v]],{v,J},FullSimplify]/.v->E^(-L)
```

Let us describe what the above code does. The goal is to obtain the dispersion relation of elementary region giant magnons in terms of the string's conserved charges p and $\mathcal{J}$. We originally know it (10.25) as a function of the GM linear and angular velocities v and ω, which appear in our system through the associated variables $v = \cos a$ and x, defined in equation (10.22). We need to eliminate these in favor of the charges p and $\mathcal{J}$, given in equations (10.24)–(10.26). This entails the following steps. First we eliminate the logarithms from equations (10.24)–(10.26). The resulting equation (10.30), given by function `momentum[m, a, x]`, is expanded in a double series in `a` and `x` around $a = p/2$ and $x = 0$. Variable `m` denotes the number of terms that we keep in our expansions. Series `momentum[m, a, x]` is subsequently inverted for the variable a. The result for $\sin a$ is encoded in the function `velocity[m, p, x]`.

$\sin a$ that we found is then inserted into the expression for the angular momentum $\mathcal{J}$ that is given in equation (10.31). We get function `spin[m, p, x]`, which we expand for `x` in order to compute the coefficients `cc[n]` and `bb[n]`. Now we know $\mathcal{J}$ in a form like (7.18), which we may invert for the inverse spin function `x2[m, J, v]` à la GKP.[87] As an intermediate step we must compute function `x1[m, J, v]` that encodes the second line of (7.18).

The final step is to insert the inverse spin function that we found, into the relation for the energy minus the spin (10.45), which we write as `\[Gamma][m, p, J, v]`. In order to be able to do this, we need the coefficients f_n, g_n and A_n, (10.44)–(10.46) of series (10.25). The corresponding function is `adimension[m, p, x]`, defined in terms of the functions `prefactor[m, p, x]`, `energy[m, p, x]` and `spin[m, p, x]`. In the above code, the coefficients f_n, g_n and A_n are denoted by `ff[n]`, `gg[n]` and `A[n]` respectively. For completeness, let us also mention that the coefficients d_n, h_n, c_n, b_n in (10.29), are given by the Mathematica variables `d[n]`, `h[n]`, `c[n]` and `b[n]`.

Some of the results that can be obtained with our code have been placed the appendix G.2. The output contains the inverse momentum $\sin a = \sqrt{1-v^2}$ as a function of the magnon's momentum p, spin $\mathcal{J}$ and inverse spin function x, the inverse spin function x as a function of the conserved charges $\mathcal{J}$ and p and the dispersion relation $\gamma = \gamma\,(p, \mathcal{J})$. See equations (G.10)–(G.12). The number of terms in the output `nn` is adjustable. For example `nn = 3` took about 30s to run in our system.

F.3.2 Giant Magnon, Doubled Region: $0 \le |v| \le 1 \le 1/\omega$

The skeleton of the code for finite-size giant magnons in the doubled region is the same as in the elementary region. We only have to change the values of the series coefficients of conserved charges `d[n]`, `h[n]`, `c[n]`, `b[n]`, the expressions of the conserved charges, as well as the equations that we have to invert in order to eliminate the variables v and ω in favor of p and $\mathcal{J}$.

As before, the code calculates inverse momentum $\sin a = \sqrt{1-v^2}$, the inverse spin function x and the dispersion relation $\gamma = \gamma\,(p, \mathcal{J})$. For the latter, see equation (G.13). Again, the number of terms `nn` in the output is adjustable. E.g. for the proposed value of `nn = 3`, our system took about 30s to run. Here's the Mathematica code:

```
d[n_]:=(-(1/2))*((2*n-1)!!/(2*n)!!)^2

h[n_]:=-4*d[n]*(Log[2]+HarmonicNumber[n]-HarmonicNumber[2*n])

c[n_]:=-(d[n]/(2*n-1))

b[n_]:=-4*c[n]*(Log[2]+HarmonicNumber[n]-HarmonicNumber[2*n]+1/(2*(2*n-1)))
```

[87] Variable `v` does not stand for the GM's velocity but for $\exp(-\mathcal{L})$, where $\mathcal{L}$ is given by:

$$\mathcal{L} \equiv 2\mathcal{J} \csc\frac{p}{2} + 2.$$

.

```
momentum[m_,a_,x_]:=FullSimplify[Series[(Pi*EllipticF[ArcSin[Sin[a]/
                     Sqrt[1-x*Cos[a]^2]],x])/EllipticK[x]+((2*Tan[a])/
                     Sqrt[1-x*Cos[a]^2])*(1-(1-x*Cos[a]^2)*(EllipticPi[x*Cos[a]^2,y]/
                     EllipticK[x]))*(Sum[x^n*h[n],{n,0,m}]+(Sum[x^n*d[n],{n,0,m}]/
                     Sum[x^n*c[n],{n,0,m}])*(Sqrt[1-x]*(J/Sin[a])-Sum[x^n*b[n],
                     {n,0,m}])),{x,0,m}]/.y->x]
velocity[m_,p_,x_]:=Series[Sin[Normal[InverseSeries[FullSimplify[Series[Normal[
                     momentum[m,a,x]],{a,p/2,m}],{p>0,p<Pi}]-p]]/.a->0],{x,0,m}]
prefactor[m_,p_,x_]:=Series[z/Sqrt[1-x*(1-z^2)],{x,0,m}]/.z->velocity[m,p,x]
energy[m_,p_,x_]:=prefactor[m,p,x]*Series[Sum[x^n*(d[n]*Log[x]+h[n]),{n,0,m}],{x,0,m}]
spin[m_,p_,x_]:=(velocity[m,p,x]/Sqrt[1-x])*Series[Sum[x^n*(c[n]*Log[x]+b[n]),{n,0,m}]
                 ,{x,0,m}]
adimension[m_,p_,x_]:=energy[m,p,x]-spin[m,p,x]
A[n_,J_,p_]:=gg[n]+2*ff[n]*(2*Log[2]-J/Sin[p/2]-1)
x1[m_,J_,x_]:=Series[(x/16)*Exp[Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}]-((J-bb[0])/cc[0]-
               Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}])*Sum[(-1)^k*Sum[(cc[l]/cc[0])*x^l,
               {l,1,m}]^k,{k,1,m}]],{x,0,m}]
x2[m_,J_,v_]:=InverseSeries[x1[m,J,x],v]
\[Gamma][m_,p_,J_,v_]:=Sum[z^n*(A[n,J,p]+ff[n]*Log[z/(16*v)]),{n,0,m}]/.z->x2[m,J,v]
nn = 3; Collect[spin[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y,J}];
Do[cc[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[bb[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}];
Collect[adimension[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y,J}];
Do[ff[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[gg[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}];
Collect[velocity[nn,p,x],{x,J}]
Collect[x2[nn,J,v],{v,J},FullSimplify]/.v->E^(-L)
Collect[FullSimplify[\[Gamma][nn,p,J,v]],{v,J},FullSimplify]/.v->E^(-L)
```

F.4 Single Spikes

F.4.1 Single Spike, Elementary Region: $0 \leq 1/\omega < |v| \leq 1$

Just as the algorithm that we followed in order to obtain the analytic dispersion relations of single spikes (10.53)–(10.54) was rather different from the ones for giant magnons (10.49)–(10.51), the numeric procedure with Mathematica is also expected to be a little different.

As before, the logarithms must be eliminated from equations (9.30)–(9.27). The resulting equation is `spin[m, a, x, p]`, which is expanded in a double series in `a` and `x` around $a = q/2$ and $x = 0$.[88] `spin[m, a, x, p]` is subsequently inverted for the variable a. We find $\sin a$ as `\[Omega][m, p, x]`.

$\sin a$ is then inserted into the expression for linear momentum p. We obtain `momentum[m, p, x]` which we expand for `x` in order to compute the coefficients `cc[n]` and `bb[n]`. The result is p in a form like (7.18), which we invert for `x2[m, J, v]` à la GKP.[89] Function `x1[m, J, v]` encodes again the second line of (7.18).

The inverse spin function `x2[m, J, v]` that we have found is then inserted into the relation that gives the energy minus half the single spikes's linear momentum $\mathcal{E} - p/2$. In Mathematica this is written as `\[Gamma][m, p, \[Theta], v]`. But before carrying out this step, coefficients f_n, g_n and A_n (`ff[n]`, `gg[n]` and `A[n]` in Mathematica) must be calculated. These are the single spike analogues of giant magnon coefficients (10.44)–(10.46). They are calculated from the function `adimension[m, p, x]` which is defined in terms of `prefactor[m, p, x]`, `energy[m, p, x]` and `momentum[m, p, x]`.

The following code calculates the inverse momentum $\sin a = \sqrt{1 - 1/\omega^2}$, the inverse spin function x and the dispersion relation $\gamma = \gamma\,(p, \mathcal{J})$. See equation (G.14) in appendix G.2. The number of terms in the output is `nn`. For example `nn = 3` took about 60s to run in our system.

```
d[n_]:=(-(1/2))*((2*n-1)!!/(2*n)!!)^2

h[n_]:=-4*d[n]*(Log[2]+HarmonicNumber[n]-HarmonicNumber[2*n])

c[n_]:=If[n==0,0,-(d[n-1]/(2*n))]

b[n_]:=If[n==0,1,((2*d[n-1])/n)*(Log[2]+HarmonicNumber[n-1]-HarmonicNumber[2*n-2]+
       1/(4*n))]

spin[m_,a_,x_,p_]:=FullSimplify[Series[Sin[a]*(Sum[x^n*b[n],{n,0,m}]+(Sum[x^n*c[n],
                   {n,0,m}]/Sum[x^n*d[n],{n,0,m}])*(((p+Pi*(EllipticF[a,x]/
                   EllipticK[x]))/EllipticPi[(x*Cos[a]^2)/(1-x*Sin[a]^2),y])*
                   ((EllipticK[x]*Sqrt[1-x*Sin[a]^2])/(2*(1-x)*Tan[a]))-Sum[x^n*
                   h[n],{n,0,m}])),{x,0,m}]/.y->x]

\[Omega][m_,p_,x_]:=Series[Normal[Sin[InverseSeries[Series[Normal[FullSimplify[
                    spin[m,a,x,p]]],{a,\[Theta],m}]-Sin[\[Theta]]]]]/.{a->0},
                    {x,0,m}]

momentum[m_,p_,x_]:=Series[(-2/(z*Sqrt[1-x*z^2]*EllipticK[x]))*((Pi/2)*z*Sqrt[1-
                    x*z^2]*EllipticF[ArcSin[z],x]-(((1-x)*z^2)/Sqrt[1-z^2])*Normal
                    [Series[EllipticPi[(x*(1-z^2))/(1-x*z^2),y],{x,0,m}]/.y->x]*Sum
                    [x^n*(d[n]*Log[x]+h[n]),{n,0,m}]),{x,0,m}]/.z->\[Omega][m,p,x]
```

[88] q is defined as $\mathcal{J} \equiv \sin q/2$ and it is encoded in the Mathematica variable `\[Theta]` which stands for $q/2$. We have also set $1/\omega \equiv \cos a$.

[89] Here the variable `v` stands for $\exp(-\mathcal{R})$, where $\mathcal{R}$ is given by:

$$\mathcal{R} \equiv \sqrt{\frac{1}{\mathcal{J}^2} - 1} \cdot (p + 2\arcsin\mathcal{J}) = (p+q)\cdot\cot\frac{q}{2}.$$

.

```
prefactor[m_,p_,x_]:=Series[z/Sqrt[1-z^2],{x,0,m}]/.z->\[Omega][m,p,x]
energy[m_,p_,x_]:=prefactor[m,p,x]*(1-x)*Series[Sum[x^n*(d[n]*Log[x]+h[n]),{n,0,m}],
              {x,0,m}]
adimension[m_,p_,x_]:=energy[m,p,x]-(1/2)*momentum[m,p,x]
A[n_,\[Theta]_,p_]:=gg[n]+ff[n]*((-p)*Cot[\[Theta]]-2*\[Theta]*Cot[\[Theta]]+Log[16])
x1[m_,p_,x_]:=Series[(x/16)*Exp[Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}]-((p-bb[0])/cc[0]-
           Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}])*Sum[(-1)^k*Sum[(cc[l]/cc[0])*x^l,
           {l,1,m}]^k,{k,1,m}]],{x,0,m}]
x2[m_,p_,v_]:=InverseSeries[x1[m,p,x],v]
\[Gamma][m_,p_,\[Theta]_,v_]:=Sum[z^n*(A[n,\[Theta],p]+ff[n]*Log[z/(16*v)]),
                        {n,0,m}]/.z->x2[m,p,v]
nn = 3;Refine[Collect[momentum[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y},Simplify],
          {\[Theta]>0,\[Theta]<Pi/2}];
Do[cc[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[bb[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}];
Refine[Collect[adimension[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y},Simplify],
     {\[Theta]>0,\[Theta]<Pi/2}];
Do[ff[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[gg[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}];
Collect[\[Omega][nn,p,x],{x,p}]/.\[Theta]->q/2
Collect[x2[nn,p,v],{v,p},FullSimplify]/.{v->E^(-R),\[Theta]->q/2}
Collect[\[Gamma][nn,p,\[Theta],v],{v,p,\[Theta]},FullSimplify]/.{v->E^(-R),
      \[Theta]->q/2}
```

F.4.2 Single Spike, Doubled Region: $0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$

For single spikes in the doubled region, the above algorithm takes the following form:

```
d[n_]:=(-(1/2))*((2*n-1)!!/(2*n)!!)^2
h[n_]:=-4*d[n]*(Log[2]+HarmonicNumber[n]-HarmonicNumber[2*n])
c[n_]:=If[n==0,0,((2*n)/(2*n-1))*d[n]]
b[n_]:=If[n==0,1,(-((4*n)/(2*n-1)))*d[n]*(2*Log[2]+2*HarmonicNumber[n-1]-2*
     HarmonicNumber[2*n-2]-1/(2*n*(2*n-1)))]
\[Omega][m_,p_,x_]:=Series[Normal[Sin[InverseSeries[Series[Normal[FullSimplify[
                spin[m,a,x,p]]],{a,\[Theta],m}]-Sin[\[Theta]]]]]/.{a->0},
                {x,0,m}]
```

```
spin[m_,a_,x_,p_]:=FullSimplify[Series[(Sin[a]/Sqrt[1-x])*(Sum[x^n*b[n],
                   {n,0,m}]+(Sum[x^n*c[n],{n,0,m}]/Sum[x^n*d[n],{n,0,m}])*
                   (((p+Pi*(EllipticF[a,x]/EllipticK[x]))/EllipticPi[x*Cos[a]^2,y])
                   *(EllipticK[x]/(2*Sqrt[1-x*Cos[a]^2]*Tan[a]))-Sum[x^n*h[n]
                   ,{n,0,m}])),{x,0,m}]/.y-> x]
momentum[m_,p_,x_]:=Series[(2/EllipticK[x])*(\[Omega][m,p,x]*(Sqrt[1-x*(1-
                    \[Omega][m,p,x]^2)]/Sqrt[1-\[Omega][m,p,x]^2])*Normal[
                    Series[EllipticPi[x*(1-\[Omega][m,p,x]^2),y],{x,0,m}]/.y->x]
                    *Sum[x^n*(d[n]*Log[x]+h[n]),{n,0,m}]-(Pi/2)*EllipticF[ArcSin[
                    \[Omega][m,p,x]/Sqrt[1-x*(1-\[Omega][m,p,x]^2)]],x]),{x,0,m}]
prefactor[m_,p_,x_]:=Series[\[Omega][m,p,x]/Sqrt[1-\[Omega][m,p,x]^2],{x,0,m}]
energy[m_,p_,x_]:=(prefactor[m,p,x]/Sqrt[1-x])*Series[Sum[x^n*(d[n]*Log[x]+h[n]),
                  {n,0,m}],{x,0,m}]
adimension[m_,p_,x_]:=energy[m,p,x]-(1/2)*momentum[m,p,x]
A[n_,\[Theta]_,p_]:=gg[n]+ff[n]*((-p)*Cot[\[Theta]]-2*\[Theta]*Cot[\[Theta]]+Log[16])
x1[m_,p_,x_]:=Series[(x/16)*Exp[Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}]-((p-bb[0])/cc[0]-
              Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}])*Sum[(-1)^k*Sum[(cc[l]/cc[0])*x^l,
              {l,1,m}]^k,{k,1,m}]],{x,0,m}];
x2[m_,p_,v_]:=InverseSeries[x1[m,p,x],v]
\[Gamma][m_,p_,\[Theta]_,v_]:=Sum[z^n*(A[n,\[Theta],p]+ff[n]*Log[z/(16*v)]),
                              {n,0,m}]/.z->x2[m,p,v]
nn = 3;Refine[Collect[momentum[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y},Simplify],
            {\[Theta]>0,\[Theta]< Pi/2}];
Do[cc[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[bb[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}]
Refine[Collect[adimension[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y},Simplify],{\[Theta]>0,
      \[Theta]<Pi/2}];
Do[ff[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[gg[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}];
Collect[\[Omega][nn,p,x],{x,p}]/.\[Theta]->q/2
Collect[x2[nn,p,v],{v,p},FullSimplify]/.{v->E^(-R),\[Theta]->q/2}
Collect[\[Gamma][nn,p,\[Theta],v],{v,p,\[Theta]},FullSimplify]/.{v->E^(-R),
        \[Theta]->q/2}
```

G Symbolic Computations

This appendix contains some results of the symbolic computations that were performed with the Mathematica codes of the previous appendix F. They can be used to verify the Lambert W-function expressions of the string dispersion relations that were derived in §7 and §10.

G.1 Long and Fast GKP Strings

Let us begin with long and fast GKP strings in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ and AdS_3. Here are the Mathematica results:

- Folded string in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ $(\omega > 1)$.[90]

$$x = 16\,e^{-\mathcal{J}-2} - 64\,(\mathcal{J}+2)\,e^{-2\mathcal{J}-4} + 64\left(6\mathcal{J}^2+17\mathcal{J}+15\right)\,e^{-3\mathcal{J}-6} - \frac{256}{3}(32\mathcal{J}^3+108\mathcal{J}^2+153\mathcal{J}+84)\,e^{-4\mathcal{J}-8}+ \\ +\frac{32}{3}(2000\mathcal{J}^4+7600\mathcal{J}^3+13.740\mathcal{J}^2+12.726\mathcal{J}+4989)\,e^{-5\mathcal{J}-10} - \frac{512}{5}(1728\mathcal{J}^5+7200\mathcal{J}^4+15300\mathcal{J}^3+ \\ +18.615\mathcal{J}^2+12.740\mathcal{J}+3855)\,e^{-6\mathcal{J}-12}+\ldots \tag{G.2}$$

$$\mathcal{E}-\mathcal{J} = 2-8e^{-\mathcal{J}-2} + 8\,(2\mathcal{J}-1)\,e^{-2\mathcal{J}-4} - 32\left(2\mathcal{J}^2-\mathcal{J}+2\right)\,e^{-3\mathcal{J}-6} + \frac{8}{3}\left(128\mathcal{J}^3-48\mathcal{J}^2+228\mathcal{J}-63\right)\,e^{-4\mathcal{J}-8}- \\ -\frac{16}{3}(400\mathcal{J}^4-80\mathcal{J}^3+972\mathcal{J}^2-330\mathcal{J}+279)\,e^{-5\mathcal{J}-10} + \frac{64}{5}(1152\mathcal{J}^5+3480\mathcal{J}^3-1010\mathcal{J}^2+2080\mathcal{J}- \\ -405)\,e^{-6\mathcal{J}-12}-\ldots \tag{G.3}$$

- Circular string in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ $(\omega < 1)$.

$$\widetilde{x} = 16\,e^{-\mathcal{J}-2} + 64\,(\mathcal{J}-2)\,e^{-2\mathcal{J}-4} + 192\left(2\mathcal{J}^2-5\mathcal{J}+5\right)\,e^{-3\mathcal{J}-6} + \frac{256}{3}(32\mathcal{J}^3-84\mathcal{J}^2+129\mathcal{J}-84)\,e^{-4\mathcal{J}-8}+ \\ +\frac{32}{3}(2000\mathcal{J}^4-5200\mathcal{J}^3+9900\mathcal{J}^2-10.316\mathcal{J}+4989)\,e^{-5\mathcal{J}-10} + \frac{1536}{5}(576\mathcal{J}^5-1440\mathcal{J}^4+3180\mathcal{J}^3- \\ -4115\mathcal{J}^2+3360\mathcal{J}-1285)\,e^{-6\mathcal{J}-12}+\ldots \tag{G.4}$$

$$\mathcal{E}-\mathcal{J} = 2+8e^{-\mathcal{J}-2} + 8\,(2\mathcal{J}-1)\,e^{-2\mathcal{J}-4} + 32\left(2\mathcal{J}^2-\mathcal{J}+2\right)\,e^{-3\mathcal{J}-6} + \frac{8}{3}\left(128\mathcal{J}^3-48\mathcal{J}^2+228\mathcal{J}-63\right)\,e^{-4\mathcal{J}-8} \\ +\frac{16}{3}(400\mathcal{J}^4-80\mathcal{J}^3+972\mathcal{J}^2-330\mathcal{J}+279)\,e^{-5\mathcal{J}-10} + \frac{64}{5}(1152\mathcal{J}^5+3480\mathcal{J}^3-1010\mathcal{J}^2+2080\mathcal{J}- \\ -405)\,e^{-6\mathcal{J}-12}+\ldots \tag{G.5}$$

[90] As we have already noted in §7.3, the transformation

$$\mathcal{S} \equiv \frac{1}{16}\,e^{\mathcal{J}+2} \Leftrightarrow \mathcal{J} = \ln\mathcal{S} + 4\ln 2 - 2 \tag{G.1}$$

makes the inverse spin functions and anomalous dimensions of long folded strings in $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ (GKP II) and AdS_3 (GKP I) look alike and allows to compare them. See equation (7.127).

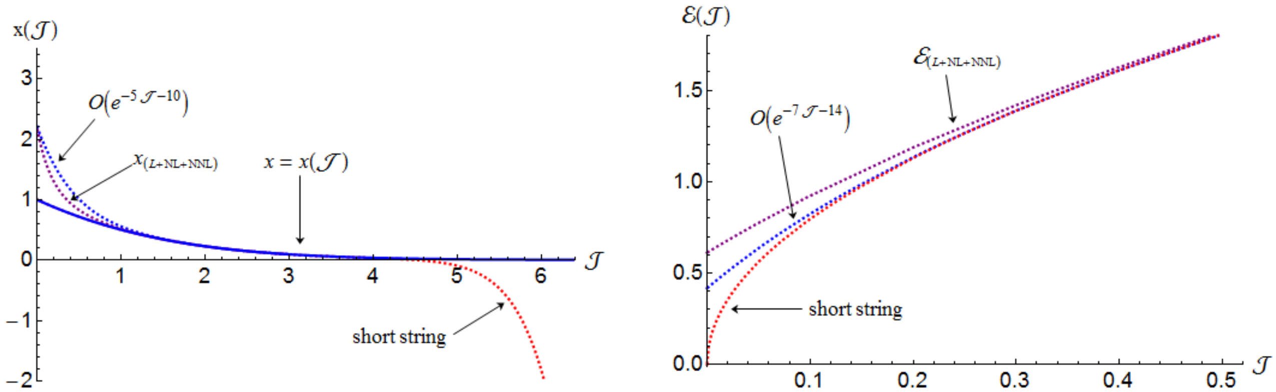


Figure 27: Short & long approximations to the folded GKP string in $\mathbb{R}\times \mathrm{S}^2$. The plot on the left contains the parametric plot of the inverse spin function $x = x\left(\mathcal{J}\right)$ according to equation (6.56) (thick blue line), its "short" string approximation (6.60) (red dashed line), NNL formula (7.64) (purple dashed line) and the first 5 terms of "long" string approximation (G.2) (blue dashed line). The plot on the right contains the "short" string approximation to the anomalous dimensions (6.61) (red dashed line), NNL formula (7.65) (purple dashed line) and the first eight terms of "long" approximation (G.3). Compare with the plot of $\mathcal{E} = \mathcal{E}\left(\mathcal{J}\right)$ in figure 8.

- Folded string in AdS_3 ($\omega > 1$).

$$x = \frac{2}{\mathcal{S}} - \Big[\ln\mathcal{S} + \Big(3\ln 2 + 1\Big)\Big]\frac{1}{\mathcal{S}^2} + \Big[\frac{\ln^2\mathcal{S}}{2} + \Big(3\ln 2 + \frac{1}{4}\Big)\ln\mathcal{S} + \Big(\frac{9\ln^2 2}{2} + \frac{3\ln 2}{4} + \frac{3}{8}\Big)\Big]\frac{1}{\mathcal{S}^3} - \Big[\frac{\ln^3\mathcal{S}}{4} + \Big(\frac{9\ln 2}{4} - \frac{1}{4}\Big)\ln^2\mathcal{S} + \Big(\frac{27\ln^2 2}{4} - \frac{3\ln 2}{2} + \frac{3}{8}\Big)\ln\mathcal{S} + \Big(\frac{27\ln^3 2}{4} - \frac{9\ln^2 2}{4} + \frac{9\ln 2}{8}\Big)\Big]\frac{1}{\mathcal{S}^4} + \ldots \tag{G.6}$$

$$\gamma = \ln\mathcal{S} + \Big[3\ln 2 - 1\Big] + \Big[\frac{\ln\mathcal{S}}{2} + \Big(\frac{3\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\Big)\Big]\frac{1}{\mathcal{S}} - \Big[\frac{\ln^2\mathcal{S}}{8} + \Big(\frac{3\ln 2}{4} - \frac{9}{16}\Big)\ln\mathcal{S} + \Big(\frac{9\ln^2 2}{8} - \frac{27\ln 2}{16} + \frac{5}{16}\Big)\Big]\frac{1}{\mathcal{S}^2} + \Big[\frac{\ln^3\mathcal{S}}{24} + \Big(\frac{3\ln 2}{8} - \frac{3}{8}\Big)\ln^2\mathcal{S} + \Big(\frac{9\ln^2 2}{8} - \frac{9\ln 2}{4} + \frac{11}{16}\Big)\ln\mathcal{S} + \Big(\frac{9\ln^3 2}{8} - \frac{27\ln^2 2}{8} + \frac{33\ln 2}{16} - \frac{7}{24}\Big)\Big]\frac{1}{\mathcal{S}^3} - \Big[\frac{\ln^4\mathcal{S}}{64} + \Big(\frac{3\ln 2}{16} - \frac{43}{192}\Big)\ln^3\mathcal{S} + \Big(\frac{27\ln^2 2}{32} - \frac{129\ln 2}{64} + \frac{51}{64}\Big)\ln^2\mathcal{S} + \Big(\frac{27\ln^3 2}{16} - \frac{387\ln^2 2}{64} + \frac{153\ln 2}{32} - \frac{937}{1024}\Big)\cdot \ln\mathcal{S} + \Big(\frac{81\ln^4 2}{64} - \frac{387\ln^3 2}{64} + \frac{459\ln^2 2}{64} - \frac{2811\ln 2}{1024} + \frac{1919}{6144}\Big)\Big]\frac{1}{\mathcal{S}^4} + \ldots \tag{G.7}$$

All of these results agree with the W-function formulas and coefficients that we have derived. (G.2)–(G.3) agree with (7.64)–(7.65) and (G.4)–(G.5) agree with (7.69)–(7.70). Formulas (G.6)–(G.7) agree with all coefficients (7.6)–(7.9) but also the W-function expressions (7.112)–(7.113). In figures 27–28 we have plotted all Mathematica results of this appendix (G.2)–(G.7), the corresponding parametric plots, the Lambert W-function expressions of §7 and the respective short string approximations of §6.

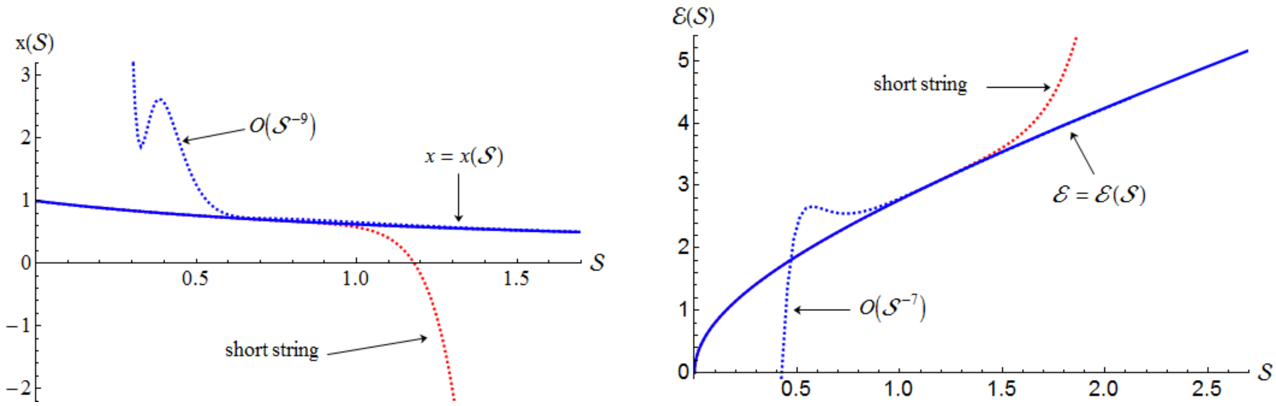


Figure 28: Short & long approximations to the folded GKP string in AdS_3. On the left we have plotted inverse spin function $x(\mathcal{S})$ parametrically according to (6.23) (thick blue line), as well as its short (6.28) (red dashed line) and long approximations (G.6) (blue dashed line). In the latter, much more terms (up to order $\mathcal{S}^{-9}$) than those contained in equation (G.6) have been used. The plot on the right's a plot of the anomalous dimensions $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ parametrically from equation (6.22) (thick blue line) along with the "short" approximation (6.29) (red dashed line) and the "long" approximation (G.7) (up to terms $\mathcal{S}^{-7}$). Compare with the plot in figure 4.

G.2 Giant Magnons & Single Spikes

For giant magnons we set,

$$\mathcal{L} \equiv 2\mathcal{J}\csc\frac{p}{2} + 2 \tag{G.8}$$

and for single spikes we set,

$$\mathcal{R} \equiv \sqrt{\frac{1}{\mathcal{J}^2} - 1}\cdot\left(p + 2\arcsin\mathcal{J}\right) = (p+q)\cdot\cot\frac{q}{2}\,, \quad \mathcal{J} \equiv \sin\frac{q}{2}. \tag{G.9}$$

We obtain the following results with Mathematica:

- Finite-Size Giant Magnons: Elementary Region, $0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1-v^2} = \sin a = &\sin\frac{p}{2} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{p}{2}\left[2\mathcal{J} + 3\sin\frac{p}{2}\right]x - \frac{3}{64}\cos^2\frac{p}{2}\left[8\mathcal{J}^2\sin\frac{p}{2} - 12\mathcal{J}\cos p - 5\sin\frac{3p}{2}\right]x^2 - \frac{1}{3072}\cos^2\frac{p}{2}\cdot \\ &\cdot\left[\mathcal{J}^3(512\cos p - 256) + 216\mathcal{J}^2\left(5\sin\frac{3p}{2} + \sin\frac{p}{2}\right) - 12\mathcal{J}\left(73\cos 2p + 66\cos p + 11\right) - 259\sin\frac{5p}{2} - \right. \\ &\left. -272\sin\frac{3p}{2} + 11\sin\frac{p}{2}\right]x^3 + \ldots\end{aligned} \tag{G.10}$$

$$\begin{aligned}x = &16\,e^{-\mathcal{L}} + \left[256\mathcal{J}^2\cot^2\frac{p}{2} + 64\mathcal{J}\left(3\cos p + 1\right)\csc\frac{p}{2} - 128\right]e^{-2\mathcal{L}} + \left[6144\mathcal{J}^4\cot^4\frac{p}{2} + 512\mathcal{J}^3\left(19\cos p + 1\right)\cot^2\frac{p}{2}\cdot\right. \\ &\left.\cdot\csc\frac{p}{2} - 256\mathcal{J}^2\left(2\csc^2\frac{p}{2} + 33\cos p + 25\right) + 64\mathcal{J}\left(6\cos 2p - 51\cos p - 23\right)\csc\frac{p}{2} + 960\right]e^{-3\mathcal{L}} + \left[\frac{524\,288}{3}\mathcal{J}^6\cot^6\frac{p}{2} + \right. \\ &+32\,768\mathcal{J}^5\left(13\cos p - 1\right)\cot^4\frac{p}{2}\csc\frac{p}{2} + \frac{8192}{3}\mathcal{J}^4\left(68\cos 2p - 27\cos p + 1\right)\cot^2\frac{p}{2}\csc^2\frac{p}{2} + \frac{128}{3}\mathcal{J}^3(819\cos 3p -\end{aligned}$$

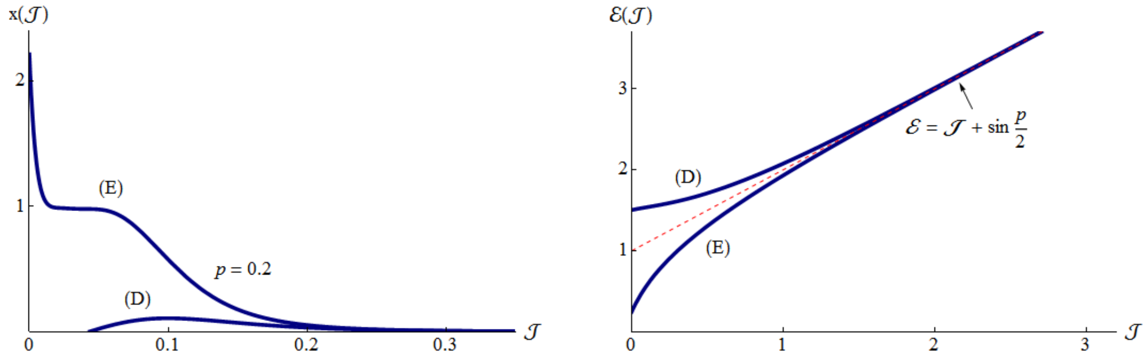


Figure 29: Inverse spin function and energy of finite-size giant magnons. On the left we have plotted $x\,(p = 0.2, \mathcal{J})$ and $\widetilde{x}\,(p = 0.2, \mathcal{J})$ in the elementary (G.11) and doubled region of giant magnons. On the right we have plotted $\mathcal{E}\,(p = 3.0, \mathcal{J})$ in the GM elementary (G.12) and doubled regions (G.13). The curves in the elementary region have been labelled with an (E) and the curves in the doubled region with a (D). The approximations become more trustworthy as the angular momentum $\mathcal{J}$ gets larger and the infinite-size result of Hofman-Maldacena (8.6) is approached.

$$-786\cos 2p - 3027\cos p - 1934)\csc^3\frac{p}{2} + 1024\mathcal{J}^2\,(11\cos 3p - 44\cos 2p - 18\cos p + 1)\csc^2\frac{p}{2} + \frac{64}{3}\mathcal{J}(70\cos 3p -$$

$$-319\cos 2p + 1742\cos p + 907)\csc\frac{p}{2} - 7168\Big]\,e^{-4\mathcal{L}} + \ldots \tag{G.11}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} - \mathcal{J} = \sin\frac{p}{2} - 4\sin^3\frac{p}{2}e^{-\mathcal{L}} - \left[8\mathcal{J}^2\csc\frac{p}{2}\sin^2 p - \mathcal{J}\,(12\cos 2p - 8\cos p - 4) + 4\,(6\cos p + 7)\sin^3\frac{p}{2}\right]e^{-2\mathcal{L}} - \\
-\Bigg[32\mathcal{J}^4\csc^5\frac{p}{2}\sin^4 p + \frac{32}{3}\mathcal{J}^3\,(31\cos 2p + 88\cos p + 57) + 32\mathcal{J}^2\left(9\sin\frac{5p}{2} + 11\sin\frac{3p}{2} + 6\sin\frac{p}{2}\right) - \\
-\mathcal{J}\,(96\cos 3p + 44\cos 2p - 112\cos p - 28) + \frac{8}{3}\,(37\cos 2p + 97\cos p + 72)\sin^3\frac{p}{2}\Bigg]e^{-3\mathcal{L}} - \\
-\Bigg[\frac{512}{3}\mathcal{J}^6\csc^9\frac{p}{2}\sin^6 p + 2048\mathcal{J}^5\,(19\cos p + 5)\cos^2\frac{p}{2}\cot^2\frac{p}{2} + \frac{64}{3}\mathcal{J}^4\,(1273\cos 2p + 1824\cos p + 1319)\cdot \\
\cdot\cos\frac{p}{2}\cot\frac{p}{2} + \frac{64}{3}\mathcal{J}^3\,(441\cos 3p + 1242\cos 2p + 1983\cos p + 1118) + 8\mathcal{J}^2\Big(431\sin\frac{7p}{2} + 734\sin\frac{5p}{2} + \\
+544\sin\frac{3p}{2} + 273\sin\frac{p}{2}\Big) - \frac{4}{3}\mathcal{J}\,(511\cos 4p + 360\cos 3p - 88\cos 2p - 588\cos p - 195) + 4(118\cos 3p + \\
+322\cos 2p + 532\cos p + 349)\sin^3\frac{p}{2}\Bigg]e^{-4\mathcal{L}} - \ldots
\end{aligned} \tag{G.12}$$

- Finite-Size Giant Magnons: Doubled Region, $0 \leq |v| \leq 1 \leq 1/\omega$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} - \mathcal{J} = \sin\frac{p}{2} + 4\sin^3\frac{p}{2}e^{-\mathcal{L}} - \left[8\mathcal{J}^2\csc\frac{p}{2}\sin^2 p - \mathcal{J}\,(12\cos 2p - 8\cos p - 4) + 4\,(6\cos p + 7)\sin^3\frac{p}{2}\right]e^{-2\mathcal{L}} + \\
+\Bigg[32\mathcal{J}^4\csc^5\frac{p}{2}\sin^4 p + \frac{32}{3}\mathcal{J}^3\,(31\cos 2p + 88\cos p + 57) + 32\mathcal{J}^2\left(9\sin\frac{5p}{2} + 11\sin\frac{3p}{2} + 6\sin\frac{p}{2}\right) -
\end{aligned}$$

$$-\mathcal{J}\left(96\cos 3p+44\cos 2p-112\cos p-28\right)+\frac{8}{3}\left(37\cos 2p+97\cos p+72\right)\sin^3\frac{p}{2}\Bigg]e^{-3\mathcal{L}}-$$

$$-\Bigg[\frac{512}{3}\mathcal{J}^6\csc^9\frac{p}{2}\sin^6 p+2048\mathcal{J}^5\left(19\cos p+5\right)\cos^2\frac{p}{2}\cot^2\frac{p}{2}+\frac{64}{3}\mathcal{J}^4\left(1273\cos 2p+1824\cos p+1319\right)\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{p}{2}\cot\frac{p}{2}+\frac{64}{3}\mathcal{J}^3\left(441\cos 3p+1242\cos 2p+1983\cos p+1118\right)+8\mathcal{J}^2\Big(431\sin\frac{7p}{2}+734\sin\frac{5p}{2}+$$

$$+544\sin\frac{3p}{2}+273\sin\frac{p}{2}\Big)-\frac{4}{3}\mathcal{J}\left(511\cos 4p+360\cos 3p-88\cos 2p-588\cos p-195\right)+4(118\cos 3p+$$

$$+322\cos 2p+532\cos p+349)\sin^3\frac{p}{2}\Bigg]e^{-4\mathcal{L}}+\ldots \tag{G.13}$$

- Finite-Size Single Spikes: Elementary Region, $0\leq 1/\omega<|v|\leq 1$.

$$\mathcal{E}-\frac{p}{2}=\frac{q}{2}+4\sin^2\frac{q}{2}\tan\frac{q}{2}\cdot e^{-\mathcal{R}}+\Bigg\{8p^2\cos^2\frac{q}{2}+2p\cos\frac{q}{2}\left(8q\cos\frac{q}{2}-\sin\frac{3q}{2}+7\sin\frac{q}{2}\right)+8q^2\cos^2\frac{q}{2}-2q\sin q\big(\cos q-$$

$$-3\big)+\sin^2\frac{q}{2}\left(\cos 2q-2\cos q+5\right)\Bigg\}\sec^2\frac{q}{2}\tan\frac{q}{2}\cdot e^{-2\mathcal{R}}+\Bigg\{32p^4\cos^4\frac{q}{2}+\frac{8p^3}{3}\cos^3\frac{q}{2}\Big(48q\cos\frac{q}{2}-11\sin\frac{3q}{2}+$$

$$+25\sin\frac{q}{2}\Big)+p^2\cos^2\frac{q}{2}\Big[192q^2\cos^2\frac{q}{2}-8q\sin q\left(11\cos q-7\right)-5\cos 3q+22\cos 2q-59\cos q+42\Big]+$$

$$+\frac{1}{4}p\cos\frac{q}{2}\Big[512q^3\cos^3\frac{q}{2}-32q^2\sin q\,\cos\frac{q}{2}\left(11\cos q-7\right)+16q\sin q\,\sin\frac{q}{2}\left(5\cos 2q-12\cos q+15\right)-8\sin^3\frac{q}{2}\cdot$$

$$\cdot\left(\cos 3q-5\cos 2q+15\cos q-27\right)\Big]+32q^4\cos^4\frac{q}{2}-\frac{8}{3}q^3\cos^2\frac{q}{2}\sin q\left(11\cos q-7\right)+q^2\sin^2 q\big(5\cos 2q-$$

$$-12\cos q+15\big)-q\sin q\sin^2\frac{q}{2}\left(\cos 3q-5\cos 2q+15\cos q-27\right)+\frac{1}{6}\sin^4\frac{q}{2}\big(\cos 4q+2\cos 3q+16\cos 2q-$$

$$-50\cos q+127\big)\Bigg\}\csc\frac{q}{2}\sec^5\frac{q}{2}\cdot e^{-3\mathcal{R}}+\ldots \tag{G.14}$$

- Finite-Size Single Spikes: Doubled Region, $0\leq 1/\omega\leq 1\leq|v|$.

$$\mathcal{E}-\frac{p}{2}=\frac{q}{2}-4\sin^2\frac{q}{2}\tan\frac{q}{2}\cdot e^{-\mathcal{R}}+\Bigg\{8p^2\cos^2\frac{q}{2}+2p\cos\frac{q}{2}\left(8q\cos\frac{q}{2}-\sin\frac{3q}{2}+7\sin\frac{q}{2}\right)+8q^2\cos^2\frac{q}{2}-2q\sin q\big(\cos q-$$

$$-3\big)+\sin^2\frac{q}{2}\left(\cos 2q-34\cos q-91+64\csc^2\frac{q}{2}\right)\Bigg\}\sec^2\frac{q}{2}\tan\frac{q}{2}\cdot e^{-2\mathcal{R}}-\Bigg\{32p^4\cos^4\frac{q}{2}+\frac{8p^3}{3}\cos^3\frac{q}{2}\Big(48q\cos\frac{q}{2}$$

$$-11\sin\frac{3q}{2}+25\sin\frac{q}{2}\Big)+p^2\cos^2\frac{q}{2}\Big[192q^2\cos^2\frac{q}{2}-8q\sin q\left(11\cos q-7\right)-5\cos 3q+86\cos 2q+197\cos q+$$

$$+234\Big]+\frac{1}{4}p\cos\frac{q}{2}\Big[512q^3\cos^3\frac{q}{2}-32q^2\sin q\,\cos\frac{q}{2}\left(11\cos q-7\right)+16q\sin q\,\sin\frac{q}{2}\Big(5\cos 2q-76\cos q-177+$$

$$+128\csc^2\frac{q}{2}\Big)-8\sin^3\frac{q}{2}\cdot\left(\cos 3q-69\cos 2q-433\cos q-795+384\csc^2\frac{q}{2}\right)\Big]+32q^4\cos^4\frac{q}{2}-\frac{8}{3}q^3\cos^2\frac{q}{2}\sin q$$

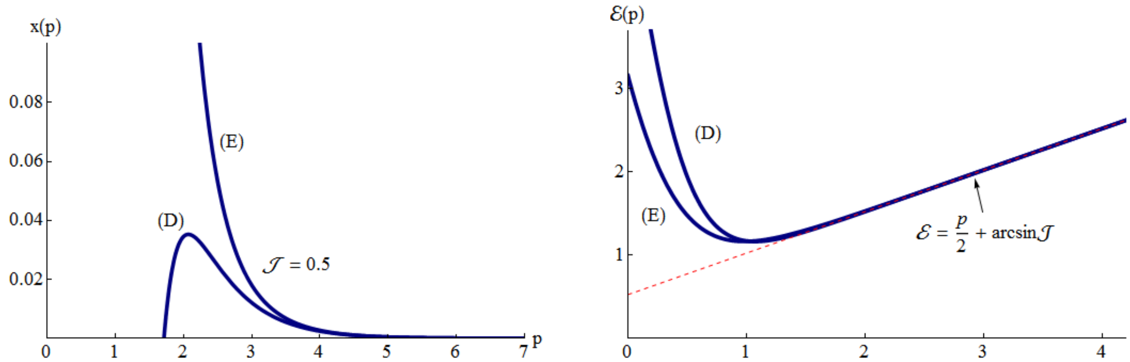


Figure 30: Inverse spin function and energy of finite-size single spikes. On the left we have plotted $x\left(p, \mathcal{J} = 0.5\right)$ and $\widetilde{x}\left(p, \mathcal{J} = 0.5\right)$ in the elementary and doubled region of single spikes. On the right we have plotted $\mathcal{E}\left(p, \mathcal{J} = 0.5\right)$ in the SS elementary (G.14) and doubled regions (G.15). The curves in the elementary region have been labelled with an (E) and the curves in the doubled region with a (D). The approximations become more trustworthy as the linear momentum p gets larger and (8.8) is approached.

$$\cdot\left(11\cos q - 7\right) + q^2\sin^2 q\left(5\cos 2q - 76\cos q - 177 + 128\csc^2\frac{q}{2}\right) - q\sin q\sin^2\frac{q}{2}\Big(\cos 3q - 69\cos 2q - 433\cos q$$

$$-795 + 384\csc^2\frac{q}{2}\Big) + \frac{1}{6}\sin^4\frac{q}{2}\left(\cos 4q - 190\cos 3q - 1424\cos 2q - 4466\cos q - 3809 + 768\csc^2\frac{q}{2}\right)\Bigg\}\csc\frac{q}{2}\cdot$$

$$\cdot\sec^5\frac{q}{2}\cdot e^{-3\mathcal{R}} + \ldots \tag{G.15}$$

All of our results agree with the Lambert W-function formulas that were derived in §10. For giant magnons (G.11) and (G.12) agree with (10.39) and (10.49). (G.13) agrees with (10.51). Notice that the only difference between the dispersion relations of giant magnons in the elementary and doubled regions (G.12)–(G.13) is the sign of all odd-powered exponential corrections.

For single spikes the dispersion relations in the elementary and doubled regions are quite different. We have marked the terms of (G.15) that are absent from the corresponding dispersion relation in the elementary region (G.14) with red color. Again, the Mathematica results (G.15)–(G.14) are in complete agreement with the Lambert W-function formulae (10.53)–(10.54). In figures 29–30 we have plotted all Mathematica results of this appendix (G.11)–(G.15) for giant magnons and single spikes.

H Elliptic Integrals and Jacobian Elliptic Functions

This appendix contains the definitions and some basic properties of elliptic integrals and Jacobian elliptic functions that we employ in the text. Our conventions mainly follow Abramowitz-Stegun [85].

Jacobian Elliptic Functions

$$u \equiv \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\left(1 - m\sin^2\theta\right)^{1/2}}\,, \quad \varphi \equiv am(u|m)\,, \quad \Delta(\varphi) \equiv (1-\sin^2\theta)^{1/2} \equiv dn(u|m) \tag{H.1}$$

$$x = \sin\varphi \equiv sn(u|m)\,, \quad \cos\varphi \equiv cn(u|m).$$

Elliptic Integral of the First Kind

$$\mathbb{F}\left(\varphi\middle|m\right) \equiv \int_0^{\varphi} \left(1 - m\,\sin^2\theta\right)^{-1/2} d\theta = \int_0^{x} \left[\left(1-t^2\right)\left(1-m\,t^2\right)\right]^{-1/2} dt = u \tag{H.2}$$

$$\mathbb{K}\left(m\right) \equiv \mathbb{F}\left(\frac{\pi}{2}\middle|m\right) = \frac{\pi}{2}\cdot {}_2\mathcal{F}_1\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;m\right] \quad \text{(complete)} \tag{H.3}$$

$$\mathbb{K}\left(m\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 m^n =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 m^3 + \ldots\right]\,, \quad |m|<1 \tag{H.4}$$

$$\mathbb{K}\left(m\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\Gamma\left(n+1/2\right)}{n!}\right)^2 \left[2\psi\left(n+1\right) - 2\psi\left(n+1/2\right) - \ln\left(1-m\right)\right]\,\left(1-m\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \left[\psi\left(n+1\right) - \psi\left(n+1/2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1-m\right)\right]\,\left(1-m\right)^n\,, \quad |1-m|<1, \tag{H.5}$$

where $\psi(z) \equiv \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ is the psi/digamma function.

Elliptic Integral of the Second Kind

$$\mathbb{E}\left(\varphi\middle|m\right) \equiv \int_0^{\varphi} \left(1 - m\,\sin^2\theta\right)^{1/2} d\theta = \int_0^{x} \left(1-t^2\right)^{-1/2}\left(1-m\,t^2\right)^{1/2} dt \tag{H.6}$$

$$\mathbb{E}\left(m\right) \equiv \mathbb{E}\left(\frac{\pi}{2}\middle|m\right) = \frac{\pi}{2}\cdot {}_2\mathcal{F}_1\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;m\right] \quad \text{(complete)} \tag{H.7}$$

$$\mathbb{E}\left(m\right) = -\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{m^n}{2n-1} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{m}{1} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{m^2}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{m^3}{5} + \dots \right], \quad |m| < 1 \quad \text{(H.8)}$$

$$\mathbb{E}\,(m) = 1 - \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\,(n+1/2)\,\Gamma\,(n+3/2)}{n!\,(n+1)!} \Big[\ln(1-m) + \psi\,(n+1/2) + \psi\,(n+3/2) - \psi\,(n+1) -$$

$$-\psi\,(n+2) \Big] \, (1-m)^{n+1} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\,[(2n-3)!!]^2}{(2n-2)!!\,(2n)!!} \left[\psi\,(n) - \psi\,(n-1/2) - \frac{1}{2n\,(2n-1)} - \frac{1}{2} \ln(1-m) \right] (1-m)^n \,,$$

$$|1-m| < 1.^{[91]} \quad \text{(H.9)}$$

One could also define an elliptic-D function as follows [272]:

$$\mathbb{D}\,(\varphi|m) \equiv \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1 - m\,\sin^2\theta}} = \int_0^x \frac{t^2\,dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-m\,t^2)}} = \frac{1}{m} \Big[\mathbb{F}\,(\varphi|m) - \mathbb{E}\,(\varphi|m) \Big] \quad \text{(H.10)}$$

$$\mathbb{D}\,(m) \equiv \mathbb{D}\left(\frac{\pi}{2}\Big|m\right) = \frac{1}{m} \Big[\mathbb{K}\,(m) - \mathbb{E}\,(m) \Big] \quad \text{(complete).} \quad \text{(H.11)}$$

<u>Elliptic Integral of the Third Kind</u>

$$\mathbf{\Pi}(n,\varphi|m) \equiv \int_0^{\varphi} \left(1 - n\sin^2\theta\right)^{-1} \left(1 - m\sin^2\theta\right)^{-1/2} =$$

$$= \int_0^x \left(1 - nt^2\right)^{-1} \left[\left(1-t^2\right)\left(1 - m\,t^2\right)\right]^{-1/2} dt \quad \text{(H.12)}$$

$$\mathbf{\Pi}(n;m) \equiv \mathbf{\Pi}(n, \frac{\pi}{2}\Big|m) \quad \text{(complete).} \quad \text{(H.13)}$$

A very useful addition formula for complete elliptic integrals of the third kind, allows to isolate their logarithmic singularities [273]:

$$\mathbf{\Pi}(n;m) = \frac{1}{(1-n)\,\mathbb{K}\,(m_1)} \cdot \left\{ \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n\,(n-1)}{m-n}} \cdot \mathbb{F}\left(\arcsin\sqrt{\frac{n}{n-m}}, m_1 \right) - \mathbb{K}\,(m) \cdot \Bigg[(n-1)\,\mathbb{K}\,(m_1) - \right.$$

$$\left. -n \cdot \mathbf{\Pi}\left(\frac{1-m}{1-n}; m_1\right) \Bigg] \right\}, \quad m + m_1 = 1\,, \quad 0 < -n < \infty. \quad \text{(H.14)}$$

[91] We repeat here some useful values of the double factorial: $0!! = 1$, $(-1)!! = 1$, $(-3)!! = -1$.

Carlson Elliptic Integrals

There is a sophisticated way to express Legendre's forms (H.2)–(H.10) with the aid of what is known as Carlson's symmetric forms. Briefly, Carlson's complete set of integrals is defined as follows [272, 274]:

$$\mathbb{R}_F\left(x,y,z\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{\left(t+x\right)\left(t+y\right)\left(t+z\right)}} \tag{H.15}$$

$$\mathbb{R}_J\left(x,y,z,p\right)=\frac{3}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\left(t+p\right)\sqrt{\left(t+x\right)\left(t+y\right)\left(t+z\right)}} \tag{H.16}$$

$$\mathbb{R}_C\left(x,y\right)=\mathbb{R}_F\left(x,y,y\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\left(t+y\right)\sqrt{\left(t+x\right)}} \tag{H.17}$$

$$\mathbb{R}_D\left(x,y,z\right)=\mathbb{R}_J\left(x,y,z,z\right)=\frac{3}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\left(t+z\right)\sqrt{\left(t+x\right)\left(t+y\right)\left(t+z\right)}}. \tag{H.18}$$

Carlson's symmetric forms owe much of their usefulness and elegance to the fact that, in contrast to the Legendre's forms, they are completely symmetric in all or some of their arguments. As it turns out, all of the incomplete elliptic integrals may be expressed in terms of Carlson's forms. The deeper reason for this can be traced back to the fact that all elliptic integrals are descendants of a multivariate hypergeometric function called Lauricella's $\mathcal{F}_D$. The complete elliptic integrals in particular, are given in terms of Carlson's forms as follows:

$$\mathbb{K}\left(m\right)=\mathbb{R}_F\left(0,1-m,1\right) \tag{H.19}$$

$$\mathbb{E}\left(m\right)=\frac{1}{3}\left(1-m\right)\cdot\Big[\mathbb{R}_D\left(0,1-m,1\right)+\mathbb{R}_D\left(0,1,1-m\right)\Big] \tag{H.20}$$

$$\mathbb{K}\left(m\right)-\mathbb{E}\left(m\right)=m\,\mathbb{D}\left(m\right)=\frac{1}{3}\,m\cdot\mathbb{R}_D\left(0,1-m,1\right) \tag{H.21}$$

$$\mathbb{E}\left(m\right)-\left(1-m\right)\mathbb{K}\left(m\right)=\frac{1}{3}\,m\,\left(1-m\right)\cdot\mathbb{R}_D\left(0,1,1-m\right). \tag{H.22}$$

I Lambert's W-Function

One of the main outcomes of our work in part II has been the parametrization of the dispersion relations of certain $AdS_5 \times S^5$ strings in terms of Lambert's W-function. Lambert's W-function is defined by the following formula:

$$W(z)\, e^{W(z)} = z \Leftrightarrow W(z\, e^{z}) = z. \tag{I.1}$$

The function is named after Johann Heinrich Lambert, but it was Euler who first wrote down the series expansion of $-W(-z)$ that is known today as the tree function $T(z)$. Euler essentially generalized an algebraic equation that had been studied earlier by Lambert [275] and then solved it in some special cases, one of which was a variant of equation (I.1) [276].[92] According to [277], the symbol W originates from the function's early Maple usage (most computer algebra systems, including Maple, call it LambertW, whereas in Mathematica it is denoted as ProductLog).[93]

Lambert's W-function appears in numerous contexts in both mathematics and physics. Its applications can be found in fields such as combinatorics, algorithms and graphs, algebraic and differential equations, analysis and fractals (see e.g. [277, 280]) but also statistical physics, fluid dynamics, optics, astrophysics, general relativity, inflationary cosmology, etc. (see [281]). As concrete examples, one could single out the exact expression of Wien's displacement law in terms of W-function [282], the solution of the double Dirac delta potential well [283] and that of the two-body problem in $(1+1)$-dimensional dilaton gravity [284], or the inversion of Schwarzschild coordinates in terms of the Kruskal-Szekeres ones [285, 255].

More pertinent to our point of view is the exact solution of the renormalization group equations in terms of Lambert's W-function [286]. In the case of QCD it is known that the exact 3-loop running coupling, can be expressed in terms of the W-function [287, 288]:[94]

$$\alpha_s\left(Q^2\right) = \frac{-\pi/c}{1 - c_2/c^2 + W_{-1}(z)}, \tag{I.2}$$

where c_2 is a renormalization scheme-dependent constant and

$$\beta_0 \equiv \frac{1}{4}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right), \quad c \equiv \frac{1}{4\beta_0}\left[102 - \frac{38}{3}N_f\right], \quad z \equiv -\frac{1}{c}\exp\left[-1 + \frac{c_2}{c^2} - \frac{\beta_0\, t}{c}\right], \quad t \equiv \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right).$$

$W(x)$ has two real branches, $W_0(x)$ in $\left[-e^{-1}, \infty\right)$ and $W_{-1}(x)$ in $\left[-e^{-1}, 0\right]$, drawn in figure 31.[95] The branch point is $\left(-e^{-1}, -1\right)$. The Taylor series at $x = 0$ in each of the two branches is [277]:

$$W_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^{n-1}}{n!} \cdot x^n\,, \quad |x| \leq e^{-1} \tag{I.3}$$

$$W_{-1}(x) = \ln|x| - \ln\ln|x| + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m!} \begin{bmatrix} n+m \\ n+1 \end{bmatrix} \left(\ln|x|\right)^{-n-m} \left(\ln\ln|x|\right)^m, \tag{I.4}$$

[92] In his 1783 paper, Euler refers to Lambert as "the ingenious engineer Lambert". For more on the very interesting history of Lambert's function see the article [277].

[93] More on Lambert onomastics can be found in the article [278]. Closely related definitions are those of *glog* and Wright's ω-function [279].

[94] For a reviews see [289].

[95] The branch of the W-function in the formula for the running coupling of QCD (I.2) depends on the number of flavors N_f. For $c > 0 \Leftrightarrow z < 0$ the relevant branch is W_{-1}, while for $c < 0 \Leftrightarrow z > 0$ the branch is W_0 [288].

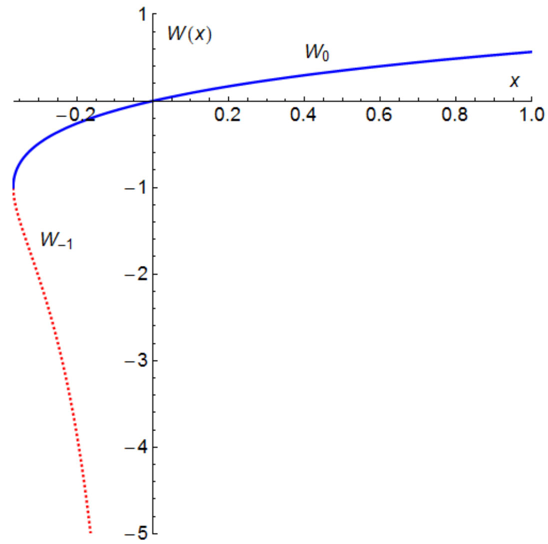


Figure 31: The real branches of Lambert's W-function (I.1).

with the unsigned Stirling numbers of the first kind $\begin{bmatrix} n+m \\ n+1 \end{bmatrix}$, defined recursively as [290]:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \quad \& \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = 0\,, \ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\,, \ n, k \geq 1. \tag{I.5}$$

The following identities of unsigned Stirling numbers are often used:

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!\,, \quad \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)!\, H_{n-1}\,, \quad \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\,(n-1)! \left[H_{n-1}^2 - H_{n-1}^{(2)} \right]. \tag{I.6}$$

The W-function provides a nice series parametrization of the tetration $x^{x^{x^{\cdots}}}$:

$$x^{x^{x^{\cdots}}} = {}^{\infty}(x^z) = \frac{W(-\ln x)}{-\ln x}. \tag{I.7}$$

By using the defining property (I.1) of Lambert's W-function, its derivatives and antiderivatives can be significantly simplified. Here's a list of some useful identities of the W_0 function:

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x\,(1 + W(x))} \tag{I.8}$$

$$x\,W'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^n}{n!} \cdot x^n = \frac{W(x)}{1 + W(x)} \tag{I.9}$$

$$x\,\left(x\,W'(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^{n+1}}{n!} \cdot x^n = \frac{W(x)}{(1 + W(x))^3} \tag{I.10}$$

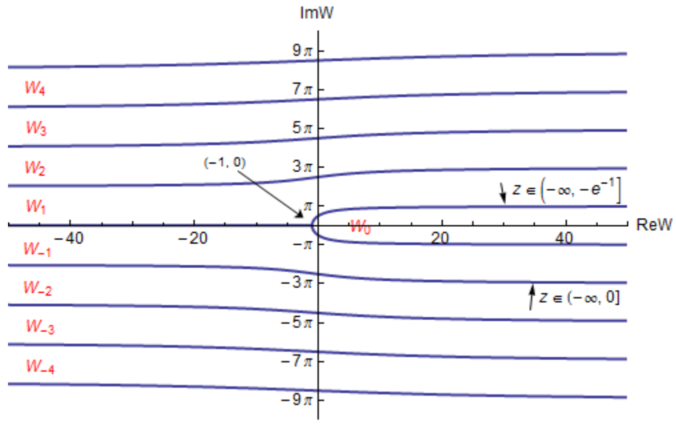


Figure 32: Branch diagram of Lambert's W-function.

$$\int W(x)\ dx = x\left(W(x) - 1 + \frac{1}{W(x)}\right) \tag{I.11}$$

$$\int \frac{W(x)}{x}\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{n^{n-2}}{n!}\cdot x^n = W(x) + \frac{W^2(x)}{2} \tag{I.12}$$

$$\int \frac{1}{x}\int \frac{W(x)}{x}\ dx^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{n^{n-3}}{n!}\cdot x^n = W(x) + \frac{3W^2(x)}{4} + \frac{W^3(x)}{6}. \tag{I.13}$$

The branch structure of Lambert's W-function is very reminiscent of that of the logarithm. Besides, the W-function is a generalization of the logarithmic function. However, instead of the familiar straight lines that separate the adjacent branches of the logarithm, neighboring branches of Lambert's function are separated by a family of curves that is known as "Quadratrix of Hippias":

$$\left\{-\eta\cot\eta + i\eta, \quad -\pi < \eta < \pi \quad \text{or} \quad 2k\pi < \pm\eta < (2k+1)\,\pi, \quad k = 1, 2, 3, \ldots\right\} \tag{I.14}$$

(I.4) gives the asymptotics of all branches around $z = \infty$, and all non-principal branches around $z = 0$. Other notable features of the branch diagram of the W-function, apart from the two real branches that we have already talked about, is the triple branch point at $W_{\{0,\pm1\}}\left(-e^{-1}\right) = -1$ and the branch cuts $\left(-\infty, -e^{-1}\right]$ of $W_{0,\pm1}$ and $(-\infty, 0]$ of $W_{k\neq0}$. The branch diagram of the W-function has been drawn in figure 32.

J Partition Polynomials

J.1 Bell Polynomials

The exponential complete Bell polynomials $\mathbf{B}_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ are defined by the formula [290]:

$$\exp\left[\sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{B}_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \frac{t^n}{n!}. \tag{J.1}$$

The exponential partial Bell polynomials $\mathbf{B}_{n,k} = \mathbf{B}_{n,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}\right)$ are defined as follows:

$$\mathbf{B}_{n,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}\right) = \sum_j \frac{n!}{j_1! j_2! \ldots j_{n-k+1}!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{j_1} \left(\frac{x_2}{2!}\right)^{j_2} \ldots \left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{j_{n-k+1}}, \tag{J.2}$$

where $j_1 + j_2 + \ldots = k$ and $j_1 + 2\, j_2 + \ldots = n$. One finds,

$$\mathbf{B}_0\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 1\,, \quad \mathbf{B}_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{B}_{n,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}\right). \tag{J.3}$$

Note that the unsigned Stirling numbers of the first kind are given in terms of the partial Bell polynomials as $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] = \mathbf{B}_{n,k}\left(0!, 1!, \ldots, (n-k)!\right)$. Ordinary partial Bell polynomials are defined as:

$$\widehat{\mathbf{B}}_{n,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_j \frac{n!}{j_1! j_2! \ldots j_n!} \, {x_1}^{j_1} {x_2}^{j_2} \ldots x_n^{j_{n-k+1}}. \tag{J.4}$$

J.2 Potential Polynomials

Potential polynomials $\mathbf{P}_n^{(r)}$ are defined by means of the formula:

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!}\right]^r = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_n^{(r)}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \frac{t^n}{n!}. \tag{J.5}$$

J.3 Logarithmic Polynomials

The definition of logarithmic polynomials $\mathbf{L}_n^{(r)}$ is similar:

$$\ln\left[\sum_{m=0}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{L}_n^{(r)}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \frac{t^n}{n!}. \tag{J.6}$$

K Lamé's Equation

We saw in §17 that the equations for the transverse fluctuations of stringy membranes (16.1)–(16.10) can be reduced to the Jacobi form of Lamé's equation (17.34):

$$\frac{d^2 z}{du^2} + \left[h - \nu\left(\nu+1\right)k^2 sn^2\left(u|k^2\right)\right] z = 0, \tag{K.1}$$

where $\nu\left(\nu+1\right) \in \mathbb{R}$ and $0 < k < 1$. The potential of Lamé's equation (K.1), $sn^2\left(u|k^2\right)$ is a doubly periodic function with (primitive) real and imaginary periods equal to $2\mathbb{K}\left(k^2\right)$ and $2i\mathbb{K}'\left(k^2\right)$ respectively. Its real and imaginary parts have been drawn in a contour plot in figure 33. The eigenfunctions of Lamé's equation (aka Lamé functions) that have real periods are the following:

eigenfunction $z\left(u\right)$	eigenvalue h	parity of $z\left(u\right)$	parity of $z\left(u-\mathbb{K}\right)$	period of $z\left(u\right)$
$Ec_\nu^{2n}\left(u,k^2\right)$	$a_\nu^{2n}\left(k^2\right)$	even	even	$2\mathbb{K}$
$Ec_\nu^{2n+1}\left(u,k^2\right)$	$a_\nu^{2n+1}\left(k^2\right)$	odd	even	$4\mathbb{K}$
$Es_\nu^{2n+1}\left(u,k^2\right)$	$b_\nu^{2n+1}\left(k^2\right)$	even	odd	$4\mathbb{K}$
$Es_\nu^{2n+2}\left(u,k^2\right)$	$b_\nu^{2n+2}\left(k^2\right)$	odd	odd	$2\mathbb{K}$

where $n = 0, 1, 2, \ldots$ The Lamé eigenvalues a_ν^n and b_ν^n have the following ordering properties [272, 291]:

$$\begin{aligned}
&a_\nu^0 < a_\nu^1 < a_\nu^2 < a_\nu^3 \ldots, \quad a_\nu^n \to \infty \text{ as } n \to \infty\\
&b_\nu^1 < b_\nu^2 < b_\nu^3 < b_\nu^4 \ldots, \quad b_\nu^n \to \infty \text{ as } n \to \infty\\
&a_\nu^0 < b_\nu^1 < a_\nu^2 < b_\nu^3 \ldots\\
&a_\nu^1 < b_\nu^2 < a_\nu^3 < b_\nu^4 \ldots
\end{aligned}$$

The intervals of stability of Lamé's equation (K.1) follow from the *oscillation theorem* [292]. They are:

$$(a_\nu^0, \underbrace{a_\nu^1) \cup (b_\nu^1}, \underbrace{b_\nu^2) \cup (a_\nu^2}, \underbrace{a_\nu^3) \cup (b_\nu^3}, \underbrace{b_\nu^4) \cup \ldots}, \tag{K.2}$$

where the contractions between consecutive eigenvalues mean that the relative order of the two contracted eigenvalues is not generally known and may therefore be reversed, for given values of ν and k^2.

For $\nu \in \mathbb{R}$, the expression $\nu\left(\nu+1\right) \in \mathbb{R}$ is symmetric under the map $\nu \leftrightarrow -\nu - 1$ so that without loss of generality, we may consider $\nu \geq -1/2$ and $\nu\left(\nu+1\right) \geq -1/4$. If further $\nu \in \mathbb{N}$, then the first $2\nu + 1$ of the Lamé functions are polynomials (aka Lamé polynomials), while the remaining transcendental solutions of Lamé's equation *coexist*, that is:

$$a_\nu^n = b_\nu^n, \text{ for n, } \nu \in \mathbb{N} \text{ and } n \geq \nu + 1. \tag{K.3}$$

The above picture is nicely summarized by the following theorem [292]:

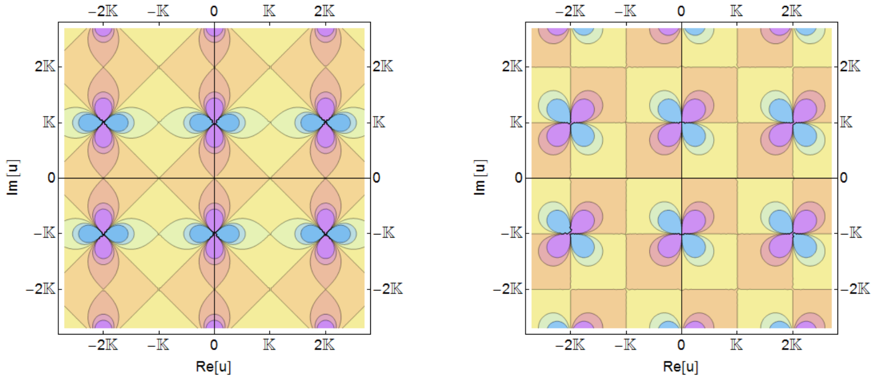


Figure 33: Real part (left) and imaginary part (right) of the Lamé potential, $\mathrm{sn}^2\,(u|1/2)$.

■ **Theorem 1.** *Lamé's equation (K.1), displays coexistence iff $\nu \in \mathbb{Z}$. It has exactly $\nu+1$ instabilities if $\nu \in \mathbb{N}$ and exactly $|\nu|$ instabilities if $\nu \in \mathbb{Z}^-$.*

The stability intervals when $\nu \in \mathbb{N}$ are given by [272]:

$$(a_\nu^0\,,\,b_\nu^1)\,\cup\,(a_\nu^1\,,\,b_\nu^2)\,\cup\,(a_\nu^2\,,\,b_\nu^3)\,\cup\,\ldots\,\cup\,(a_\nu^{\nu-1}\,,\,b_\nu^\nu)\,\cup\,(a_\nu^\nu\,,\,+\infty)\quad,\quad \nu\in\mathbb{N}. \tag{K.4}$$

Finally, let us mention a few things about Lamé functions that have imaginary periods. First observe that Lamé's equation (K.1) has the following symmetry [244, 272, 291]:

$$\begin{aligned} u' &= i\left(u - \mathbb{K}\left(k^2\right) - i\,\mathbb{K}'\left(k^2\right)\right)\\ h' &= \nu\,(\nu+1) - h \quad,\quad k'^{\,2} = 1-k^2, \end{aligned} \tag{K.5}$$

so that, when the solution of Lamé's equation $z\,(u)$ has a real period equal to $2\,p\,\mathbb{K}$ (with $p=1,2$), then the function $z'\,(u') \equiv z\,(u)$ will have an imaginary period equal to $2\,i\,p\,\mathbb{K}$ and will satisfy the following transformed equation:

$$\frac{d^2 z}{du'^2} + \left[h' - \nu\,(\nu+1)\,k'^{\,2} sn^2\left(u'|k'^{\,2}\right)\right] z = 0. \tag{K.6}$$

It can be proven that the duality (K.5) interchanges the bands of stability with the gaps of instability in (K.2) [244].

References

[1] G. Linardopoulos, *Large-Spin Expansions of Giant Magnons*, arXiv:1502.0163.

[2] E. Floratos and G. Linardopoulos, *Large-Spin and Large-Winding Expansions of Giant Magnons and Single Spikes*, arXiv:1406.0796.

[3] E. Floratos, G. Georgiou, and G. Linardopoulos, *Large-Spin Expansions of GKP Strings*, *JHEP* **03** (2014) 018, [arXiv:1311.5800].

[4] M. Axenides, E. Floratos, and G. Linardopoulos, *Stringy Membranes in AdS/CFT*, *JHEP* **08** (2013) 089, [arXiv:1306.0220].

[5] J. Polchinski, *Introduction to Gauge/Gravity Duality*, arXiv:1010.6134.

[6] J. M. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 231, [hep-th/9711200].

[7] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, *Gauge Theory Correlators from non-Critical String Theory*, *Phys.Lett.* **B428** (1998) 105, [hep-th/9802109].

[8] E. Witten, *Anti-de Sitter Space and Holography*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 253, [hep-th/9802150].

[9] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, *Large N Field Theories, String Theory and Gravity*, *Phys.Rep.* **323** (2000) 183, [hep-th/9905111].

[10] I. Bena, J. Polchinski, and R. Roiban, *Hidden Symmetries of the $AdS_5 \times S^5$ Superstring*, *Phys.Rev.* **D69** (2004) 046002, [hep-th/0305116].

[11] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, *A Semi-Classical Limit of the Gauge/String Correspondence*, *Nucl.Phys.* **B636** (2002) 99, [hep-th/0204051].

[12] G. Georgiou and G. Savvidy, *Large Spin Behavior of Anomalous Dimensions and Short-Long Strings Duality*, *J.Phys.* **A44** (2011) 305402, [arXiv:1012.5580].

[13] H. Dimov, S. Mladenov, and R. Rashkov, *Large J Expansion in ABJM Theory Revisited*, *Eur.Phys.J.* **C74** (2014) 3042, [arXiv:1402.3556].

[14] G. 't Hooft, *A Planar Diagram Theory for Strong Interactions*, *Nucl.Phys.* **B72** (1974) 461.

[15] S. R. Coleman, *Aspects of Symmetry.* Cambridge University Press, 1985.

[16] E. Kiritsis, *String Theory in a Nutshell.* Princeton University Press, 2007.

[17] G. 't Hooft, *Dimensional Reduction in Quantum Gravity*, gr-qc/9310026 • L. Susskind, *The World as a Hologram*, *J.Math.Phys.* **36** (1995) 6377, [hep-th/9409089].

[18] R. Bousso, *The Holographic Principle*, *Rev.Mod.Phys.* **74** (2002) 825, [hep-th/0203101].

[19] L. Susskind and J. Lindesay, *An Introduction to Black Holes, Information and the String Theory Revolution: The Holographic Universe.* 2005.

[20] P. Deligne, P. Etingof, D. S. Freed, L. C. Jeffrey, D. Kazhdan, *et. al.*, *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians.* 1999.

[21] C. G. Callan Jr., E. J. Martinec, M. J. Perry, and D. Friedan, *Strings in Background Fields*, *Nucl.Phys.* **B262** (1985) 593.

[22] E. T. Akhmedov, *A Remark on the AdS/CFT Correspondence and the Renormalization Group Flow*, *Phys.Lett.* **B442** (1998) 152, [hep-th/9806217] • E. Álvarez and C. Gómez, *Geometric Holography, the Renormalization Group and the c-Theorem*, *Nucl.Phys.* **B541** (1999) 441, [hep-th/9807226].

[23] A. M. Polyakov, *The Wall of the Cave*, *Int.J.Mod.Phys.* **A14** (1999) 645, [hep-th/9809057].

[24] E. D'Hoker and D. Z. Freedman, *Supersymmetric Gauge Theories and the AdS/CFT Correspondence*, hep-th/0201253.

[25] C. V. Johnson, *D-branes*. Cambridge University Press, 2003.

[26] F. Nitti, *The Holographic View on RG Flows*, . http://erg2014.phys.uoa.gr/TALKS_FILES/nitti-ERG-14.pdf.

[27] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal, and U. A. Wiedemann, *Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions*, arXiv:1101.0618.

[28] P. Di Vecchia, *An Introduction to AdS/CFT Correspondence*, *Fortsch.Phys.* **48** (2000) 87, [hep-th/9903007].

[29] L. Brink, J. H. Schwarz, and J. Scherk, *Supersymmetric Yang-Mills Theories*, *Nucl.Phys.* **B121** (1977) 77 • F. Gliozzi, J. Scherk, and D. I. Olive, *Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model*, *Nucl.Phys.* **B122** (1977) 253.

[30] S. Ferrara and B. Zumino, *Supergauge Invariant Yang-Mills Theories*, *Nucl.Phys.* **B79** (1974) 413.

[31] V. N. Velizhanin, *Vanishing of the Four-Loop Charge Renormalization Function in $\mathcal{N} = 4$ SYM Theory*, *Phys.Lett.* **B696** (2011) 560, [arXiv:1008.2198].

[32] M. F. Sohnius and P. C. West, *Conformal Invariance in $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, *Phys.Lett.* **B100** (1981) 245.

[33] S. Mandelstam, *Light Cone Superspace and the Ultraviolet Finiteness of the $\mathcal{N} = 4$ Model*, *Nucl.Phys.* **B213** (1983) 149 • L. Brink, O. Lindgren, and B. E. W. Nilsson, *The Ultraviolet Finiteness of the $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills Theory*, *Phys.Lett.* **B123** (1983) 323.

[34] P. S. Howe, K. S. Stelle, and P. K. Townsend, *The Relaxed Hypermultiplet: An Unconstrained $\mathcal{N} = 2$ Superfield Theory*, *Nucl.Phys.* **B214** (1983) 519 • P. S. Howe, K. S. Stelle, and P. C. West, *A Class of Finite Four-Dimensional Supersymmetric Field Theories*, *Phys.Lett.* **B124** (1983) 55 • P. S. Howe, K. S. Stelle, and P. K. Townsend, *Miraculous Ultraviolet Cancellations in Supersymmetry Made Manifest*, *Nucl.Phys.* **B236** (1984) 125.

[35] N. Seiberg, *Supersymmetry and Nonperturbative Beta Functions*, *Phys.Lett.* **B206** (1988) 75.

[36] Y. Nakayama, *A Lecture Note on Scale Invariance vs Conformal Invariance*, arXiv:1302.0884.

[37] M. F. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, *Phys.Rept.* **128** (1985) 39 • S. Kovacs, *$\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory and the AdS/SCFT Correspondence*, hep-th/9908171.

[38] R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, *Type IIB Superstring Action in $AdS_5 \times S^5$ Background*, *Nucl.Phys.* **B533** (1998) 109, [hep-th/9805028].

[39] G. Arutyunov and S. Frolov, *Foundations of the $AdS_5 \times S^5$ Superstring. Part I*, *J.Phys.* **A42** (2009) 254003, [arXiv:0901.4937].

[40] B. Sundborg, *Stringy Gravity, Interacting Tensionless Strings and Massless Higher Spins*, *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* **102** (2001) 113, [hep-th/0103247].

[41] R. R. Metsaev, *Type IIB Green-Schwarz Superstring in Plane Wave Ramond-Ramond Background*, *Nucl.Phys.* **B625** (2002) 70, [hep-th/0112044].

[42] G. T. Horowitz and A. R. Steif, *Spacetime Singularities in String Theory*, *Phys.Rev.Lett.* **64** (1990) 260.

[43] D. Berenstein, J. Maldacena, and H. Nastase, *Strings in Flat Space and pp Waves from $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mills*, *JHEP* **04** (2002) 013, [hep-th/0202021].

[44] A. Pankiewicz, *Strings in Plane Wave Backgrounds*, *Fortsch.Phys.* **51** (2003) 1139, [hep-th/0307027] • J. C. Plefka, *Lectures on the Plane-Wave String/Gauge Theory Duality*, *Fortsch.Phys.* **52** (2004) 264, [hep-th/0307101] • D. Sadri and M. M. Sheikh-Jabbari, *The Plane-Wave/Super Yang-Mills Duality*, *Rev.Mod.Phys.* **76** (2004) 853, [hep-th/0310119] • R. Russo and A. Tanzini, *The Duality between IIB String Theory on pp-Wave and $\mathcal{N} = 4$ SYM: A Status Report*, *Class.Quant.Grav.* **21** (2004) S1265, [hep-th/0401155].

[45] S. Frolov and A. A. Tseytlin, *Semiclassical Quantization of Rotating Superstring in $AdS_5 \times S^5$*, *JHEP* **06** (2002) 007, [hep-th/0204226].

[46] O. Aharony, O. Bergman, and D. L. Jafferis, *Fractional M2-Branes*, *JHEP* **11** (2008) 043, [arXiv:0807.4924] • O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis, and J. Maldacena, *$\mathcal{N} = 6$ Superconformal Chern-Simons-Matter Theories, M2-Branes and their Gravity Duals*, *JHEP* **10** (2008) 091, [arXiv:0806.1218].

[47] J. Bagger and N. Lambert, *Modeling Multiple M2's*, *Phys.Rev.* **D75** (2007) 045020, [hep-th/0611108] • A. Gustavsson, *Algebraic Structures on Parallel M2-Branes*, *Nucl.Phys.* **B811** (2009) 66, [arXiv:0709.1260].

[48] N. Beisert, B. Eden, and M. Staudacher, *Transcedentality and Crossing*, *J.Stat.Mech.* **0701** (2007) P01021, [hep-th/0610251].

[49] N. Berkovits and J. Maldacena, *Fermionic T-Duality, Dual Superconformal Symmetry, and the Amplitude/Wilson Loop Connection*, *JHEP* **0809** (2008) **062**, [arXiv:0807.3196] • N. Beisert, R. Ricci, A. A. Tseytlin, and M. Wolf, *Dual Superconformal Symmetry from $AdS_5 \times S^5$ Superstring Integrability*, *Phys.Rev.* **D78** (2008) 126004, [arXiv:0807.3228].

[50] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal, *Conformal field theory*. Springer, 1997.

[51] A. M. Perelomov, *Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

[52] S. Weigert, *The Problem of Quantum Integrability*, *Physica* **D56** (1992) 107.

[53] B. Sutherland, *Beautiful Models. 70 Years of Exactly Solved Quantum Many-Body Problems.* World Scientific, Singapore, 2004.

[54] K. Pohlmeyer, *Integrable Hamiltonian Systems and Interactions Through Quadratic Constraints*, *Commun.Math.Phys.* **46** (1976) 207.

[55] M. Lüscher and K. Pohlmeyer, *Scattering of Massless Lumps and Nonlocal Charges in the Two-Dimensional Classical Nonlinear σ-Model*, *Nucl.Phys.* **B137** (1978) 46.

[56] V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov, *Relativistically Invariant Two-Dimensional Models of Field Theory which are Integrable by means of the Inverse Scattering Problem Method.*, *Sov.Phys.JETP* **47** (1978) 1017.

[57] H. Eichenherr and M. Forger, *On the Dual Symmetry of the Nonlinear Sigma Models*, *Nucl.Phys.* **B155** (1979) 381.

[58] G. Mandal, N. V. Suryanarayana, and S. R. Wadia, *Aspects of Semiclassical Strings in AdS$_5$*, *Phys.Lett.* **B543** (2002) 81, [hep-th/0206103].

[59] C. Kristjansen, M. Staudacher, and A. Tseytlin, eds., *Special Issue on Integrability and AdS/CFT Correspondence.* J.Phys., **A42**, 250301. 2009 • D. Serban, *Integrability and the AdS/CFT Correspondence*, *J.Phys.* **A44** (2011) 124001, [arXiv:1003.4214] • N. Beisert *et. al.*, *Review of AdS/CFT Integrability: An Overview*, *Lett.Math.Phys.* **99** (2012) 3, [arXiv:1012.3982].

[60] J. Plefka, *Spinning Strings and Integrable Spin Chains in the AdS/CFT Correspondence*, *Living Rev. Rel.* **8** (2005) 9, [hep-th/0507136].

[61] N. Dorey, *Notes on Integrability in Gauge Theory and String Theory*, *J.Phys.* **A42** (2009) 254001.

[62] J. A. Minahan, *Review of AdS/CFT Integrability, Chapter I.1: Spin Chains in $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills*, *Lett.Math.Phys.* **99** (2012) 33, [arXiv:1012.3983].

[63] J. A. Minahan and K. Zarembo, *The Bethe-Ansatz for $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills*, *JHEP* **03** (2003) 013, [hep-th/0212208].

[64] H. Bethe, *On the Theory of Metals. 1. Eigenvalues and Eigenfunctions for the Linear Atomic Chain*, *Z.Phys.* **71** (1931) 205.

[65] C. Sieg, *Review of AdS/CFT Integrability, Chapter I.2: The Spectrum from Perturbative Gauge Theory*, *Lett.Math.Phys.* **99** (2012) 59, [arXiv:1012.3984] • A. Rej, *Review of AdS/CFT Integrability, Chapter I.3: Long-range Spin Chains*, *Lett.Math.Phys.* **99** (2012) 85, [arXiv:1012.3985].

[66] N. Beisert, C. Kristjansen, and M. Staudacher, *The Dilatation Operator of Conformal $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills Theory*, *Nucl.Phys.* **B664** (2003) 131, [hep-th/0303060].

[67] N. Beisert, V. Dippel, and M. Staudacher, *A Novel Long-Range Spin Chain and Planar $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills*, *JHEP* **07** (2004) 075, [hep-th/0405001].

[68] G. Arutyunov, S. Frolov, and M. Staudacher, *Bethe Ansatz for Quantum Strings*, *JHEP* **10** (2004) 016, [hep-th/0406256].

[69] A. Mikhailov, *A Nonlocal Poisson Bracket of the Sine-Gordon Model*, *J.Geom.Phys.* **61** (2011) 85, [hep-th/0511069].

[70] B. M. Barbashov and V. V. Nesterenko, *Relativistic String Model in a Space-Time of a Constant Curvature*, *Commun.Math.Phys.* **78** (1981) 499 • H. J. de Vega and N. Sanchez, *Exact Integrability of Strings in D-Dimensional de Sitter Spacetime*, *Phys.Rev.* **D47** (1993) 3394.

[71] A. L. Larsen and N. Sánchez, *Sinh-Gordon, Cosh-Gordon and Liouville Equations for Strings and Multi-Strings in Constant Curvature Spacetimes*, *Phys.Rev.* **D54** (1996) 2801, [hep-th/9603049].

[72] I. Bakas, *Conservation Laws and Geometry of Perturbed Coset Models*, *Int.J.Mod.Phys.* **A9** (1994) 3443, [hep-th/9310122].

[73] M. Grigoriev and A. A. Tseytlin, *Pohlmeyer Reduction of $AdS_5 \times S^5$ Superstring Sigma Model*, *Nucl.Phys.* **B800** (2008) 450, [arXiv:0711.0155].

[74] A. Mikhailov and S. Schäfer-Nameki, *Sine-Gordon-like Action for the Superstring in $AdS_5 \times S^5$*, *JHEP* **05** (2008) 075, [arXiv:0711.0195].

[75] G. Arutyunov, S. Frolov, J. Russo, and A. A. Tseytlin, *Spinning Strings in $AdS_5 \times S^5$ and Integrable Systems*, *Nucl.Phys.* **B671** (2003) 3, [hep-th/0307191].

[76] G. Arutyunov, J. Russo, and A. A. Tseytlin, *Spinning Strings in $AdS_5 \times S^5$: New Integrable System Relations*, *Phys.Rev.* **D69** (2004) 086009, [hep-th/0311004].

[77] M. Kruczenski, J. Russo, and A. A. Tseytlin, *Spiky Strings and Giant Magnons on S^5*, *JHEP* **10** (2006) 002, [hep-th/0607044].

[78] D. M. Hofman and J. Maldacena, *Giant Magnons*, *J.Phys.* **A39** (2006) 13095, [hep-th/0604135].

[79] H. J. de Vega, A. L. Larsen, and N. Sánchez, *Semi-Classical Quantization of Circular Strings in de Sitter and anti de Sitter Spacetimes*, *Phys.Rev.* **D51** (1995) 6917, [hep-th/9410219].

[80] J. A. Minahan, *Circular Semiclassical String Solutions on $AdS_5 \times S^5$*, *Nucl.Phys.* **B648** (2003) 203, [hep-th/0209047].

[81] M. Beccaria, G. V. Dunne, G. Macorini, A. Tirziu, and A. A. Tseytlin, *Exact Computation of One-Loop Correction to Energy of Pulsating Strings in $AdS_5 \times S^5$*, *J.Phys.* **A44** (2011) 015404, [arXiv:1009.2318].

[82] A. Tirziu and A. A. Tseytlin, *Quantum Corrections to Energy of Short Spinning String in AdS_5*, *Phys.Rev.* **D78** (2008) 066002, [arXiv:0806.4758].

[83] B. Basso, *An Exact Slope for AdS/CFT*, arXiv:1109.3154.

[84] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 2007.

[85] M. Abramowitz and I. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1972.

[86] C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[87] M. Axenides, E. Floratos, and A. Kehagias, *Scaling Violations in Yang-Mills Theories and Strings in AdS_5*, *Nucl.Phys.* **B662** (2003) 170, [hep-th/0210091].

[88] H. Georgi and H. D. Politzer, *Electroproduction Scaling in an Asymptotically Free Theory of Strong Interactions*, *Phys.Rev.* **D9** (1974) 416 • D. J. Gross and F. Wilczek, *Asymptotically free gauge theories. II*, *Phys.Rev.* **D9** (1974) 980.

[89] E. G. Floratos, D. A. Ross, and C. T. Sachrajda, *Higher-Order Effects in Asymptotically Free Gauge Theories: The Anomalous Dimensions of Wilson Operators*, *Nucl.Phys.* ***B129*** *(1977) 66, Erratum-ibid.* ***B139*** *(1978) 545* • E. G. Floratos, D. A. Ross, and C. T. Sachrajda, *Higher-Order Effects in Asymptotically Free Gauge Theories (II). Flavor Singlet Wilson*

Operators and Coefficient Functions, *Nucl.Phys.* **B152** (1979) 493 • G. Curci, W. Furmanski, and R. Petronzio, *Evolution of Parton Densities Beyond Leading Order: The Nonsinglet Case*, *Nucl.Phys.* **B175** (1980) 27 • E. G. Floratos, C. Kounnas, and R. Lacaze, *Higher Order QCD Effects in Inclusive Annihilation and Deep Inelastic Scattering*, *Nucl.Phys.* **B192** (1981) 417.

[90] S. Moch, J. A. M. Vermaseren, and A. Vogt, *The Three-Loop Splitting Functions in QCD: The Non-Singlet Case*, *Nucl.Phys.* **B688** (2004) 101, [hep-ph/0403192] • A. Vogt, S. Moch, and J. A. M. Vermaseren, *The Three-Loop Splitting Functions in QCD: The Singlet Case*, *Nucl.Phys.* **B691** (2004) 129, [hep-ph/0404111].

[91] A. V. Kotikov and L. N. Lipatov, *DGLAP and BFKL Evolution Equations in the $N = 4$ Supersymmetric Gauge Theory*, hep-ph/0112346.

[92] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, and V. N. Velizhanin, *Anomalous dimensions of Wilson operators in N=4 SYM theory*, *Phys.Lett.* **B557** (2003) 114, [hep-ph/0301021].

[93] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. I. Onishchenko, and V. N. Velizhanin, *Three-Loop Universal Anomalous Dimension of the Wilson Operators in $\mathcal{N} = 4$ SUSY Yang-Mills Model*, *Phys.Lett.* ***B595** (2004) 521, Erratum-ibid. **B632** (2006) 754* [hep-th/0404092].

[94] B. Eden and M. Staudacher, *Integrability and Transcedentality*, *J.Stat.Mech.* **0611** (2006) P11014, [hep-th/0603157].

[95] B. Basso, G. P. Korchemsky, and J. Kotański, *Cusp Anomalous Dimension in Maximally Supersymmetric Yang-Mills Theory at Strong Coupling*, *Phys.Rev.Lett.* **100** (2008) 091601, [arXiv:0708.3933].

[96] I. Kostov, D. Serban, and D. Volin, *Functional BES Equation*, *JHEP* **08** (2008) 101, [arXiv:0801.2542].

[97] R. Roiban, A. Tirziu, and A. A. Tseytlin, *Two-Loop World-Sheet Corrections in $AdS_5 \times S^5$ Superstring*, *JHEP* **07** (2007) 056, [arXiv:0704.3638].

[98] R. Roiban and A. A. Tseytlin, *Strong-Coupling Expansion of Cusp Anomaly from Quantum Superstring*, *JHEP* **11** (2007) 016, [arXiv:0709.0681].

[99] M. Beccaria, V. Forini, A. Tirziu, and A. A. Tseytlin, *Structure of Large Spin Expansion of Anomalous Dimensions at Strong Coupling*, *Nucl.Phys.* **B812** (2009) 144, [arXiv:0809.5234].

[100] A. V. Kotikov, A. Rej, and S. Zieme, *Analytic Three-Loop Solutions for $\mathcal{N} = 4$ SYM Twist Operators*, *Nucl.Phys.* **B813** (2009) 460, [arXiv:0810.0691].

[101] M. Beccaria, A. V. Belitsky, A. V. Kotikov, and S. Zieme, *Analytic Solution of the Multiloop Baxter Equation*, *Nucl.Phys.* **B827** (2010) 565, [arXiv:0908.0520].

[102] Z. Bajnok, R. A. Janik, and T. Łukowski, *Four Loop Twist Two, BFKL, Wrapping and Strings*, *Nucl.Phys.* **B816** (2009) 376, [arXiv:0811.4448].

[103] T. Łukowski, A. Rej, and V. N. Velizhanin, *Five-Loop Anomalous Dimension of Twist-Two Operators*, *Nucl.Phys.* **B831** (2010) 105, [arXiv:0912.1624].

[104] D. Bombardelli, D. Fioravanti, and R. Tateo, *Thermodynamic Bethe Ansatz for Planar AdS/CFT: a Proposal*, *J.Phys.* **A42** (2009) 375401, [arXiv:0902.3930].

[105] M. Beccaria, G. V. Dunne, V. Forini, M. Pawellek, and A. A. Tseytlin, *Exact Computation of One-Loop Correction to Energy of Spinning Folded String in $AdS_5 \times S^5$*, *J.Phys.* **A43** (2010) 165402, [arXiv:1001.4018].

[106] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1958.

[107] J.-L. Lagrange, *Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries*, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin* **24** (1770) 251 • H. H. Bürmann, *Essai de calcul fonctionnaire aux constantes ad libitum*, *Mem.Inst.Nat.Sci. Arts. Sci. Math. Phys.* **2** (1799) 13.

[108] M. Beccaria, V. Forini, and G. Macorini, *Generalized Gribov-Lipatov Reciprocity and AdS/CFT*, *Adv.High Energy Phys.* **2010** (2010) 753248, [arXiv:1002.2363].

[109] B. Basso and G. P. Korchemsky, *Anomalous Dimensions of High-Spin Operators Beyond the Leading Order*, *Nucl.Phys.* **B775** (2007) 1, [hep-th/0612247].

[110] V. N. Gribov and L. N. Lipatov, *e^+e^- Pair Annihilation and Deep Inelastic e p Scattering in Perturbation Theory*, *Sov.J.Nucl.Phys., **15** (1972) 675, Yad.Fiz., **15** (1972) 1218.*

[111] Y. L. Dokshitzer, G. Marchesini, and G. P. Salam, *Revisiting Parton Evolution and the Large-x Limit*, *Phys.Lett.* **B634** (2006) 504, [hep-ph/0511302].

[112] Y. L. Dokshitzer and G. Marchesini, *$\mathcal{N} = 4$ SUSY Yang-Mills: Three Loops made Simple(r)*, *Phys.Lett.* **B646** (2007) 189, [hep-th/0612248].

[113] M. Beccaria and V. Forini, *Reciprocity of Gauge Operators in $\mathcal{N} = 4$ SYM*, *JHEP* **06** (2008) 077, [arXiv:0803.3768] • V. Forini and M. Beccaria, *QCD-Like Properties for Anomalous Dimensions in $\mathcal{N} = 4$ SYM*, *Theor.Math.Phys.* **159** (2009) 712, [arXiv:0810.0101] • M. Beccaria, Y. L. Dokshitzer, and G. Marchesini, *Twist 3 of the $\mathfrak{sl}(2)$ Sector of $\mathcal{N} = 4$ SYM and Reciprocity Respecting Evolution*, *Phys.Lett.* **B652** (2007) 194, [arXiv:0705.2639].

[114] M. Beccaria and G. Macorini, *QCD Properties of Twist Operators in the $\mathcal{N} = 6$ Chern-Simons Theory*, *JHEP* **06** (2009) 008, [arXiv:0904.2463].

[115] N. Beisert, *The $\mathfrak{su}(2|2)$ Dynamic S-Matrix*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **12** (2008) 945, [hep-th/0511082].

[116] R. Ishizeki and M. Kruczenski, *Single Spike Solutions for Strings on S^2 and S^3*, *Phys.Rev.* **D76** (2007) 126006, [arXiv:0705.2429].

[117] A. Mosaffa and B. Safarzadeh, *Dual Spikes: New Spiky String Solutions*, *JHEP* **08** (2007) 017, [arXiv:0705.3131].

[118] H. Hayashi, K. Okamura, R. Suzuki, and B. Vicedo, *Large Winding Sector of AdS/CFT*, *JHEP* **11** (2007) 033, [arXiv:0709.4033].

[119] K. Zarembo, *Antiferromagnetic Operators in $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, *Phys.Lett.* **B634** (2006) 552, [hep-th/0512079].

[120] R. Roiban, A. Tirziu, and A. A. Tseytlin, *Slow-String Limit and 'Antiferromagnetic' State in AdS/CFT*, *Phys.Rev.* **D73** (2006) 066003, [hep-th/0601074].

[121] K. Okamura, *Giant Spinons*, *JHEP* **04** (2010) 033, [arXiv:0911.1528].

[122] M. C. Abbott and I. V. Aniceto, *Vibrating Giant Spikes and the Large-Winding Sector*, *JHEP* **06** (2008) 088, [arXiv:0803.4222].

[123] R. Ishizeki, M. Kruczenski, M. Spradlin, and A. Volovich, *Scattering of Single Spikes*, *JHEP* **02** (2008) 009, [arXiv:0710.2300].

[124] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons. An Introduction To Solitons and Instantons in Quantum Field Theory.* Elsevier, 1987.

[125] R. Jackiw and G. Woo, *Semiclassical Scattering of Quantized Nonlinear Waves*, *Phys.Rev.* **D12** (1975) 1643.

[126] M. Spradlin and A. Volovich, *Dressing the Giant Magnon*, *JHEP* **10** (2006) 012, [hep-th/0607009].

[127] G. Kälbermann, *The Sine-Gordon Wobble*, *J.Phys.* **A37** (2004) 11603, [cond-mat/0408198].

[128] L. A. Ferreira, B. Piette, and W. J. Zakrzewski, *Wobbles and other Kink-Breather Solutions of the Sine-Gordon Model*, *Phys.Rev.* **E77** (2008) 036613, [arXiv:0708.1088].

[129] G. Arutyunov, S. Frolov, and M. Zamaklar, *Finite-Size Effects from Giant Magnons*, *Nucl.Phys.* **B778** (2007) 1, [hep-th/0606126].

[130] K. Okamura and R. Suzuki, *A Perspective on Classical Strings from Complex Sine-Gordon Solitons*, *Phys.Rev.* **D75** (2007) 046001, [hep-th/0609026].

[131] T. Klose and T. McLoughlin, *Interacting Finite-Size Magnons*, *J.Phys.* **A41** (2008) 285401, [arXiv:0803.2324].

[132] C. K. R. T. Jones, R. Marangell, P. D. Miller, and R. G. Plaza, *On the Stability Analysis of Periodic sine-Gordon Traveling Waves*, *Physica D Nonlinear Phenomena* **251** (2013) 63, [arXiv:1210.0659].

[133] D. Astolfi, V. Forini, G. Grignani, and G. W. Semenoff, *Gauge Invariant Finite Size Spectrum of the Giant Magnon*, *Phys.Lett.* **B651** (2007) 329, [hep-th/0702043].

[134] J. A. Minahan and O. Ohlsson Sax, *Finite Size Effects for Giant Magnons on Physical Strings*, *Nucl.Phys.* **B801** (2008) 97, [arXiv:0801.2064].

[135] M. Lüscher, *Volume Dependence of the Energy Spectrum in Massive Quantum Field Theories. 1. Stable Particle States*, *Commun.Math.Phys.* **104** (1986) 177 • T. R. Klassen and E. Melzer, *On the Relation Between Scattering Amplitudes and Finite-Size Mass Corrections in QFT*, *Nucl.Phys.* **B362** (1991) 329.

[136] R. A. Janik and T. Łukowski, *Wrapping Interactions at Strong Coupling – the Giant Magnon*, *Phys.Rev.* **D76** (2007) 126008, [arXiv:0708.2208].

[137] M. P. Heller, R. A. Janik, and T. Łukowski, *A New Derivation of Lüscher F-term and Fluctuations Around the Giant Magnon*, *JHEP* **06** (2008) 036, [arXiv:0801.4463].

[138] N. Gromov, S. Schäfer-Nameki, and P. Vieira, *Quantum Wrapped Giant Magnon*, *Phys.Rev.* **D78** (2008) 026006, [arXiv:0801.3671].

[139] G. Papathanasiou and M. Spradlin, *Semiclassical Quantization of the Giant Magnon*, *JHEP* **06** (2007) 032, [arXiv:0704.2389] • H.-Y. Chen, N. Dorey, and R. F. Lima Matos, *Quantum Scattering of Giant Magnons*, *JHEP* **09** (2007) 106, [arXiv:0707.0668].

[140] N. Gromov, S. Schafer-Nameki, and P. Vieira, *Efficient Precision Quantization in AdS/CFT*, *JHEP* **12** (2008) 013, [arXiv:0807.4752].

[141] C. Ahn and P. Bozhilov, *Finite-Size Effects for Single Spike*, *JHEP* **07** (2008) 105, [arXiv:0806.1085].

[142] T. Fukushima, *Numerical Computation of Inverse Complete Elliptic Integrals of First and Second Kinds*, *J.Comput.Appl.Math.* **249** (2013) 37.

[143] C. Csáki and M. Reece, *Toward a Systematic Holographic QCD: A Braneless Approach*, *JHEP* **05** (2007) 062, [hep-ph/0608266].

[144] C.-S. Chu, G. Georgiou, and V. V. Khoze, *Magnons, Classical Strings and β-Deformations*, *JHEP* **11** (2006) 093, [hep-th/0606220] • N. P. Bobev and R. C. Rashkov, *Multispin Giant Magnons*, *Phys.Rev.* **D74** (2006) 046011, [hep-th/0607018].

[145] D. V. Bykov and S. Frolov, *Giant Magnons in TsT-Transformed $AdS_5 \times S^5$*, *JHEP* **07** (2008) 071, [arXiv:0805.1070].

[146] H.-Y. Chen, N. Dorey, and K. Okamura, *Dyonic Giant Magnons*, *JHEP* **09** (2006) 024, [hep-th/0605155] • Y. Hatsuda and R. Suzuki, *Finite-Size Effects for Dyonic Giant Magnons*, *Nucl.Phys.* **B800** (2008) 349, [arXiv:0801.0747].

[147] D. Gaiotto, S. Giombi, and X. Yin, *Spin Chains in $\mathcal{N} = 6$ Superconformal Chern-Simons-Matter Theory*, *JHEP* **04** (2009) 066, [arXiv:0806.4589] • G. Grignani, T. Harmark, and M. Orselli, *The $SU(2) \times SU(2)$ Sector in the String Dual of $\mathcal{N} = 6$ Superconformal Chern-Simons Theory*, *Nucl.Phys.* **B810** (2009) 115, [arXiv:0806.4959].

[148] M. Kruczenski, *Spiky Strings and Single Trace Operators in Gauge Theories*, *JHEP* **08** (2005) 014, [hep-th/0410226].

[149] M. Axenides and E. Floratos, *Euler Top Dynamics of Nambu-Goto p-Branes*, *JHEP* **03** (2007) 093, [hep-th/0608017].

[150] P. Bozhilov and R. Rashkov, *Magnon-like Dispersion Relation from M-Theory*, *Nucl.Phys.* **B768** (2007) 193–208, [hep-th/0607116].

[151] C. Ahn and P. Bozhilov, *Finite-Size Effects of Membranes on $AdS_4 \times S_7$*, *JHEP* **08** (2008) 054, [arXiv:0807.0566].

[152] W. Heisenberg, *Die "beobachtbaren Größen" in der Theorie der Elementarteilchen*, *Zeitschrift für Physik* **120** (1943) 513.

[153] P. A. M. Dirac, *An Extensible Model of the Electron*, *Proc.Roy.Soc.Lond.* **A268** (1962) 57.

[154] K. Kikkawa and M. Yamasaki, *Can the Membrane be a Unification Model?*, *Prog.Theor.Phys.* **76** (1986) 1379.

[155] B. K. Sawhill, *Non-trivial Ground State of the Closed Bosonic Membrane*, *Phys.Lett.* **B202** (1988) 505.

[156] H. Yukawa, *Quantum Theory of Nonlocal Fields. 1. Free Fields*, *Phys.Rev.* **77** (1950) 219.

[157] M. J. Duff, *Benchmarks on the Brane*, hep-th/0407175.

[158] E. Bergshoeff, *p-branes, D-branes and M-branes*, hep-th/9611099.

[159] E. Bergshoeff, E. Sezgin, and P. K. Townsend, *Properties of the Eleven-Dimensional Supermembrane Theory*, *Ann.Phys.* **185** (1988) 330.

[160] M. J. Duff, *Supermembranes*, hep-th/9611203.

[161] H. Nicolai and R. Helling, *Supermembranes and M(atrix) Theory*, hep-th/9809103.

[162] B. de Wit, *Supermembranes and Super Matrix Models*, hep-th/9902051.

[163] W. Taylor, *M(atrix) Theory: Matrix Quantum Mechanics as a Fundamental Theory*, *Rev.Mod.Phys.* **73** (2001) 419, [hep-th/0101126].

[164] J. Hoppe, *Relativistic Membranes*, *J.Phys.* **A46** (2013) 023001.

[165] P. A. Collins and R. W. Tucker, *Classical and Quantum Mechanics of Free Relativistic Membranes*, *Nucl.Phys.* **B112** (1976) 150.

[166] M. Maggiore, *Black Holes as Quantum Membranes*, *Nucl.Phys.* **B429** (1994) 205, [gr-qc/9401027].

[167] P. Demkin, *On the Stability of p-Brane*, *Class.Quant.Grav.* **12** (1995) 289, [hep-th/9412172].

[168] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*. 1963.

[169] G. Gabrielse, D. Hanneke, T. Kinoshita, M. Nio, and B. C. Odom, *New Determination of the Fine Structure Constant from the Electron g Value and QED*, *Phys.Rev.Lett.* **97** (2006) 030802.

[170] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf, *New Extended Model of Hadrons*, *Phys.Rev.* **D9** (1974) 3471 • W. A. Bardeen, M. S. Chanowitz, S. D. Drell, M. Weinstein, and T.-M. Yan, *Heavy Quarks and Strong Binding: A Field Theory of Hadron Structure*, *Phys.Rev.* **D11** (1975) 1094 • P. Hasenfratz and J. Kuti, *The Quark Bag Model*, *Phys.Rep.* **40** (1978) 75.

[171] E. Bergshoeff, E. Sezgin, and P. K. Townsend, *Supermembranes and Eleven-Dimensional Supergravity*, *Phys.Lett.* **B189** (1987) 75.

[172] A. Achúcarro, J. M. Evans, P. K. Townsend, and D. L. Wiltshire, *Super p-Branes*, *Phys.Lett.* **B198** (1987) 441.

[173] T. Damour, *Black Hole Eddy Currents*, *Phys.Rev.* **D18** (1978) 3598 • K. S. Thorne, R. H. Price, and D. A. Macdonald, *Black Holes: The Membrane Paradigm*. 1986.

[174] G. 't Hooft, *On the Quantum Structure of a Black Hole*, *Nucl.Phys.* **B256** (1985) 727 • C. F. Holzhey and F. Wilczek, *Black Holes as Elementary Particles*, *Nucl.Phys.* **B380** (1992) 447, [hep-th/9202014].

[175] M. Bordemann and J. Hoppe, *The Dynamics of Relativistic Membranes I: Reduction to 2-dimensional Fluid Dynamics*, *Phys.Lett.* **B317** (1993) 315, [hep-th/9307036] • M. Bordemann and J. Hoppe, *The Dynamics of Relativistic Membranes II: Nonlinear Waves and Covariantly Reduced Membrane Equations*, *Phys.Lett.* **B325** (1994) 359, [hep-th/9309025].

[176] E. Witten, *Magic, Mystery, and Matrix*, *Not.Amer.Math.Soc.* **45** (1998) 1124 • M. J. Duff, *The Theory Formerly known as Strings*, *Sci.Am.* **278** (1998) 64.

[177] J. H. Schwarz, *From Superstrings to M Theory*, *Phys.Rept.* **315** (1999) 107, [hep-th/9807135].

[178] P. K. Townsend, *Four Lectures on M Theory*, hep-th/9612121 • M. J. Duff, *A Layman's Guide to M-Theory*, hep-th/9805177 • P. K. Townsend, *The Story of M*, hep-th/0205309.

[179] E. Sezgin, *Topics in M-Theory*, hep-th/9809204.

[180] M. J. Duff, T. Inami, C. N. Pope, E. Sezgin, and K. S. Stelle, *Semiclassical Quantization of the Supermembrane*, *Nucl.Phys.* **B297** (1988) 515.

[181] P. K. Townsend, *The Eleven-Dimensional Supermembrane Revisited*, *Phys.Lett.* **B350** (1995) 184, [hep-th/9501068].

[182] E. Witten, *String Theory Dynamics in Various Dimensions*, *Nucl.Phys.* **B443** (1995) 85, [hep-th/9503124] • E. Witten, *Some Comments on String Dynamics*, hep-th/9507121.

[183] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, *Do We Live Inside a Domain Wall?*, *Phys.Lett.* **B125** (1983) 136.

[184] L. Randall and R. Sundrum, *A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*, *Phys.Rev.Lett.* **83** (1999) 3370, [hep-ph/9905221] • L. Randall and R. Sundrum, *An Alternative to Compactification*, *Phys.Rev.Lett.* **83** (1999) 4690, [hep-th/9906064].

[185] P. Gnadig, Z. Kunszt, P. Hasenfratz, and J. Kuti, *Dirac's Extended Electron Model*, *Ann.Phys.* **116** (1978) 380.

[186] B. de Wit, M. Lüscher, and H. Nicolai, *The Supermembrane is Unstable*, *Nucl.Phys.* **B320** (1989) 135.

[187] M. J. Duff, C. N. Pope, and E. Sezgin, *A Stable Supermembrane Vacuum with a Discrete Spectrum*, *Phys.Lett.* **B225** (1989) 319.

[188] I. Bars, *Membrane Symmetries and Anomalies*, *Nucl.Phys.* **B343** (1990) 398 • I. Bars and C. N. Pope, *Anomalies in Super p-branes*, *Class.Quant.Grav.* **5** (1988) 1157.

[189] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Oxford University Press, 2002.

[190] M. J. Duff, *Supermembranes: The First Fifteen Weeks*, *Class.Quant.Grav.* **5** (1988) 189.

[191] H. Luckock and I. Moss, *The Quantum Geometry of Random Surfaces and Spinning Membranes*, *Class.Quant.Grav.* **6** (1989) 1993.

[192] M. P. Blencowe and M. J. Duff, *Supersingletons*, *Phys.Lett.* **B203** (1988) 229.

[193] K. Furuta, T. Inami, and M. Yamamoto, *Topics in Nonlinear Sigma Models in* $D = 3$, *PoS* **unesp2002** (2002) unesp2002/018, [hep-th/0211129].

[194] J. Hoppe, *Quantum Theory of a Massless Relativistic Surface and a Two-Dimensional Bound State Problem*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1982.

[195] E. G. Floratos, J. Iliopoulos, and G. Tiktopoulos, *A Note on* $SU(\infty)$ *Classical Yang-Mills Theories*, *Phys.Lett.* **B217** (1989) 285.

[196] M. Bordemann, E. Meinrenken, and M. Schlichenmaier, *Toeplitz Quantization of Kähler Manifolds and* $gl(N)$, $N \to \infty$ *Limits*, *Commun.Math.Phys.* **165** (1994) 281, [hep-th/9309134].

[197] B. Biran, E. G. Floratos, and G. K. Savvidy, *The Self-Dual Closed Bosonic Membranes*, *Phys.Lett.* **B198** (1987) 329 • E. G. Floratos and G. K. Leontaris, *Integrability of the Self-Dual Membranes in* $(4+1)$ *Dimensions and the Toda Lattice*, *Phys.Lett.* **B223** (1989) 153.

[198] E. Nikolaevsky and L. Shur, *Nonintegrability of the Classical Yang-Mills Fields*, *JETP Lett.* **36** (1982) 218.

[199] A. V. Belitsky, V. M. Braun, A. S. Gorsky, and G. P. Korchemsky, *Integrability in QCD and Beyond*, *Int.J.Mod.Phys.* **A19** (2004) 4715, [hep-th/0407232].

[200] J. Hoppe, *Membranes and Integrable Systems*, *Phys.Lett.* **B250** (1990) 44.

[201] P. Bozhilov, *Neumann and Neumann-Rosochatius Integrable Systems from Membranes on* $AdS_4 \times S^7$, *JHEP* **08** (2007) 073, [arXiv:0704.3082] • P. Bozhilov, *Spin Chain from Membrane and the Neumann-Rosochatius Integrable System*, *Phys.Rev.* **D76** (2007) 106003, [arXiv:0706.1443] • P. Bozhilov, *Integrable Systems from Membranes on* $AdS_4 \times S^7$, *Fortsch.Phys.* **56** (2008) 373, [arXiv:0711.1524].

[202] E. Bergshoeff, E. Sezgin, and Y. Tanii, *A Quantum Consistent Supermembrane Theory*, *Trieste Preprint, IC/88/5* (1988).

[203] E. Bergshoeff, M. J. Duff, C. N. Pope, and E. Sezgin, *Supersymmetric Supermembrane Vacua and Singletons*, *Phys.Lett.* **B199** (1987) 69 • E. Bergshoeff, M. J. Duff, C. N. Pope, and E. Sezgin, *Compactifications of the Eleven-Dimensional Supermembrane*, *Phys.Lett.* **B224** (1989) 71.

[204] E. Bergshoeff, A. Salam, E. Sezgin, and Y. Tanii, *Singletons, Higher Spin Massless States And The Supermembrane*, *Phys.Lett.* **B205** (1988) 237 • E. Bergshoeff, A. Salam, E. Sezgin, and Y. Tanii, $\mathcal{N}=8$ *Supersingleton Quantum Field Theory*, *Nucl.Phys.* **B305** (1988) 497.

[205] E. Sezgin and P. Sundell, *Massless Higher Spins and Holography*, *Nucl.Phys.* ***B644*** *(2002) 303, Erratum-ibid.* ***B660*** *(2003) 403* [hep-th/0205131].

[206] J. Hoppe, *Curved Space (Matrix) Membranes*, *Gen.Rel.Grav.* **43** (2011) 2523, [arXiv:0912.4717].

[207] P. S. Howe and R. W. Tucker, *A Locally Supersymmetric and Reparametrization Invariant Action for a Spinning Membrane*, *J.Phys.* **A10** (1977) L155.

[208] M. J. Duff, R. R. Khuri, and J. X. Lu, *String Solitons*, *Phys.Rept.* **259** (1995) 213, [hep-th/9412184].

[209] G. K. Savvidy, *The Light-Cone Gauge in the Theory of Relativistic Surfaces*, *Yerevan Physics Institute Preprint 982 (22) 87* (1987).

[210] E. Bergshoeff, E. Sezgin, Y. Tanii, and P. K. Townsend, *Super p-Branes as Gauge Theories of Volume Preserving Diffeomorphisms*, *Annals Phys.* **199** (1990) 340.

[211] M. Axenides and E. Floratos, *Nambu-Lie 3-Algebras on Fuzzy 3-Manifolds*, *JHEP* **02** (2009) 039, [arXiv:0809.3493].

[212] E. Cremmer and S. Ferrara, *Formulation of Eleven-Dimensional Supergravity in Superspace*, *Phys.Lett.* **B91** (1980) 61 • L. Brink and P. S. Howe, *Eleven-Dimensional Supergravity on the Mass-Shell in Superspace*, *Phys.Lett.* **B91** (1980) 384.

[213] G. Dall'Agata, D. Fabbri, C. Fraser, P. Fré, P. Termonia, and M. Trigiante, *The Osp*$(8|4)$ *singleton action from the supermembrane*, *Nucl.Phys.* **B542** (1999) 157, [hep-th/9807115] • B. de Wit, K. Peeters, J. Plefka, and A. Sevrin, *The M-Theory Two-Brane in* $AdS_4 \times S^7$ *and* $AdS_7 \times S^4$, *Phys.Lett.* **B443** (1998) 153, [hep-th/9808052] • P. Claus, *Super M-brane Actions in* $AdS_4 \times S^7$ *and* $AdS_7 \times S^4$, *Phys.Rev.* **D59** (1999) 066003, [hep-th/9809045] • P. Pasti, D. Sorokin, and M. Tonin, *On Gauge-Fixed Superbrane Actions in AdS Superbackgrounds*, *Phys.Lett.* **B447** (1999) 251, [hep-th/9809213].

[214] E. Cremmer, B. Julia, and J. Scherk, *Supergravity Theory in Eleven-Dimensions*, *Phys.Lett.* **B76** (1978) 409.

[215] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology.* Cambridge University Press, 1987 • D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, *Supergravity.* Cambridge University Press, 2012.

[216] B. de Wit, J. Hoppe, and H. Nicolai, *On the Quantum Mechanics of Supermembranes*, *Nucl.Phys.* **B305** (1988) 545.

[217] D. B. Fairlie, P. Fletcher, and C. K. Zachos, *Trigonometric Structure Constants for New Infinite Algebras*, *Phys.Lett.* **B218** (1989) 203 • E. G. Floratos, *The Heisenberg-Weyl Group on the* $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ *Discretized Torus Membrane*, *Phys.Lett.* **B228** (1989) 335 • D. B. Fairlie and C. K. Zachos, *Infinite Dimensional Algebras, Sine Brackets and SU(Infinity)*, *Phys.Lett.* **B224** (1989) 101.

[218] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker, and L. Susskind, *M Theory as a Matrix Model: A Conjecture*, *Phys.Rev.* **D55** (1997) 5112, [hep-th/9610043].

[219] L. Susskind, *Another Conjecture about M(atrix) Theory*, hep-th/9704080 • N. Seiberg, *Why is the Matrix Model Correct?*, *Phys.Rev.Lett.* **79** (1997) 3577, [hep-th/9710009] • A. Sen, *D0-branes on* T^n *and Matrix Theory*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 51, [hep-th/9709220].

[220] O. Aharony, M. Berkooz, S. Kachru, N. Seiberg, and E. Silverstein, *Matrix Description of Interacting Theories in Six Dimensions*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **1** (1998) 148, [hep-th/9707079] • O. Aharony, M. Berkooz, and N. Seiberg, *Light-Cone Description of* $(2,0)$ *Superconformal Theories in Six Dimensions*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 119, [hep-th/9712117].

[221] W. Taylor and M. Van Raamsdonk, *Multiple D0-Branes in Weakly Curved Backgrounds*, *Nucl.Phys.* **B558** (1999) 63, [hep-th/9904095].

[222] K. Dasgupta, M. M. Sheikh-Jabbari, and M. Van Raamsdonk, *Matrix Perturbation Theory for M-Theory on a pp-Wave*, *JHEP* **05** (2002) 56, [hep-th/0205185].

[223] M. J. Duff, P. S. Howe, T. Inami, and K. S. Stelle, *Superstrings in* $D = 10$ *from Supermembranes in* $D = 11$, *Phys.Lett.* **B191** (1987) 70.

[224] G. Arutyunov and S. Frolov, *Superstrings on* $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ *as a Coset Sigma-Model*, *JHEP* **09** (2008) 129, [arXiv:0806.4940] • J. Gomis, D. Sorokin, and L. Wulff, *The Complete* $AdS_4 \times CP^3$ *Superspace for the Type IIA Superstring and D-Branes*, *JHEP* **03** (2009) 015, [arXiv:0811.1566] • D. V. Uvarov, $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ *Superstring in the Light-Cone Gauge*, *Nucl.Phys.* **B826** (2010) 294, [arXiv:0906.4699].

[225] S. Frolov and A. A. Tseytlin, *Multi-Spin String Solutions in* $AdS_5 \times S^5$, *Nucl.Phys.* **B668** (2003) 77, [hep-th/0304255].

[226] S. Frolov and A. A. Tseytlin, *Quantizing Three-Spin String Solution in $AdS_5 \times S^5$*, *JHEP* **07** (2003) 016, [hep-th/0306130].

[227] A. Tirziu and A. A. Tseytlin, *Semiclassical Rigid Strings with Two Spins in AdS_5*, *Phys.Rev.* **D81** (2010) 026006, [arXiv:0911.2417].

[228] A. Khan and A. L. Larsen, *Improved Stability for Pulsating Multi-Spin String Solitons*, *Int.J.Mod.Phys.* **A21** (2006) 133, [hep-th/0502063].

[229] B. Stefański Jr., *Open Spinning Strings*, *JHEP* **03** (2004) 057, [hep-th/0312091].

[230] J. Maldacena and H. Ooguri, *Strings in AdS_3 and the $SL(2,\mathbb{R})$ WZW Model. Part 1: The Spectrum*, *J.Math.Phys.* **42** (2001) 2929, [hep-th/0001053] • C. Bachas, M. R. Douglas, and C. Schweigert, *Flux Stabilization of D-branes*, *JHEP* **05** (2000) 048, [hep-th/0003037].

[231] S. Frolov and A. A. Tseytlin, *Rotating String Solutions: AdS/CFT Duality in Non-Supersymmetric Sectors*, *Phys.Lett.* **B570** (2003) 96, [hep-th/0306143] • N. Beisert, J. A. Minahan, M. Staudacher, and K. Zarembo, *Stringing Spins and Spinning Strings*, *JHEP* **09** (2003) 010, [hep-th/0306139].

[232] S. Frolov, A. Tirziu, and A. A. Tseytlin, *Logarithmic Corrections to Higher Twist Scaling at Strong Coupling from AdS/CFT*, *Nucl.Phys.* **B766** (2007) 232, [hep-th/0611269].

[233] C. O. Lousto, *The Energy Spectrum of the Membrane Effective Model for Quantum Black Holes*, *Phys.Lett.* **B352** (1995) 228 • A. L. Larsen and C. O. Lousto, *On the Stability of Spherical Membranes in Curved Spacetimes*, *Nucl.Phys.* **B472** (1996) 361, [gr-qc/9602009] • A. L. Larsen and C. O. Lousto, *Are Higher Order Membranes Stable in Black Hole Spacetimes?*, *Phys.Rev.* **D55** (1997) 7936, [gr-qc/9610051] • T. Harmark and K. G. Savvidy, *Ramond-Ramond Field Radiation from Rotating Ellipsoidal Membranes*, *Nucl.Phys.* **B585** (2000) 567, [hep-th/0002157] • K. G. Savvidy and G. K. Savvidy, *Stability of the Rotating Ellipsoidal D0-Brane System*, *Phys.Lett.* **B501** (2001) 283, [hep-th/0009029] • M. Axenides, E. G. Floratos, and L. Perivolaropoulos, *Metastability of Spherical Membranes in Supermembrane and Matrix Theory*, *JHEP* **11** (2000) 020, [hep-th/0007198] • M. Axenides, E. G. Floratos, and L. Perivolaropoulos, *Quadrupole Instabilities of Relativistic Rotating Membranes*, *Phys.Rev.* **D64** (2001) 107901, [hep-th/0105292] • G. K. Savvidy, *D0-Branes with Non-Zero Angular Momentum*, hep-th/0108233 • M. Axenides, E. G. Floratos, and L. Perivolaropoulos, *Rotating Toroidal Branes in Supermembrane and Matrix Theory*, *Phys.Rev.* **D66** (2002) 085006, [hep-th/0206116].

[234] M. G. Lamé, *Memoire sur les surfaces isothermes dans les corps homogènes en équilibre de température*, *Journal de mathématiques pures et appliquées* **2** (1837) 147.

[235] A. V. Turbiner, *Quasi-Exactly-Solvable Problems and $sl(2)$ Algebra*, *Commun.Math.Phys.* **118** (1988) 467 • A. G. Ushveridze, *Quasi-Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics*. Taylor & Francis Group, New York, 1994.

[236] Y. Alhassid, F. Gürsey, and F. Iachello, *Potential Scattering, Transfer Matrix, and Group Theory*, *Phys.Rev.Lett.* **50** (1983) 873.

[237] H. Li and D. Kusnezov, *Group Theory Approach to Band Structure: Scarf and Lamé Hamiltonians*, *Phys.Rev.Lett.* **83** (1999) 1283, [cond-mat/9907202] • H. Li, D. Kusnezov, and F. Iachello, *Group Theoretical Properties and Band Structure of the Lamé Hamiltonian*, *J.Phys.* **A33** (2000) 6413, [solv-int/9912006] • F. Finkel, A. González-López, and M. A. Rodríguez, *A New Algebraization of the Lamé Equation*, *J.Phys.* **A33** (2000) 1519,

[math-ph/9908002] • R. S. Maier, *Lamé Polynomials, Hyperelliptic Reductions and Lamé Band Structure*, *Philos.Trans.Roy.Soc.London* **A366** (2008) 1115, [math-ph/0309005].

[238] B. Sutherland, *Some Exact Results for One-Dimensional Models of Solids*, *Phys.Rev.* **A8** (1973) 2514.

[239] L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky, *Reheating after Inflation*, *Phys.Rev.Lett.* **73** (1994) 3195, [hep-th/9405187] • D. Boyanovsky, H. J. de Vega, R. Holman, and J. F. J. Salgado, *Analytic and Numerical Study of Preheating Dynamics*, *Phys.Rev.* **D54** (1996) 7570, [hep-ph/9608205] • P. B. Greene, L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky, *Structure of Resonance in Preheating after Inflation*, *Phys.Rev.* **D56** (1997) 6175, [hep-ph/9705347].

[240] N. S. Manton and T. M. Samols, *Sphalerons on a Circle*, *Phys.Lett.* **B207** (1988) 179 • J.-Q. Liang, H. J. W. Müller-Kirsten, and D. H. Tchrakian, *Solitons, Bounces and Sphalerons on a Circle*, *Phys.Lett.* **B282** (1992) 105 • Y. Brihaye, S. Giller, P. Kosinski, and J. Kunz, *Sphalerons and Normal Modes in the (1 + 1)-Dimensional Abelian Higgs Model on the Circle*, *Phys.Lett.* **B293** (1992) 383 • S. Braibant and Y. Brihaye, *Quasi-Exactly-Solvable System and Sphaleron Stability*, *J.Math.Phys.* **34** (1993) 2107.

[241] R. S. Ward, *The Nahm Equations, Finite-Gap Potentials and Lamé Functions*, *J.Phys.* **A28** (1987) 2679 • P. M. Sutcliffe, *Symmetric Monopoles and Finite-Gap Lamé Potentials*, *J.Phys.* **A29** (1996) 5187.

[242] G. Dunne and J. Feinberg, *Self-Isospectral Periodic Potentials and Supersymmetric Quantum Mechanics*, *Phys.Rev.* **D57** (1998) 1271, [hep-th/9706012] • G. Dunne and J. Mannix, *Supersymmetry Breaking with Periodic Potentials*, *Phys.Lett.* **B428** (1998) 115, [hep-th/9710115] • A. Khare and U. Sukhatme, *New Solvable and Quasi Exactly Solvable Periodic Potentials*, *J.Math.Phys.* **40** (1999) 5473, [quant-ph/9906044] • F. Correa and M. S. Plyushchay, *Peculiarities of the Hidden Nonlinear Supersymmetry of Pöschl-Teller System in the Light of Lamé Equation*, *J.Phys.* **A40** (2007) 14403, [arXiv:0706.1114].

[243] E. G. Floratos and S. Nicolis, *An SU(2) Analog of the Azbel-Hofstadter Hamiltonian*, *J.Phys.* **A31** (1998) 3961, [hep-th/9508111] • I. Bakas, A. Brandhuber, and K. Sfetsos, *Domain Walls of Gauged Supergravity, M-branes, and Algebraic Curves*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **3** (1999) 1657, [hep-th/9912132] • I. Bakas, A. Brandhuber, and K. Sfetsos, *Riemann Surfaces and Schrödinger Potentials of Gauged Supergravity*, hep-th/0002092.

[244] G. V. Dunne, *Perturbative–Nonperturbative Connection in Quantum Mechanics and Field Theory*, hep-th/0207046 • G. V. Dunne and M. Shifman, *Duality and Self-Duality (Energy Reflection Symmetry) of Quasi-Exactly Solvable Periodic Potentials*, *Ann.Phys.* **299** (2002) 143, [hep-th/0204224].

[245] S. A. Hartnoll and C. Nuñez, *Rotating Membranes on G_2 Manifolds, Logarithmic Anomalous Dimensions and $N = 1$ Duality*, *JHEP* **02** (2003) 049, [hep-th/0210218].

[246] J. Brugues, J. Rojo, and J. G. Russo, *Non-Perturbative States in Type II Superstring Theory from Classical Spinning Membranes*, *Nucl.Phys.* **B710** (2005) 117, [hep-th/0408174].

[247] D. Kamani, *Strings in the pp-Wave Background from Membrane*, *Phys.Lett.* **B580** (2004) 257, [hep-th/0301003] • D. Kamani, *PP-Wave Strings from Membrane and from String in the Spacetime with two time Directions*, *Phys.Lett.* **B564** (2003) 123, [hep-th/0304236] • S. Gangopadhyay, *Strings in pp-Wave Background and Background B-field from Membrane and its Symplectic Quantization*, *Phys.Lett.* **B659** (2008) 399, [arXiv:0711.0421].

[248] M. Beccaria and V. Forini, *Four Loop Reciprocity of Twist Two Operators in $\mathcal{N}=4$ SYM*, *JHEP* **03** (2009) 111, [arXiv:0901.1256].

[249] B. S. Acharya, *On Realising $N=1$ Super Yang-Mills in M-Theory*, hep-th/0011089 • M. Atiyah, J. Maldacena, and C. Vafa, *An M-theory Flop as a Large N Duality*, *J.Math.Phys.* **42** (2001) 3209, [hep-th/0011256] • M. Atiyah and E. Witten, *M-Theory Dynamics on a Manifold of G_2 Holonomy*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **6** (2003) 1, [hep-th/0107177] • M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü, and C. N. Pope, *Supersymmetric M3-Branes and G_2 Manifolds*, *Nucl.Phys.* **B620** (2002) 3, [hep-th/0106026] • S. Gukov, *M-theory on Manifolds with Exceptional Holonomy*, *Fortschr.Phys.* **51** (2003) 719.

[250] A. V. Belitsky, S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky, and A. N. Manashov, *Dilatation Operator in (Super-) Yang-Mills Theories on the Light-Cone*, *Nucl.Phys.* **B708** (2005) 115, [hep-th/0409120].

[251] N. Gromov and G. Sizov, *Exact Slope and Interpolating Functions in $\mathcal{N}=6$ Supersymmetric Chern-Simons Theory*, *Phys.Rev.Lett.* **113** (2014), no. **12** 121601, [arXiv:1403.1894].

[252] E. Pomoni, *Integrability in $\mathcal{N}=2$ Superconformal Gauge Theories*, *Nucl.Phys.* **B893** (2015) 21, [arXiv:1310.5709].

[253] R. Kallosh and J. Rahmfeld, *The GS String Action on $AdS_5 \times S^5$*, *Phys.Lett.* **B443** (1998) 143, [hep-th/9808038] • R. Kallosh, J. Rahmfeld, and A. Rajaraman, *Near Horizon Superspace*, *JHEP* **09** (1998) 002, [hep-th/9805217] • R. Kallosh and A. A. Tseytlin, *Simplifying Superstring Action on $AdS_5 \times S^5$*, *JHEP* **10** (1998) 016, [hep-th/9808088] • N. Drukker, D. J. Gross, and A. A. Tseytlin, *Green-Schwarz String in $AdS_5 \times S^5$: Semiclassical Partition Function*, *JHEP* **04** (2000) 021, [hep-th/0001204] • A. A. Tseytlin, *"Long" Quantum Superstrings in $AdS_5 \times S^5$*, hep-th/0008107.

[254] I. Bengtsson, *Anti-de Sitter Space*, http://www.physto.se/ ingemar/ (1998).

[255] G. Ellis and S. Hawking, *The Large Scale Structure of Spacetime.* Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

[256] S. M. Weinberg, *Gravitation and Cosmology. Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* John Wiley and Sons, New York, 1972.

[257] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and some of their Applications.* Dover, New York, 2005.

[258] C. Bachas and M. Petropoulos, *Anti-de Sitter D-branes*, *JHEP* **02** (2001) 025, [hep-th/0012234].

[259] L. Susskind and E. Witten, *The Holographic Bound in Anti-de Sitter Space*, hep-th/9805114.

[260] E. Álvarez, C. Gómez, and T. Ortín, *String Representation of Wilson Loops*, *Nucl.Phys.* **B545** (1999) 217, [hep-th/9806075] • G. W. Gibbons, *Wrapping Branes in Space and Time*, hep-th/9803206 • G. W. Gibbons, *Anti-de Sitter Spacetime and its Uses*, arXiv:1110.1206.

[261] I. R. Klebanov and J. M. Maldacena, *Solving Quantum Field Theories via Curved Spacetimes*, Phys.Today, 62(1), 28 (January, 2009).

[262] C. A. Bayona and N. R. F. Braga, *Anti-de Sitter Boundary in Poincaré Coordinates*, *Gen.Rel.Grav.* **39** (2007) 1367, [hep-th/0512182].

[263] S. W. Hawking and D. N. Page, *Thermodynamics of Black Holes in Anti-de Sitter Space*, *Commun.Math.Phys.* **87** (1983) 577.

[264] I. Bakas and G. Pastras, *Entanglement Entropy and Duality in AdS(4)*, arXiv:1503.0062.

[265] M. Axenides, E. G. Floratos, and S. Nicolis, *Modular Discretization of the AdS_2/CFT_1 Holography*, *JHEP* **02** (2014) 109, [arXiv:1306.5670].

[266] J. M. Figueroa-O'Farrill and G. Papadopoulos, *Maximally Supersymmetric Solutions of Ten-dimensional and Eleven-dimensional Supergravities*, *JHEP* **03** (2003) 048, [hep-th/0211089].

[267] R. Penrose, *Any Space-Time has a Plane Wave as a Limit*, in *Differential Geometry and Relativity. A Volume in Honour of André Lichnerowicz on his 60th Birthday* (M. Cahen and M. Flato, eds.), vol. 3 of *Mathematical Physics and Applied Mathematics*, p. 271, Springer Netherlands, 1976.

[268] R. Güven, *Plane Wave Limits and T-Duality*, *Phys.Lett.* **B482** (2000) 255, [hep-th/0005061].

[269] M. Alishahiha and M. M. Sheikh-Jabbari, *The pp-Wave Limits of Orbifolded $AdS_5 \times S^5$*, *Phys.Lett.* **B535** (2002) 328, [hep-th/0203018] • E. Floratos and A. Kehagias, *Penrose Limits of Orbifolds and Orientifolds*, *JHEP* **07** (2002) 031, [hep-th/0203134].

[270] P. G. O. Freund and M. A. Rubin, *Dynamics of Dimensional Reduction*, *Phys.Lett.* **B97** (1980) 233.

[271] K. Pilch, P. van Nieuwenhuizen, and P. K. Townsend, *Compactification of $d = 11$ Supergravity on S^4 (or 11 = 7 + 4, too)*, *Nucl.Phys.* **B242** (1984) 377.

[272] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark, eds., *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[273] P. F. Byrd and M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*. Springer-Verlag, 1971.

[274] B. C. Carlson, *Numerical Computation of Real or Complex Elliptic Integrals*, *Numerical Algorithms* **10** (march, 1995) 13, [math/9409].

[275] J. H. Lambert, *Observations variae in mathesin puram*, *Acta Helvitica, physico-mathematico-anatomico-botanico-medica* **3** (1758) 128.

[276] L. Euler, *De serie Lambertina plurimisque eius insignibus proprietatibus*, *Acta Acad.Scient.Petropol.* **2** (1779, 1783) 29–51. http://www.math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E532.pdf.

[277] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth, *On the Lambert W Function*, *Adv.Comput.Math.* **5** (1996) 329.

[278] B. Hayes, *Why W?*, *American Scientist* **93** (2005) 104.

[279] D. Kalman, *A Generalized Logarithm for Exponential-Linear Equations*, *The College Mathematics Journal* (January, 2001) • R. M. Corless and D. J. Jeffrey, *Artificial Intelligence, Automated Reasoning, and Symbolic Computation*, ch. The Wright ω Function, p. 76. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2002.

[280] I. N. Galidakis, *On an Application of Lambert's W Function to Infinite Exponentials*, *Complex Variables. Theory and Applications* **49** (2006) 759.

[281] T. C. Scott and R. B. Mann, *General Relativity and Quantum Mechanics: Towards a Generalization of the Lambert W Function*, math-ph/0607011 • D. Veberič, *Lambert W Function for Applications in Physics*, *Comput.Phys.Commun.* **183** (2012) 2622, [arXiv:1209.0735].

[282] S. Valluri, D. Jeffrey, and R. Corless, *Some Applications of the Lambert W Function to Physics*, *Can.J.Phys.* **78** (2000) 823.

[283] T. C. Scott, J. F. Babb, A. Dalgarno, and J. D. Morgan, *The Calculation of Exchange Forces: General Results and Specific Models*, *J.Chem.Phys.* **99** (1993) 2481.

[284] R. B. Mann and T. Ohta, *Exact Solution for the Metric and the Motion of Two Bodies in (1+1)-Dimensional Gravity*, *Phys.Rev.* **D55** (1997) 4723, [gr-qc/9611008].

[285] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, New York, 1999.

[286] H. Sonoda, *Analytic Form of the Effective Potential in the Large N Limit of a Real Scalar Theory in Four Dimensions*, arXiv:1302.6059 • H. Sonoda, *Solving Renormalization Group Equations with the Lambert W Function*, *Phys.Rev.* **D87** (2013) 085023, [arXiv:1302.6069].

[287] N. N. Khuri and H. C. Ren, *Explicit Solutions for the Running Coupling Constant and the Separatrix of Quantum Field Theories*, *Ann.Phys.* **189** (1989) 142 • T. Appelquist, A. Ratnaweera, J. Terning, and L. C. R. Wijewardhana, *The Phase Structure of an $SU(N)$ Gauge Theory with N_f Flavors*, *Phys.Rev.* **D58** (1998) 105017, [hep-ph/9806472] • B. A. Magradze, *The Gluon Propagator in Analytic Perturbation Theory*, in *10th International Seminar Quarks '98*, vol. **1**, p. 158, 1999. hep-ph/9808247 • B. A. Magradze, *Analytic Approach to Perturbative QCD*, *Int.J.Mod.Phys.* **A15** (2000) 2715, [hep-ph/9911456].

[288] E. Gardi, G. Grunberg, and M. Karliner, *Can the QCD Running Coupling Have a Causal Analyticity Structure?*, *JHEP* **07** (1998) 007, [hep-ph/9806462].

[289] A. V. Nesterenko, *Analytic Invariant Charge in QCD*, *Int.J.Mod.Phys.* **A18** (2003) 5475, [hep-ph/0308288] • T. L. Curtright and C. K. Zachos, *Renormalization Group Functional Equations*, *Phys.Rev.* **D83** (2011) 065019, [arXiv:1010.5174].

[290] L. Comtet, *Advanced Combinatorics*. Reidel, 1974.

[291] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*. Bateman Manuscript Project, California Insitute of Technology. McGraw-Hill, New York, 1955.

[292] W. Magnus and S. Winkler, *Hill's Equation*. Dover, New York, 2004.

Περιστρεφόμενα Εκτεταμένα Αντικείμενα και Αντιστοιχία AdS/CFT

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΛΙΝΑΡΔΟΠΟΥΛΟΣ

Τμήμα Φυσικής,

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

και

Ινστιτούτο Πυρηνικής και Σωματιδιακής Φυσικής

Εθνικό Κέντρο Έρευνας Φυσικών Επιστημών «Δημόκριτος»

Διδακτορική Διατριβή υποβληθείσα

στο

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ιούνιος 2015

Επιτροπη Διδακτορικου

Επιβλεπων

Εμμανουήλ Φλωράτος
Ομότ. Καθηγητής, Ε.Κ.Π.Α.

Συνεπιβλεπων

Μίνως Αξενίδης
Διευθ. Ερευνών, Ε.Κ.Ε.Φ.Ε. «Δημόκριτος»

Μελος Τριμελους Επιτροπης

Νικόλαος Τετράδης
Καθηγητής, Ε.Κ.Π.Α.

Μελη Επταμελους Επιτροπης

Γεώργιος Διαμάντης
Αναπλ. Καθηγητής, Ε.Κ.Π.Α.

Αθανάσιος Λαχανάς
Ομότ. Καθηγητής, Ε.Κ.Π.Α.

Ιωάννης Μπάκας
Καθηγητής, Ε.Μ.Π.

Κωνσταντίνος Σφέτσος
Καθηγητής, Ε.Κ.Π.Α.

Αφιερώνεται

στους γονείς μου

Ευχαριστίες

Η παρούσα διδακτορική διατριβή βασίζεται σε ερευνητική δουλειά που έλαβε χώρα κατά τα έτη 2012–2015 στο Ινστιτούτο Πυρηνικής & Σωματιδιακής Φυσικής του Εθνικού Κέντρου Έρευνας Φυσικών Επιστημών «Δημόκριτος» και στον Τομέα Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων του Τμήματος Φυσικής του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Είχα την τύχη να έχω τους καθηγητές Εμμανουήλ Φλωράτο (κύριος επιβλέπων), Μίνω Αξενίδη (συνεπιβλέπων) και Νικόλαο Τετράδη στην τριμελή επιτροπή επίβλεψης του διδακτορικού μου. Θα ήθελα να τους ευχαριστήσω για τη θαυμάσια συνεργασία, τη βοήθεια και την καθοδήγησή τους.

Αισθάνομαι βαθύτατα ευγνώμων προς το δάσκαλό μου, Εμμανουήλ Φλωράτο, για όλα όσα μου έμαθε. Μου είναι εξαιρετικά δύσκολο να φανταστώ κάποιον καλύτερο και ευγενέστερο επιβλέποντα. Τον ευχαριστώ για τις συμβουλές του, τη γενναιοδωρία και την αγάπη του. Είμαι βαθύτατα υποχρεωμένος προς τον Μίνω Αξενίδη για όλη την υποστήριξη, την ενθάρρυνση, τη βοήθεια, τις συμβουλές και το χρόνο που μου αφιέρωσε. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Νικόλαο Τετράδη, που ήταν πάντοτε διαθέσιμος να με βοηθήσει και να με συμβουλέψει.

Θα ήθελα επίσης να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου και στα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς διδακτορικής επιτροπής, καθηγητές Γεώργιο Διαμάντη, Αθανάσιο Λαχανά, Ιωάννη Μπάκα και Κωνσταντίνο Σφέτσο. Κατά τη διάρκεια του διδακτορικού, η έρευνά μου στο Ε.ΚΕ.Φ.Ε. «Δημόκριτος» έτυχε οικονομικής υποστήριξης από τη Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας (Γ.Γ.Ε.Τ.) και το Ευρωπαϊκό Ταμείο Περιφερειακής Ανάπτυξης (Ε.Τ.Π.Α.) MIS-448332-ΟΡΑΣΥ (ΕΣΠΑ 2007–13 ΔΡΑΣΗ, «ΚΡΗΠΙΣ»).

Ευχαριστώ θερμά τον Δρ. Γεώργιο Γεωργίου, ο οποίος υπήρξε ο στενότερος συνεργάτης μου και φίλος στη διάρκεια του διδακτορικού και συνέβαλε ιδιαίτερα στην ολοκλήρωσή του. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Σταμάτιο Νίκολη για τις συναρπαστικές συζητήσεις μας και την ενθάρρυνσή του.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της οικογένειάς μου και ιδιαίτερα τους γονείς μου, στους οποίους και αφιερώνω αυτή τη διδακτορική διατριβή.

Πρόλογος

Η παρούσα διδακτορική διατριβή στηρίζεται στις εργασίες [1, 2, 3, 4]:

- G. Linardopoulos, *Large-Spin Expansions of Giant Magnons*, [arXiv:1502.01630]. To appear in Proceedings of Science, PoS (CORFU2014) 154.

- E. Floratos, G. Linardopoulos, *Large-Spin and Large-Winding Expansions of Giant Magnons and Single Spikes*, Nucl.Phys. **B897** (2015) 229, [arXiv:1406.0796].

- E. Floratos, G. Georgiou, G. Linardopoulos, *Large-Spin Expansions of GKP Strings*, JHEP **03** (2014) 018, [arXiv:1311.5800].

- M. Axenides, E. Floratos, G. Linardopoulos, *Stringy Membranes in AdS/CFT*, JHEP **08** (2013) 089, [arXiv:1306.0220],

καθώς επίσης και στις ακόλουθες ομιλίες:

- *Large-Spin Expansions of Giant Magnons.* Workshop on Quantum Fields and Strings. 14th Hellenic School and Workshops on Elementary Particle Physics & Gravity. Corfu Summer Institute, 17/09/2014, [http://www.physics.ntua.gr/corfu2014/lectures.html]

- *Dispersion Relation of GKP Strings.* Summer School on String Theory and Holography & Mathematica Summer School on Theoretical Physics, 6th Edition. Departamento de Física e Astronomia of Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP), 24/07/2014, [http://msstp.org/?q=node/294]

- *Stringy Membranes in AdS/CFT.* "Holography 2013: Gauge/Gravity Duality and Strongly Correlated Systems". Pohang, S. Korea, June 13 – 22. APCTP, POSTECH, 15/06/2013, [https://www.apctp.org/plan.php/holography2013/660]

- *Rotating Strings and Membranes in AdS/CFT.* "Foundations of Quantum Mechanics and Relativistic Spacetime". Annual workshop of Working Group 3, "Quantum Theory Meets Relativity", of the COST Action MP1006, "Fundamental Problems in Quantum Physics". National & Kapodistrian University of Athens, 26/09/2012, [http://www.pwallden.gr/foundations.asp].

Η έρευνα του συγγραφέως στο Ε.Κ.Ε.Φ.Ε. «Δημόκριτος» υποστηρίχθηκε οικονομικά από τη Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας (Γ.Γ.Ε.Τ.) και από το Ευρωπαϊκό Ταμείο Περιφερειακής Ανάπτυξης (Ε.Τ.Π.Α.) MIS-448332-ΟΡΑΣΥ (ΕΣΠΑ 2007–13, ΔΡΑΣΗ «ΚΡΗΠΙΣ»).

η περιφέρεια στο επίκεντρο της ανάπτυξης

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης - Ευρωπαϊκό Ταμείο Περιφερειακής Ανάπτυξης (ΕΤΠΑ), στο πλαίσιο του Ε.Π. Ανταγωνιστικότητα και Επιχειρηματικότητα (ΕΠΑΝ ΙΙ) και των Π.Ε.Π. Αττικής, Π.Ε.Π. Μακεδονίας - Θράκης

Περίληψη

Στην ισχυρότερη εκδοχή της, η εικασία AdS/CFT αναφέρει ότι η $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N_c)$ super Yang-Mills (SYM) θεωρία είναι ίση με τη θεωρία υπερχορδών τύπου IIB, στο χώρο $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. Είναι μακράν από τις σημαντικότερες εξισώσεις θεωρητικής φυσικής της εποχής μας, ένα είδος «αρμονικού ταλαντωτή» τόσο για την κβαντική θεωρία της βαρύτητας, όσο και για τις θεωρίες βαθμίδας. Ως εκ τούτου, είναι επιτακτική η ανάγκη να κατανοηθούν πλήρως τα όρια ισχύος της και να διερευνηθούν διεξοδικά όλες της οι συνέπειες. Πιο συγκεκριμένα, θα ήταν ευκταίο να μπορούσαμε να λύσουμε τη θεωρία, ήτοι να υπολογίσουμε όλα της τα παρατηρήσιμα μεγέθη.

Ένα από τα σημαντικότερα παρατηρήσιμα μεγέθη της αντιστοιχίας AdS/CFT είναι το φάσμα της. Σύμφωνα με το «λεξικό» της αντιστοιχίας AdS/CFT, το φάσμα της θεωρίας περιλαμβάνει τις ενέργειες των καταστάσεων χορδών αυτής, καθεμιά εκ των οποίων θα πρέπει να είναι ίση με τις διαστάσεις κλίμακας του δυϊκού τελεστή της χορδής στη θεωρία βαθμίδας. Το πλήρες φασματικό πρόβλημα της αντιστοιχίας AdS/CFT λύνεται από την ολοκληρωσιμότητα, υπό την έννοια ότι η ολοκληρωσιμότητα παρέχει το πλήρες σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων που καθορίζουν το φάσμα. Οι μέθοδοι της ολοκληρωσιμότητας περιορίζονται ωστόσο σημαντικά στο όριο των μεγάλων, ισχυρά συζευγμένων τελεστών, όπως π.χ. εκείνων που είναι δυϊκοί στις χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP), τα γιγάντια μαγνόνια και τις «απλές ακίδες».

Στην παρούσα διατριβή μελετάμε κλασσικές χορδές και βράνες στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT. Ο στόχος μας είναι διττός: (1) να αναπτύξουμε μεθόδους για τον υπολογισμό του φάσματος της αντιστοιχίας $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$, στην περίπτωση μεγάλων, ισχυρά συζευγμένων τελεστών, χρησιμοποιώντας κλασσικές χορδές και (2) να κατανοήσουμε το ρόλο των κλασσικών μεμβρανών στην αντιστοιχία AdS/CFT, διερευνώντας τα χορδοειδή τους όρια.

Ως προς τον πρώτο στόχο, υπολογίζουμε τα κλασσικά φάσματα των μεγάλων χορδών GKP, των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων. Οι διατηρούμενη γραμμική ορμή και στροφορμή αυτών των διατάξεων χορδών, οι οποίες ζουν είτε εντός του AdS_3 ή στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$, είναι γνωστές σε παραμετρική μορφή συναρτήσει των γραμμικών και γωνιακών ταχυτήτων των χορδών. Απαλείφουμε τη γραμμική και γωνιακή ταχύτητα από τις εκφράσεις που δίνουν την ενέργεια των χορδών, προς όφελος των διατηρούμενων φορτίων της γραμμικής ορμής και στροφορμής των χορδών. Έτσι, βρίσκουμε όλους τους κυρίαρχους, επόμενους και μεθεπόμενους όρους στις σχέσεις διασποράς των παραπάνω διατάξεων. Τα αποτελέσματά μας εκφράζονται σε κλειστές μορφές με τη βοήθεια της συνάρτησης W του Lambert.

Για το δεύτερο στόχο, εισάγουμε και μελετάμε τις «χορδοειδείς μεμβράνες», μια νέα κατηγορία μεμβρανών που ζουν στον $\mathrm{AdS}_{4/7} \times \mathrm{S}^{7/4}$ ή τον $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$ και έχουν τις ίδιες εξισώσεις κίνησης, συνδέσμους και διατηρούμενα φορτία με χορδές που ζουν σε ένα κατάλληλο υποσύνολο του AdS_5. Οι χορδοειδείς μεμβράνες δύνανται να κατασκευαστούν κάθε φορά που ο χωροχρόνος περιέχει μια συμπαγή υποπολλαπλότητα, ταυτοποιώντας μία από τις συμπαγείς συντεταγμένες της υποπολλαπλότητας με μία εκ των συντεταγμένων κοσμικού όγκου της μεμβράνης. Για τις χορδοειδείς μεμβράνες που αναπαράγουν την παλλόμενη και περιστρεφόμενη χορδή των GKP εντός του AdS, βρίσκουμε ότι το φάσμα των εγκάρσιων διαταραχών τους έχει τη δομή πολλαπλών ζωνών/χασμάτων που διέπονται από την εξίσωση Lamé. Αντίθετα, οι διεγέρσεις μιας χορδής αναπαρίστανται από μία δομή μονής ζώνης/χάσματος Lamé. Αυτά τα ευρήματα επιβεβαιώνουν την εικόνα που έχουμε για τις μεμβράνες ως συλλογικές διεγέρσεις των χορδοειδών τους συνιστωσών.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **5**
1.1 Επισκόπηση . . . 10

I Εισαγωγή στην Αντιστοιχία AdS/CFT **11**

2 Αντιστοιχία AdS/CFT **11**
2.1 Περιγραφή Ανοικτής Χορδής . . . 11
2.2 Περιγραφή Κλειστής Χορδής . . . 12
2.3 $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills . . . 12
2.4 IIB Θεωρία Χορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ . . . 13
2.5 Ταίριασμα Παραμέτρων . . . 15
2.6 Ο Τομέας BMN . . . 16
2.7 Δυαδικότητες Maldacena . . . 17
2.8 Αντιστοιχία ABJM . . . 17
2.9 Αντιστοιχία Πεδίου/Τελεστή . . . 18
2.10 Τεστ της Αντιστοιχίας $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ . . . 19
2.10.1 Συμμετρίες . . . 20
2.10.2 Φάσματα . . . 21
2.10.3 Συναρτήσεις Συσχέτισης . . . 23
2.10.4 Ανωμαλίες, Moduli Spaces, κλπ. . . . 24

II Περιστρεφόμενες Χορδές στον $\mathbf{AdS}_5 \times \mathbf{S}^5$ **25**

3 Εισαγωγή **25**
3.1 Κλασικές Μποζονικές Χορδές στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ . . . 26
3.2 Αναγωγή Pohlmeyer . . . 28
3.3 Αναγωγή Neumann-Rosochatius στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^5$ . . . 29

4 Χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP) **32**
4.1 Περιστρεφόμενες Χορδές GKP στον AdS_3 . . . 35
4.1.1 Μικρές Χορδές . . . 38
4.1.2 Μεγάλες Χορδές . . . 39
4.1.3 Δυαδικότητα Μικρών-Μεγάλων Χορδών . . . 40
4.2 Περιστρεφόμενες Χορδές GKP στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ . . . 41
4.2.1 Μικρές Διπλωμένες Χορδές . . . 44
4.2.2 Μεγάλες Διπλωμένες Χορδές . . . 45
4.2.3 Αργές Κυκλικές Χορδές . . . 46
4.2.4 Ταχείες Κυκλικές Χορδές . . . 47
4.2.5 Δυαδικότητα Μικρών-Μεγάλων Χορδών . . . 47
4.3 Παλλόμενες Χορδές GKP στον AdS_3 . . . 48
4.3.1 Ημικλασική Κβάντωση . . . 49

5 Σχέσεις Διασποράς των Χορδών GKP **54**
5.1 Περιστρεφόμενες Χορδές GKP στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ . . . 59
5.1.1 Αντίστροφη Συνάρτηση Σπίν . . . 59
5.1.2 Ανώμαλες Διαστάσεις . . . 61

5.1.3 Κυρίαρχοι Όροι . . . 62
5.1.4 Επόμενοι Όροι . . . 64
5.1.5 Μεθεπόμενοι Όροι . . . 66
5.1.6 Ταχείες Κυκλικές Χορδές . . . 68
5.2 Περιστρεφόμενες Χορδές GKP στον AdS_3 . . . 69
5.2.1 Αντίστροφη Συνάρτηση Σπίν . . . 69
5.2.2 Ανώμαλες Διαστάσεις . . . 71
5.2.3 Κυρίαρχοι Όροι . . . 73
5.2.4 Επόμενοι Όροι . . . 75
5.2.5 Μεθεπόμενοι Όροι . . . 75
5.3 Αμοιβαιότητα . . . 77

6 Γιγάντια Μαγνόνια και Απλές Ακίδες Απείρου Μεγέθους 80
6.1 Γιγάντιο Μαγνόνιο Hofman-Maldacena (HM) . . . 83
6.2 Απλές Ακίδες Άπειρης Ορμής . . . 85
6.3 Δέσμιες Καταστάσεις & Σκέδαση . . . 87
6.3.1 Σκέδαση . . . 87
6.3.2 Δέσμιες Καταστάσεις . . . 90

7 Γιγάντια Μαγνόνια και Απλές Ακίδες Πεπερασμένου Μεγέθους 92
7.1 Γιγάντιο Μαγνόνιο: Στοιχειώδης Περιοχή . . . 93
7.2 Γιγάντιο Μαγνόνιο: Διπλή Περιοχή . . . 95
7.3 Απλή Ακίδα: Στοιχειώδης Περιοχή . . . 96
7.4 Απλή Ακίδα: Διπλή Περιοχή . . . 98
7.5 Συμμετρίες . . . 100

8 Σχέσεις Διασποράς Γιγάντιων Μαγνονίων και Απλών Ακίδων 101
8.1 Γιγάντιο Μαγνόνιο: Στοιχειώδης Περιοχή . . . 107
8.1.1 Αντίστροφη Ορμή . . . 108
8.1.2 Αντίστροφη Συνάρτηση Σπίν . . . 108
8.1.3 Σχέση Διασποράς . . . 110
8.2 Γιγάντιο Μαγνόνιο: Διπλή Περιοχή . . . 112
8.3 Απλή Ακίδα: Στοιχειώδης Περιοχή . . . 113
8.4 Απλή Ακίδα: Διπλή Περιοχή . . . 113

9 Περίληψη Μέρους II 114
9.1 Χορδές GKP . . . 114
9.2 Γιγάντια Μαγνόνια & Απλές Ακίδες . . . 116

III Στοιχεία p-Βρανών & M-Θεωρίας 119

10 Εισαγωγή στις Μεμβράνες 119
10.1 Μποζονικές Μεμβράνες . . . 119
10.1.1 Δράση Dirac-Nambu-Goto . . . 119
10.1.2 Δράση Polyakov . . . 120
10.1.3 Καθορισμός Βαθμίδας . . . 121
10.1.4 Μεμβράνες σε Επίπεδο Χωρόχρονο . . . 122
10.2 Μποζονικές p-Βράνες . . . 123
10.2.1 Αμφιδιαφορίσιμες Απεικονίσεις που Διατηρούν τον Όγκο . . . 124
10.3 Υπερμεμβράνες . . . 124

10.3.1 11-Διάστατη Υπερβαρύτητα . . . 127
10.4 Θεωρία Μ(ητρών) . . . 127
10.4.1 Κανονικοποιημένες Μεμβράνες με Μήτρες . . . 127
10.4.2 Η Υπόθεση της Θεωρίας των Μητρών . . . 129
10.4.3 Θεωρία Μητρών σε Καμπύλους Χωροχρόνους . . . 130

IV Περιστρεφόμενες Μεμβράνες 131

11 Εισαγωγή 131

12 Περιστρεφόμενες Μεμβράνες στον $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ 133

13 Περιστρεφόμενες Μεμβράνες ως Χορδές 134
13.1 Χορδοειδείς Μεμβράνες στον $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ . . . 134
13.2 Χορδοειδείς Μεμβράνες στον $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$ . . . 139
13.3 Χορδοειδείς Μεμβράνες στον $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$ . . . 139

14 Διαταραχές Μεμβρανών 140
14.1 Περιστρεφόμενες Χορδοειδείς Μεμβράνες . . . 144
14.2 Παλλόμενες Χορδοειδείς Μεμβράνες . . . 145

15 Περίληψη Μέρους IV 149

V Παραρτήματα 153

Α΄ Χορδές σε Επίπεδο Χωρόχρονο 153
Α΄.1 Περιστρεφόμενη Χορδή . . . 153
Α΄.2 Παλλόμενη Χορδή . . . 154

Β΄ Δυαδικότητες Μικρών-Μεγάλων Χορδών 156

Γ΄ Κώδικας Mathematica 157
Γ΄.1 Χορδές GKP στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ . . . 157
Γ΄.1.1 Μεγάλες Διπλωμένες Χορδές . . . 157
Γ΄.1.2 Γρήγορες Διπλωμένες Χορδές . . . 158
Γ΄.2 Χορδές GKP στον AdS_3 . . . 158
Γ΄.3 Γιγάντια Μαγνόνια . . . 160
Γ΄.3.1 Γιγάντιο Μαγνόνιο: Στοιχειώδης Περιοχή . . . 160
Γ΄.3.2 Γιγάντιο Μαγνόνιο: Διπλή Περιοχή . . . 161
Γ΄.4 Απλές Ακίδες . . . 163
Γ΄.4.1 Απλή Ακίδα: Στοιχειώδης Περιοχή . . . 163
Γ΄.4.2 Απλή Ακίδα: Διπλή Περιοχή . . . 165

Δ΄ Συμβολικοί Υπολογισμοί 167
Δ΄.1 Μεγάλες και Γρήγορες Χορδές GKP . . . 167
Δ΄.2 Γιγάντια Μαγνόνια & Απλές Ακίδες . . . 169

Ε΄ Ελλειπτικά Ολοκληρώματα και Συναρτήσεις Jacobi 173

Ϛ΄ Συνάρτηση W του Lambert 176

Ζ′ Πολυώνυμα Διαμέρισης **179**
Ζ′.1 Πολυώνυμα Bell 179
Ζ′.2 Πολυώνυμα Δυναμικού 179
Ζ′.3 Λογαριθμικά Πολυώνυμα 179

Η′ Εξίσωση Lamé **180**

1 Εισαγωγή

Ποια είναι η σπουδαιότερη εξίσωση που γράφτηκε ποτέ; Προφανώς το ερώτημα αυτό έχει πολλές απαντήσεις, όπως δείχνει και μια απλή έρευνα στο διαδίκτυο. Το Πυθαγόρειο θεώρημα, η εξίσωση του Euler, οι εξισώσεις Maxwell, οι εξισώσεις του Einstein, η εξίσωση Schrödinger, το θεώρημα Noether, η εξίσωση Callan-Symanzik και πολλές άλλες. Στις διαλέξεις του για τη δυαδικότητα βαρύτητας/βαθμίδας στο TASI του 2010, ο Joseph Polchinski [5] διάλεξε την εξίσωση του Maldacena

$$\mathrm{AdS} = \mathrm{CFT} \tag{1.1}$$

ως την αγαπημένη του εξίσωση όλων των εποχών. Ακόμη και αν αυτή του η επιλογή φαίνεται υπερβολικά ενθουσιώδης, ένα πράγμα είναι σίγουρο: η αρχική εργασία του Maldacena [6] έχει περισσότερες από 13.000 αναφορές,[1] ενώ σχεδόν 20.000 είναι οι συνολικές αναφορές για τα συνιδρυτικά άρθρα των Gubser, Klebanov, Polyakov [7], του Witten [8] και της πρώιμης ανασκόπησης [9]. Η εξίσωση του Maldacena (1.1), αξίζει μία θέση στο Πάνθεον των σπουδαιότερων εξισώσεων της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής.

Εξίσου εντυπωσιακές είναι και οι συνέπειες της (1.1). Ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής είναι η ενοποίηση της κβαντικής μηχανικής και της βαρύτητας σε μία ενιαία θεωρία. Εν γένει, δεν υπάρχει κάποιος a priori λόγος για να περιμένουμε ότι μια θεωρία κβαντικής βαρύτητας μπορεί να περιέχει μια θεωρία βαθμίδας με αναλλοιώτητα κλίμακας (σύμμορφη θεωρία πεδίου) στο σύνορο. Μέρος της ανεπανάληπτης επιτυχίας της δυαδικότητας AdS/CFT οφείλεται στο γεγονός ότι απετέλεσε το πρώτο συγκεκριμένο παράδειγμα μιας δυαδικότητας βαρύτητας/βαθμίδας και της ολογραφικής αρχής, αλλά και μια εξέχουσα περίπτωση δυαδικότητας ισχυρής/ασθενούς σύζευξης στις τέσσερις χωροχρονικές διαστάσεις.

Οι δυαδικότητες βαρύτητας/βαθμίδας μας παρέχουν ένα πολύ ξεχωριστό ενοποιητικό πλαίσιο όλων των θεμελιωδών δυνάμεων της φύσης, θεωρώντας τις θεωρίες βαθμίδας (όπως η ηλεκτρασθενής και η ισχυρή αλληλεπίδραση) ως το alter ego της βαρυτικής δύναμης. Με την ολογραφική αρχή, ο κόσμος μας αντιμετωπίζεται ως ένα ολόγραμμα που κωδικοποιεί όλη την πληροφορία ενός εσωτερικού χώρου ("bulk") που έχει περισσότερες διαστάσεις. Οι δυαδικότητες ασθενούς/ισχυρής σύζευξης ταυτοποιούν το όριο ασθενούς σύζευξης μιας θεωρίας (όπου ισχύει η θεωρία διαταραχών) με το όριο ισχυρής σύζευξης (ή μη διαταρακτική περιοχή) μιας άλλης θεωρίας και μας επιτρέπουν να κάνουμε υπολογισμούς σε μια περιοχή η οποία είναι απροσπέλαστη με τις παραδοσιακές μεθόδους. Η πιο δημοφιλής εκδοχή της αντιστοιχίας AdS/CFT,

$$\mathcal{N}=4,\ \mathfrak{su}\left(N_c\right)\ \text{super Yang-Mills θεωρία} = \text{IIB θεωρία υπερχορδών στον } \mathrm{AdS}_5\times \mathrm{S}^5 \tag{1.2}$$

υποθέτει την ισοδυναμία δύο δραστικά διαφορετικών φυσικών θεωριών. Η $\mathcal{N}=4$ super Yang-Mills θεωρία είναι η τελειότερη δυνατή θεωρία βαθμίδας στις τέσσερις χωροχρονικές διαστάσεις με το μέγιστο επιτρεπτό αριθμό υπερσυμμετριών και σύμμορφη συμμετρία, που πρακτικά σημαίνει ότι η θεωρία είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς κλίμακας και πεπερασμένη. Η θεωρία υπερχορδών τύπου IIB στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ είναι από την άλλη μεριά μια βαρυτική θεωρία που διατυπώνεται σε ένα σύνολο δέκα χωροχρονικών διαστάσεων, πέντε από τις οποίες έχουν συμπαγοποιηθεί επί μιας πενταδιάστατης σφαίρας, ενώ οι υπόλοιπες ζουν στον πενταδιάστατο χώρο anti-de Sitter.

Η εικασία του Maldacena φαίνεται να προτείνει τη μελέτη ενός ιδανικού κόσμου (της $\mathcal{N}=4$ SYM) ως μέσο κατανόησης των ιδιοτήτων του πραγματικού (ήτοι της QCD, θεωρίας των ισχυρών αλληλεπιδράσεων). Ωστόσο αποδεικνύεται ότι η δυαδικότητα AdS/CFT είναι πολύ περισσότερο από ένα αφελές υπόδειγμα εργασίας. Στην περιοχή των υψηλών θερμοκρασιών όπου η υπερσυμμετρία της $\mathcal{N}=4$ SYM σπάει ρητά, η θεωρία μοιάζει όλο και περισσότερο με το απεγκλωβισμένο πλάσμα της QCD, χωρίς χειραλικό συμπύκνωμα και με αναλλοιώτητα σε μετασχηματισμούς κλίμακας. Αυτή η μορφή παγκοσμιότητας

[1] Ως το 2015.

αποτελεί τον πυρήνα των δυαδικοτήτων βαρύτητας/βαθμίδας που υποθέτουν ότι η ολογραφικά δυαδική θεωρία της QCD πρέπει να περιγράφεται από μια τροποποιημένη εκδοχή της εικασίας του Maldacena. Υπό αυτήν την έννοια, η δυαδικότητα AdS/CFT (1.2) μπορεί να θεωρείται ως ο «αρμονικός ταλαντωτής» της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής.

Όπως λοιπόν και για τον κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή, επιβάλλεται να μελετήσουμε την αντιστοιχία AdS/CFT εξονυχιστικά. Πρώτα απ΄όλα, μιας και η αντιστοιχία AdS/CFT βρίσκεται ακόμη στο επίπεδο της εικασίας που αψηφά κάθε λογική προσπάθεια απόδειξης, θα πρέπει να μάθουμε το εύρος της ισχύος της. Πολλές δοκιμές έχουν αναπτυχθεί όλα αυτά τα χρόνια που ελέγχουν το ταίριασμα μεταξύ των συμμετριών, των φασμάτων, των συναρτήσεων συσχέτισης, των ανωμαλιών, κλπ. των δύο εμπλεκόμενων θεωριών. Όλα μοιάζουν να επαληθεύουν την ορθότητα της θεωρίας, τουλάχιστον στο επίπεδο όριο όπου η τάξη της ομάδας βαθμίδας γίνεται πολύ μεγάλη ($N_c \to \infty$).

Δεύτερον, αν δεχθούμε την ορθότητά της, χρειάζεται να κατανοήσουμε πλήρως τις συνέπειες της αντιστοιχίας AdS/CFT. Με άλλα λόγια θα πρέπει να λύσουμε τη θεωρία. «Λύνουμε» μια θεωρία σημαίνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα παρατηρήσιμα μεγέθη της, π.χ. το φάσμα, τις συναρτήσεις συσχέτισης, τα πλάτη σκέδασης, τις αναμενόμενες τιμές των βρόχων Wilson. Ένα πανίσχυρο εργαλείο που έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια της επιλυσιμότητας της αντιστοιχίας AdS/CFT είναι αυτό της ολοκληρωσιμότητας. Σε γενικές γραμμές, μια θεωρία είναι ολοκληρώσιμη όποτε διαθέτει το μέγιστο επιτρεπόμενο αριθμό νόμων διατήρησης που μπορούν να ολοκληρωθούν και η θεωρία να επιλυθεί. Στην περίπτωση της δυαδικότητας $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$, η ολοκληρωσιμότητα έχει αποδειχθεί στο κλασσικό επίπεδο από τους Bena, Polchinski και Roiban [10]. Παρότι καμία απόδειξη κβαντικής ολοκληρωσιμότητας δεν υπάρχει προς το παρόν, η αντιστοιχία $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ (1.2) θεωρείται κβαντικά ολοκληρώσιμη στο επίπεδο όριο ($N_c \to \infty$), όπου η δυϊκή θεωρία χορδών γίνεται ελεύθερη ($g_s \to 0$).

Η ολοκληρωσιμότητα επιλύει πλήρως το φασματικό πρόβλημα της επίπεδης αντιστοιχίας $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$, υπό την έννοια ότι παρέχει το πλήρες σύνολο των αλγεβρικών εξισώσεων που καθορίζει το φάσμα. Η ολοκληρωσιμότητα επίσης παρέχει και το σύνολο των εργαλείων που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιλυθεί το επίπεδο όριο της θεωρίας $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ (υπό την πιο πάνω έννοια, ήτοι τον υπολογισμό όλων των παρατηρήσιμων μεγεθών της). Ωστόσο, η ολοκληρώσιμη προσέγγιση αντιμετωπίζει μια σειρά από περιορισμούς. Συγκεκριμένα, υπάρχουν κάποιες περιοχές της αντιστοιχίας AdS/CFT όπου η λύση του προαναφερθέντος συνόλου αλγεβρικών εξισώσεων γίνεται εξαιρετικά δυσχερής, είτε αναλυτικά είτε υπολογιστικά. Σε τέτοιες περιπτώσεις, πρέπει να καταφύγουμε σε πιο παραδοσιακές μεθόδους για να υπολογίσουμε τα επιθυμητά φάσματα. Αυτές οι μέθοδοι περιλαμβάνουν κλασσικές χορδές και, σε μερικές περιπτώσεις, βράνες.

Πριν προχωρήσουμε στη συζήτηση του ρόλου των κλασσικών χορδών και βρανών στην αντιστοιχία AdS/CFT, ας εξηγήσουμε σύντομα γιατί πιστεύουμε ότι ο αναλυτικός υπολογισμός του επίπεδου φάσματος της αντιστοιχίας AdS/CFT έχει ενδιαφέρον. Πρώτον, μας φαίνεται ότι η ευρύτητα της αντιστοιχίας AdS/CFT περιορίζεται σημαντικά αν δεν γνωρίζουμε την ακριβή αναλυτική μορφή του φάσματός της. Δεύτερον, θα θέλαμε να έχουμε στη διάθεσή μας εργαλεία που μας επιτρέπουν να επιβεβαιώσουμε το ταίριασμα των φασμάτων της AdS/CFT αναλυτικά. Τρίτον, θα θέλαμε να διερευνήσουμε τη δυνατότητα εύρεσης κλειστών εκφράσεων στο φάσμα της αντιστοιχίας AdS/CFT.

Το 2002, οι Gubser, Klebanov και Polyakov (GKP) [11] πρότειναν τη μελέτη κλασικών χορδών που περιστρέφονται, στροβιλίζονται ή πάλλονται εντός του $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ προκειμένου να υπολογίσουν τις τιμές των (ανώμαλων) διαστάσεων κλίμακας ορισμένων αναλλοίωτων σε μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστών μονού ίχνους της $\mathcal{N} = 4$ SYM, σε ισχυρή σύζευξη. Οι GKP παρατήρησαν ότι η ενέργεια μιας συγκεκριμένης κλειστής διπλωμένης χορδής που περιστρέφεται ως στερεό σώμα εντός του AdS_3, συμπεριφέρεται όπως ο λογάριθμος του (μεγάλου) σπίν της, συμπεριφορά που θύμιζε τις λογαριθμικές παραβιάσεις της κλίμακας των τελεστών συστροφής (twist operators) της QCD. Έχοντας καταφέρει να αναπαράξουν αυτή τη συμπεριφορά για τις ανώμαλες διαστάσεις κλίμακας των βαθμωτών τελεστών (συστροφής) μονού ίχνους της $\mathcal{N} = 4$ SYM, οι GKP υπέθεσαν ότι η κλειστή διπλωμένη χορδή που περιστρέφεται στερεά εντός του AdS_3, είναι δυϊκή των τελεστών συστροφής 2 της $\mathcal{N} = 4$ SYM και παράχει τις ανώμαλες διαστάσεις τους σε ισχυρή σύζευξη.

Το παράδειγμα των GKP ανέδειξε τα οφέλη της μελέτης των κλασσικών χορδών στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT, όπως το γεγονός ότι επιτρέπει τον υπολογισμό του φάσματος της δυϊκής σύμμορφης θεωρίας πεδίου σε ισχυρή σύζευξη (περιοχή όπου η θεωρία διαταραχών τυπικά παύει να ισχύει). Οι κλασσικές χορδές χρησιμοποιούνται επίσης εκτενώς στον υπολογισμό συναρτήσεων συσχέτισης στην αντιστοιχία AdS/CFT, βρόχων Wilson και πλατών σκέδασης μεταξύ γκλουονίων. Επίσης οι ιδιότητες ολοκληρωσιμότητας των κλασσικών και κβαντικών χορδών στην επίπεδη αντιστοιχία AdS/CFT, αποτελούν βασικές ενδείξεις για την ολοκληρωσιμότητα ολόκληρης της θεωρίας. Ένα ενδιαφέρον σχετικό ερώτημα είναι κατά πόσον η μελέτη των κλασσικών μεμβρανών στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT μπορεί να είναι το ίδιο αποτελεσματική με τη μελέτη των κλασσικών χορδών.

Οι κλασσικές σχέσεις διασποράς των χορδών GKP μελετήθηκαν σοβαρά στις εργασίες [12, 3]. Όπως ήδη αναφέραμε, οι χορδές GKP είναι κλειστές χορδές που περιστρέφονται στροβιλίζονται ή πάλλονται εντός των υποπολλαπλοτήτων AdS_3 και $\mathbb{R} \times S^2$ του $AdS_5 \times S^5$ και είναι δυϊκές προς συγκεκριμένους σύνθετους τελεστές της $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills (SYM) θεωρίας. Οι σχέσεις διασποράς των χορδών GKP δίνουν τις ανώμαλες διαστάσεις των δυϊκών τους τελεστών στη σύμμορφη θεωρία πεδίου σε ισχυρή σύζευξη. Οι χορδές GKP ανήκουν στην κατηγορία των «μεγάλων» χορδών που «βλέπουν» την καμπυλότητα του χωροχρόνου στον οποίο ζουν, σε αντίθεση με τις «μικρές» χορδές που ζουν εντός ενός κατά προσέγγιση επίπεδου χωροχρόνου, η καμπυλότητα του οποίου επηρεάζει μόνο τους επόμενους όρους στις σχέσεις διασποράς τους. Εκτός τούτου, πολύ λίγα αποτελέσματα για τα φάσματα των μεγάλων χορδών έχουν βρεθεί με τη χρήση των μεθόδων της ολοκληρωσιμότητας.

Συνεπώς θα πρέπει να βασιστούμε σε πιο άμεσες μεθόδους προκειμένου να υπολογίσουμε τα ζητούμενα φάσματα. Γενικά, οι εκφράσεις των κλασσικών διατηρούμενων φορτίων της ενέργειας E και του σπίν S/στροφορμής J της χορδής είναι γνωστές σε παραμετρική μορφή συναρτήσει της γωνιακής τους ταχύτητας ω. Οι συγγραφείς των εργασιών [12, 3] κατάφεραν να αντιστρέψουν τις σειρές που δίνουν τη διατηρούμενη στροφορμή των χορδών συναρτήσει της γωνιακής τους ταχύτητας και να εκφράσουν την κλασσική ενέργεια των χορδών σαν μια συνάρτηση $E = E\left(S, J\right)$, χρησιμοποιώντας μόνο το διατηρούμενο σπίν/στροφορμή. Μόνο σε αυτή τη μορφή μπορούν οι προκύπτουσες σχέσεις διασποράς να φιλοξενήσουν κβαντικές διορθώσεις ή να συγκριθούν με τις αντίστοιχες εκφράσεις σε ασθενή σύζευξη, καμιά από τις οποίες δεν είναι γνωστή σε παραμετρική μορφή. Το αποτέλεσμα είναι ότι οι διορθώσεις πεπερασμένου μεγέθους στα φάσματα των δυϊκών τελεστών της σύμμορφης θεωρίας πεδίου σε ισχυρή σύζευξη μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει της συνάρτησης W του Lambert που ορίζεται ως εξής:

$$W\left(z\right)\, e^{W(z)} = z \tag{1.3}$$

και αποτελεί γενίκευση της λογαριθμικής συνάρτησης. Με τη συνάρτηση W του Lambert, υπολογίστηκαν όλοι οι κυρίαρχοι, επόμενοι και μεθεπόμενοι όροι στις κλασσικές σχέσεις διασποράς των «μεγάλων» περιστρεφόμενων χορδών των GKP εντός του AdS_3 και του $\mathbb{R} \times S^2$. Στην εργασία [13], η μέθοδος της συνάρτησης W εφαρμόστηκε στην περίπτωση της αντιστοιχίας AdS_4/CFT_3. Επιπλέον, οι διατηρούμενες ενέργειες και σπίν/στροφορμές των μεγάλων χορδών GKP βρέθηκαν να ικανοποιούν ένα αριθμό από δυαδικότητες μικρών-μεγάλων χορδών που συνδέουν τις τιμές των διατηρούμενων φορτίων τους στα όρια των «μικρών» και των «μεγάλων» χορδών. Αυτές οι σχέσεις είναι πολύ ενδιαφέρουσες, διότι οι κβαντικές τους γενικεύσεις θα επιτρέψουν τη χρησιμοποίηση των πλούσιων αποτελεσμάτων από την ολοκληρωσιμότητα για τις μικρές χορδές, στη περιοχή των μεγάλων χορδών.

Στην εργασία [2], η μέθοδος της συνάρτησης W αναβαθμίστηκε στην περίπτωση των γιγάντιων μαγνονίων (giant magnons) και των απλών ακίδων (single spikes). Τα γιγάντια μαγνόνια και οι απλές ακίδες είναι ανοικτές χορδές ενός σπίν που περιστρέφονται εντός του $\mathbb{R} \times S^2 \subset AdS_5 \times S^5$ και είναι δυϊκές στους τελεστές ενός μαγνονίου και ενός σπινονίου (spinon) της κεντρικά επεκταμένης $\mathcal{N} = 4$ SYM. Τα γιγάντια μαγνόνια έχουν κεντρικό ρόλο στην αντιστοιχία AdS/CFT, καθώς αποτελούν τις θεμελιώδεις δομικές μονάδες από τις οποίες αποτελείται κάθε κατάσταση στη θεωρία. Αυτές είναι ξανά «μεγάλες» χορδές, για τις οποίες είναι γνωστά πολύ λίγα αποτελέσματα από την ολοκληρωσιμότητα. Εκτός της διατηρούμενης ενέργειας E και της στροφορμής J, τα γιγάντια μαγνόνια και οι απλές ακίδες έχουν και μια τρίτη διατηρούμενη ποσότητα, τη γραμμική ορμή τους p. Επιπλέον, εξαρτώνται και από μια δεύτερη παράμετρο εκτός της γωνιακής τους ταχύτητας ω, ήτοι από τη γραμμική τους ταχύτητα v. Η απαλοιφή των παραμέτρων v και ω από την έκφραση της ενέργειας E, προς όφελος των διατηρούμενων ορμών J και p αποτελεί μια σημαντική τεχνική πρόκληση, καθώς τώρα πρέπει να λυθεί ένα πολύ πιο δύσκολο 3×3 σύστημα αντί ενός συστήματος 2×2. Οι κυρίαρχοι, επόμενοι και μεθεπόμενοι όροι στις κλασσικές σχέσεις διασποράς τόσο των γιγάντιων μαγνονίων όσο και των απλών ακίδων υπολογίστηκαν στην εργασία [2].

Πέραν του γνωστού παραδείγματος της αντιστοιχίας $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$, όπου το εσωτερικό είναι 10-διάστατο και φιλοξενεί μια θεωρία χορδών τύπου IIB, είναι γνωστός και ένας αριθμός δυαδικοτήτων AdS/CFT που διατυπώνονται σε ένα 11-διάστατο εσωτερικό και φιλοξενούν μια θεωρία-Μ. Όπως ακριβώς η $D = 10$ είναι η κρίσιμη διάσταση του χωροχρόνου για τις χορδές, για τις μεμβράνες η αντίστοιχη διάσταση αυξάνεται σε $D = 11$. Αυτό συνεπάγεται ότι θα πρέπει ενδεχομένως να αντικαταστήσουμε τις χορδές με μεμβράνες, καθώς μεταβαίνουμε από τη μελέτη της 10-διάστατης θεωρίας χορδών στην 11-διάστατη θεωρία-Μ. Η πιο πάνω διαδικασία για τον υπολογισμό του φάσματος της δυϊκής σύμμορφης θεωρίας πεδίου με τη βοήθεια χορδών, θα πρέπει να μπορεί να εφαρμοσθεί και στην περίπτωση των μεμβρανών. Συνεπώς αναμένουμε ότι η ενέργεια μιας μεμβράνης που ζει στο εσωτερικό ενός 11-διάστατου χωροχρόνου της αντιστοιχίας AdS/CFT, ισούται με τις διαστάσεις κλίμακας ενός κατάλληλου τελεστή της δυϊκής θεωρίας βαθμίδας.

Αποδεικνύεται ωστόσο, ότι οι βράνες είναι κάπως «ιδιόρρυθμα» αντικείμενα. Ο λόγος είναι ότι ταλαιπωρούνται γενικά από προβλήματα όπως αστάθειες, ανωμαλίες, μη επανακανονικοποιησιμότητα, μη ολοκληρωσιμότητα, είναι δύσκολο να κβαντωθούν ή να αλληλεπιδράσουν και δεν έχουν θεωρία διαταραχών. Όλα αυτά δυσχεραίνουν σημαντικά τη μελέτη τους. Εντούτοις, φαίνεται να υπάρχουν και περιπτώσεις όπου πολλά από αυτά τα εμπόδια να μπορούν να ξεπεραστούν, όπως η θεωρία μητρών και η θεώρηση των βρανών εντός των χωροχρόνων AdS. Η τελευταία περίπτωση είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα από την άποψη της αντιστοιχίας AdS/CFT. Όπως ήδη αναφέραμε, ένα ενδιαφέρον ανοικτό πρόβλημα είναι ο προσδιορισμός του ρόλου των κλασσικών μεμβρανών στην αντιστοιχία AdS/CFT καθώς επίσης και κατά πόσο η τεχνολογία που έχει αναπτυχθεί στην περίπτωση των κλασσικών χορδών, μπορεί να εφαρμοσθεί στην περίπτωση των βρανών.

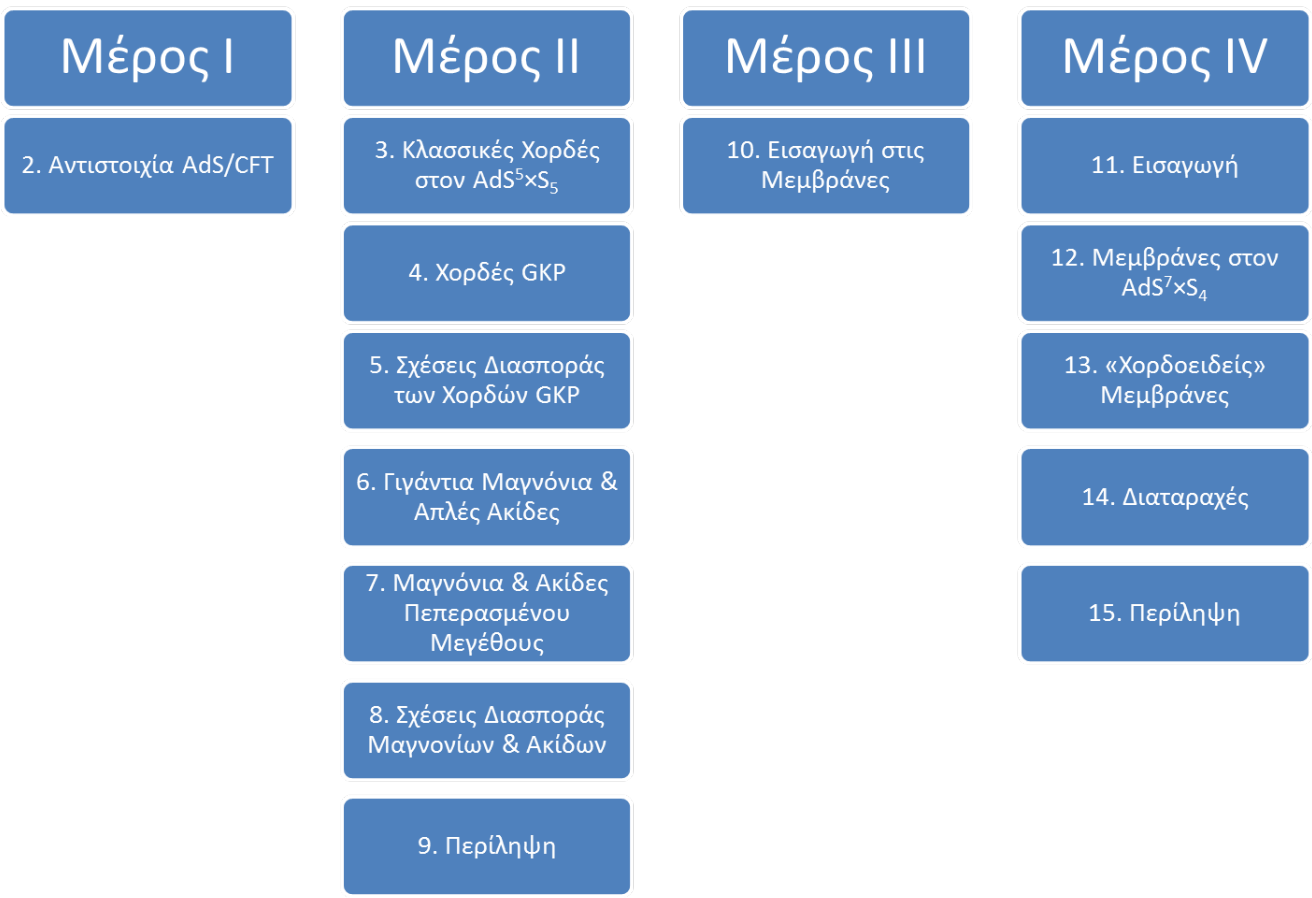
Στην εργασία [4] προτάθηκε μια νέα κατηγορία μεμβρανών στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT, οι «χορδοειδείς μεμβράνες». Αυτές είναι μεμβράνες που ζουν εντός των χωροχρόνων $\mathrm{AdS}_{4/7} \times \mathrm{S}^{7/4}$ και $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$ και έχουν τις ίδιες εξισώσεις κίνησης, συνδέσμους και διατηρούμενα φορτία με χορδές που ζουν σε ένα κατάλληλο υποσύνολο του AdS_5. Οι χορδοειδείς μεμβράνες μπορούν να κατασκευαστούν οποτεδήποτε ο χωρόχρονος περιέχει μία συμπαγή υποπολλαπλότητα, ταυτοποιώντας μία από τις συμπαγείς συντεταγμένες της υποπολλαπλότητας με μία από τις συντεταγμένες κοσμικού όγκου της μεμβράνης. Δύο ενδιαφέροντα παραδείγματα των χορδοειδών μεμβρανών είναι αυτά που αναπαράγουν την παλλόμενη και την περιστρεφόμενη χορδή των GKP εντός του AdS. Στη γραμμική προσέγγιση, το φάσμα των εγκάρσιων διαταραχών των χορδοειδών μεμβρανών που αναπαράγουν την περιστρεφόμενη και την παλλόμενη χορδή των GKP, έχει τη δομή πολλαπλών ζωνών/χασμάτων που διέπονται από την εξίσωση Lamé. Στον αντίποδα, οι διεγέρσεις μιας χορδής αναπαρίστανται από μία δομή μονής ζώνης/χάσματος Lamé. Τα παραπάνω ευρήματα, επιβεβαιώνουν την εικόνα που έχουμε για τις μεμβράνες ως συλλογικές διεγέρσεις κάποιων από τις χορδοειδείς τους συνιστώσες.

Οι χορδοειδείς μεμβράνες κληρονομούν όλα τα κλασσικά χαρακτηριστικά των χορδών που αναπαράγουν, όπως οι σχέσεις διασποράς τους και η κλασσική τους ολοκληρωσιμότητα. Με δεδομένο ότι η 11-διάστατη θεωρία-Μ στους χώρους $\mathrm{AdS}_{4/7} \times \mathrm{S}^{7/4}$ είναι δυϊκή στην τρισδιάστατη $\mathcal{N} = 8$ υπερσύμμορφη θεωρία πεδίου και την εξαδιάστατη $\mathrm{A}_{N_c-1}\,(2,0)$ υπερσύμμορφη θεωρία πεδίου αντίστοιχα, οι δύο αυτές υπερσύμμορφες θεωρίες πεδίου αναμένονται να περιέχουν τελεστές που είναι δυϊκοί στις αντίστοιχες χορδοειδείς μεμβράνες. Οι διαστάσεις κλίμακας των τελεστών της δυϊκής υπερσύμμορφης θεωρίας πεδίου αναμένεται να είναι ίσες με τις ενέργειες των χορδοειδών μεμβρανών. Η εικόνα αυτή μοιάζει να επιβεβαιώνει την υπόθεση ότι όλες οι πιο πάνω υπερσύμμορφες θεωρίες πεδίου και η $\mathcal{N}=4$ SYM θεωρία, περιέχουν κοινούς ολοκληρώσιμους τομείς.

1.1 Επισκόπηση

Η παρούσα διδακτορική διατριβή περιλαμβάνει τέσσερα μέρη. Το μέρος I αποτελεί μια σύντομη εισαγωγή στην αντιστοιχία AdS/CFT. Στόχος μας είναι να δώσουμε μια σύντομη επισκόπηση της αντιστοιχίας αλλά και να εισάγουμε όλες τις έννοιες, την ορολογία και τους ορισμούς που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα.

Στο μέρος II ασχολούμαστε με κλασσικές χορδές που περιστρέφονται εντός του $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. Σύμφωνα με την αντιστοιχία AdS/CFT, οι χορδές εντός του $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ είναι δυϊκές προς ορισμένους αναλλοίωτους σε μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστές της $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills θεωρίας και παρέχουν τις (ανώμαλες) διαστάσεις κλίμακάς τους σε ισχυρή σύζευξη. Σκοπός μας είναι να διερευνήσουμε το κλασικό φάσμα αυτών των εκτεταμένων αντικειμένων και να εξαγάγουμε κλειστές εκφράσεις για τις σχέσεις διασποράς τους. Το μέρος II ουσιαστικά ακολουθεί τις εργασίες [2] και [3] και διαιρείται σε δύο κύρια μέρη. Το πρώτο μέρος πραγματεύεται τις αποκαλούμενες χορδές των Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP), ενώ στο δεύτερο μέρος μελετώνται τα γιγάντια μαγνόνια (giant magnons) και οι «απλές ακίδες» (single spikes).



Στο μέρος III αλλάζουμε κλίμα και καταπιανόμαστε με τις p-βράνες και την θεωρία-M. Συζητάμε τις πιο δημοφιλείς δράσεις για τις p-βράνες και τα πιο γνωστά μοντέλα μητρών τους.

Στο μέρος IV μελετάμε ορισμένες κλασσικές μεμβράνες που περιστρέφονται εντός χωροχρόνων όπως ο $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ ή ο $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$ και συμπεριφέρονται ως χορδές. Ακολουθώντας την ορολογία της εργασίας [4], οι μεμβράνες αυτές αποκαλούνται «χορδοειδείς» και μπορεί να δειχθεί ότι είναι κλασσικά ισοδύναμες με κλασσικές περιστρεφόμενες χορδές. Ωστόσο η ισοδυναμία αυτή δεν μπορεί να επεκταθεί και σε ανώτερες τάξεις στη θεωρία διαταραχών, όπως αποδεικνύουμε.

Μέρος I

Εισαγωγή στην Αντιστοιχία AdS/CFT

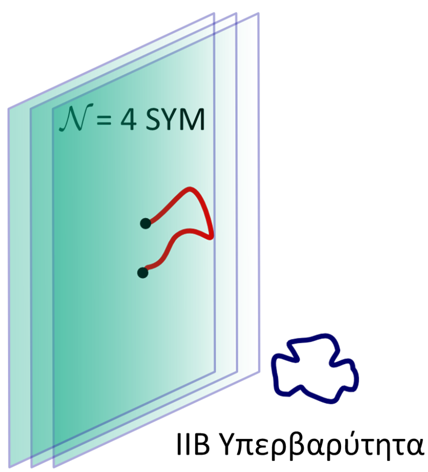
2 Αντιστοιχία AdS/CFT

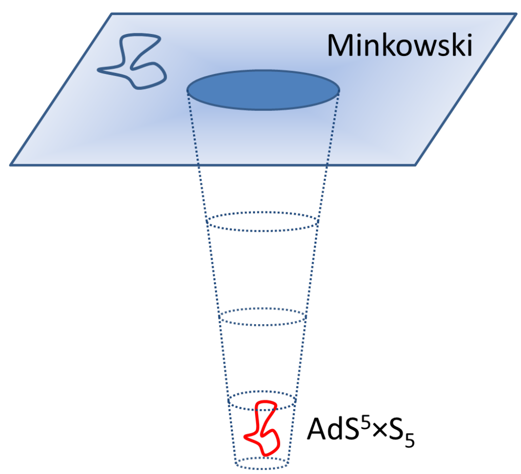
Η αντιστοιχία AdS/CFT [6, 7, 8] είναι η πρώτη ρητή υλοποίηση της δυαδικότητας βαθμίδας/βαρύτητας και της ολογραφική αρχής, αλλά και το πρώτο συγκεκριμένο παράδειγμα μιας θεωρίας χορδών που ανάγεται σε θεωρία βαθμίδας στα μεγάλα N_c. Ως ασθενής/ισχυρή δυαδικότητα, είναι επίσης και ένα υποδειγματικό τετραδιάστατο ανάλογο της δυαδικότητας του Coleman.[2] Διατυπώνεται ως εξής:

$$\boxed{\mathcal{N}=4,\ \mathfrak{su}\left(N_c\right)\ \text{super Yang-Mills θεωρία} = \text{IIB θεωρία υπερχορδών στον } \mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5} \tag{2.1}$$

Ωραίες εισαγωγές και επισκοπήσεις της αντιστοιχίας AdS/CFT, από διαφορετικές οπτικές γωνίες και απόψεις, μπορούν να βρεθούν στα [9, 14, 15, 16, 17].

Θα παρουσιάσουμε τώρα ένα θεωρητικό επιχείρημα που δικαιολογεί την εικασία $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$. Θα λάβουμε το όριο χαμηλής ενέργειας δύο διαφορετικών εκδοχών ενός συστήματος που αποτελείται από N_c συμπίπτουσες D3-βράνες, που είναι γνωστές ως «*περιγραφή ανοικτής χορδής*» και «*περιγραφή κλειστής χορδής*». Από την πρώτη θα αναδυθεί η $\mathcal{N}=4$, $\mathfrak{su}\left(N_c\right)$ super Yang-Mills (SYM) θεωρία, ενώ από τη δεύτερη η IIB θεωρία χορδών στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$. Δεδομένου ότι και οι δύο θεωρίες περιγράφουν το ίδιο σύστημα από D3-βράνες, αναμένουμε να ταυτίζονται και η (2.1) να ισχύει.





2.1 Περιγραφή Ανοικτής Χορδής

Ας θεωρήσουμε τώρα N_c συμπίπτουσες D3-βράνες στην θεωρία χορδών τύπου IIB. Στην αποκαλούμενη *περιγραφή ανοικτής χορδής*, το σύστημα περιλαμβάνει ανοικτές χορδές με απολήξεις στις (3+1)-διάστατες βράνες, κλειστές χορδές που διαδίδονται στον 10-διάστατο χωρόχρονο, καθώς και τις αλληλεπιδράσεις τους:

$$S = S_{\text{branes}} + S_{\text{bulk}} + S_{\text{interactions}}. \tag{2.2}$$

S_{branes} είναι η δράση της $\mathcal{N}=4$, $\mathfrak{su}\left(N_c\right)$ SYM θεωρίας στον επίπεδο χωρόχρονο των $3+1$ διαστάσεων, συμπεριλαμβανομένων και των διορθώσεων α', ενώ S_{bulk} είναι η δράση της IIB υπερβαρύτητας σε 10 επίπεδες διαστάσεις, συν τις διορθώσεις α'. Όπως αποδεικνύεται, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των χορδών μπορεί να αγνοηθούν σε χαμηλές ενέργειες (δήλωση στην πραγματικότητα ισοδύναμη με το να πει κανείς

[2] Η εργασία του Maldacena φαίνεται επίσης ότι σπάει και το παγκόσμιο ρεκόρ αναφορών. Τη στιγμή που γράφονταν αυτή η διατριβή είχε ξεπεράσει κατά πολύ τις 13.000...

ότι η βαρύτητα είναι ελεύθερη στο IR), έτσι ώστε όλοι οι τρόποι ταλάντωσης των χορδών αποσυνδέονται ο ένας από τον άλλον και η δράση (2.2) ανάγεται στην περιγραφή χαμηλής ενέργειας μη αλληλεπιδρώντων ανοικτών και κλειστών χορδών:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Περιγραφή ανοικτής χορδής} \\ \text{Όριο μικρής ενέργειας} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{N}=4,\ \mathfrak{su}\left(N_c\right)\ \text{SYM}\ +\ \text{ελεύθερη IIB υπερβαρύτητα.} \tag{2.3}$$

2.2 Περιγραφή Κλειστής Χορδής

Στην *περιγραφή κλειστής χορδής*, οι N_c D3-βράνες θεωρούνται ως καθετήρες (probes) που τροφοδοτούν τα πεδία εντός του εσωτερικού:

$$ds^2 = H^{-1/2}\left(-dt^2 + d\mathbf{x}_3^2\right) + H^{1/2}\left(dz^2 + z^2 d\Omega_5^2\right), \quad H\left(z\right) \equiv 1 + \left(\frac{\ell}{z}\right)^4, \quad \ell^4 = 4\pi g_s N_c \ell_s^4. \tag{2.4}$$

Μακριά από ορίζοντα ($z \to \infty$), η μετρική (2.4) ανάγεται στο 10-διάστατο χωροχρόνο Minkowski. Πολύ κοντά στον ορίζοντα ($z \to 0$), η μετρική (2.4) ταυτίζεται με τη μετρική του $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$:

$$ds^2 = \frac{z^2}{\ell^2}\left(-dt^2 + d\mathbf{x}_3^2\right) + \frac{\ell^2}{z^2}\left(dz^2 + z^2 d\Omega_5^2\right) = \left\{\frac{z^2}{\ell^2}\left(-dt^2 + d\mathbf{x}_3^2\right) + \frac{\ell^2}{z^2}\,dz^2\right\} + \ell^2 d\Omega_5^2,$$

στις λεγόμενες οροσφαιρικές/Poincaré συντεταγμένες. Στο όριο χαμηλής ενέργειας, διαπιστώνουμε ότι οι διεγέρσεις που ζουν μακριά από τον ορίζοντα αποσυνδέονται από εκείνες που βρίσκονται στην περιοχή κοντά ορίζοντα και το σύστημα ανάγεται πάλι σε άθροισμα δύο ξεχωριστών συστημάτων:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Περιγραφή κλειστής χορδής} \\ \text{Όριο μικρής ενέργειας} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{IIB θεωρία υπερχορδών στον } \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5 \\ + \\ \text{ελεύθερη IIB υπερβαρύτητα.} \end{array} \tag{2.5}$$

Οι (2.3) και (2.5) είναι δύο περιγραφές του ίδιου του συστήματος των N_c συμπιπτουσών D3-βρανών και ως εκ τούτου οι δράσεις τους θα πρέπει να συμπίπτουν. Εφόσον η ελεύθερη IIB υπερβαρύτητα αποτελεί κοινό συστατικό και των δύο ισοδύναμων περιγραφών χαμηλής ενέργειας (2.3) και (2.5), τα υπόλοιπα συστατικά πρέπει να ταυτίζονται, δηλαδή

$$\mathcal{N}=4,\ \mathfrak{su}\left(N_c\right)\ \text{SYM θεωρία} = \text{IIB θεωρία υπερχορδών στον } \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5.$$

Στα επόμενα θα εξετάσουμε εν συντομία τα δύο βασικά συστατικά στοιχεία της αντιστοιχίας AdS/CFT, ήτοι την $\mathcal{N}=4$ SYM θεωρία και την IIB θεωρία χορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$.

2.3 $\mathcal{N}=4$ Super Yang-Mills (SYM)

Η θεωρία $\mathcal{N}=4$ super Yang-Mills (SYM) σε $d=4$ χωροχρονικές διαστάσεις ανακαλύφθηκε το 1977 από τους Brink, Schwarz και Scherk και τους Gliozzi, Scherk και Olive [18]. Είναι μια θεωρία που έχει το μέγιστο επιτρεπόμενο αριθμό από υπερσυμμετρίες στις $d=4$ διαστάσεις. Η πιο σημαντική ιδιότητά της είναι ότι είναι κβαντικά σύμμορφα αναλλοίωτη.

Η δυνατότητα μηδενισμού της βήτα συνάρτησης στον ένα βρόχο για τις $\mathfrak{su}\left(N_c\right)$ υπερσυμμετρικές θεωρίες που περιέχουν τρεις πολλαπλέτες ύλης (όπως είναι και η $\mathcal{N}=4$ SYM θεωρία), διερευνήθηκε για πρώτη φορά το 1974 (πριν από την ανακάλυψη της $\mathcal{N}=4$ SYM) από τους Ferrara και Zumino [19]. Για την $\mathcal{N}=4$ SYM ο μηδενισμός της βήτα συνάρτησης έχει επιβεβαιωθεί μέχρι τους τέσσερις βρόχους στη θεωρία διαταραχών [20]. Η επέκταση σε όλους τους βρόχους απεδείχθη είτε από το μηδενισμό του αξονικού ρεύματος [21], είτε πηγαίνοντας στο σύστημα αναφοράς κώνου φωτός του υπερχώρου [22], είτε διατυπώνοντας την $\mathcal{N}=4$ SYM ως προς τον $\mathcal{N}=2$ υπερχώρο [23].

Από διαταρακτικά πεπερασμένη, η θεωρία $\mathcal{N}=4$ SYM αναβαθμίσθηκε σε μη-διαταρακτικά πεπερασμένη στην εργασία [24]. Ως εκ τούτου, η θεωρία είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς κλίμακας. Για να αποδεχθεί η υπερσύμμορφη αναλλοιώτητα από την αναλλοιώτητα σε μετασχηματισμούς κλίμακας, είναι απαραίτητα μερικά ακόμα βήματα και ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στη εργασία [25] για μια πιο ολοκληρωμένη συζήτηση.

Υπάρχουν διάφορες ισοδύναμες διατυπώσεις της $\mathcal{N}=4$ SYM. Σε μία από αυτές, η Λαγκρανζιανή πυκνότητα μπορεί να ληφθεί από τη διαστατική αναγωγή (dimensional reduction) της $\mathcal{N}=1$ SYM, από τις $d=10$ στις $d=4$ διαστάσεις:

$$\mathcal{L}_{\rm SYM}=-\frac{2}{g_{YM}^2}\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\mathcal{D}_\mu\phi_i\mathcal{D}^\nu\phi_i-\frac{1}{4}\left[\phi_i,\phi_j\right]^2+\bar{\psi}_{\rm a}\not{\mathcal{D}}\psi_{\rm a}-\frac{i}{2}\sigma_i^{\rm ab}\psi_{\rm a}\left[\phi_i,\psi_{\rm b}\right]-\frac{i}{2}\sigma_i^{\rm ab}\bar{\psi}_{\rm a}\left[\phi_i,\bar{\psi}_{\rm b}\right]\right], \tag{2.6}$$

όπου οι ορισμοί των δεικτών και των πεδίων είναι οι ακόλουθοι ($T^{\mathfrak{a}}$ είναι οι γεννήτορες της ομάδας $\mathfrak{su}\left(N_c\right)$, όλοι στην προσαρτημένη αναπαράσταση):

$$\begin{aligned}
&A_\mu\equiv A_\mu^{\mathfrak{a}}T^{\mathfrak{a}},\quad F_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+i\left[A_\mu,A_\nu\right],\quad \mu,\nu=0,1,2,3\\
&\phi_i\equiv\phi_i^{\mathfrak{a}}T^{\mathfrak{a}},\quad \mathcal{D}_\mu^{\mathfrak{ab}}\equiv\delta^{\mathfrak{ab}}\partial_\mu-i\epsilon^{\mathfrak{abc}}A_\mu^{\mathfrak{c}},\quad i=1,2,3,4,5,6,\quad \mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}=1,2,\ldots N_c^2-1\\
&\psi_{\rm a,\alpha}\equiv\psi_{\rm a,\alpha}^{\mathfrak{a}}T^{\mathfrak{a}},\quad \bar{\psi}_{\rm a,\dot{\alpha}}\equiv\bar{\psi}_{\rm a,\dot{\alpha}}^{\mathfrak{a}}T^{\mathfrak{a}},\quad {\rm a,b}=1,2,3,4,\quad \alpha,\dot{\alpha}=1,2\\
&\not{\mathcal{D}}\equiv\sigma^\mu\mathcal{D}_\mu,\quad \left(\sigma^\mu,\sigma^i\right)\equiv\text{προβολές των 10d πινάκων Dirac στις 4d \& 6d αντίστοιχα.}
\end{aligned}$$

Οι διαστάσεις κλίμακας των πεδίων που εμφανίζονται στη Λαγκρανζιανή της $\mathcal{N}=4$ SYM είναι:

$$\left[F_{\mu\nu}\right]=2,\quad \left[A_\mu\right]=\left[\mathcal{D}_\mu\right]=\left[\phi_i\right]=1,\quad \left[\psi_{\rm a}\right]=\frac{3}{2}. \tag{2.7}$$

Είναι σύνηθες να συνδυάζει κανείς τα έξι πραγματικά βαθμωτά πεδία ϕ_i σε τρία μιγαδικά βαθμωτά ως εξής:

$$\mathcal{X}\equiv\phi_1+i\phi_2,\quad \mathcal{Y}\equiv\phi_3+i\phi_4,\quad \mathcal{Z}\equiv\phi_5+i\phi_6. \tag{2.8}$$

Ας ορίσουμε ακόμη και τις παραγώγους στον κώνο φωτός:

$$\mathcal{D}_+\equiv\mathcal{D}_0+\mathcal{D}_3,\quad \mathcal{D}_-\equiv\mathcal{D}_1+\mathcal{D}_2. \tag{2.9}$$

Για περισσότερες πληροφορίες, συνιστώνται οι εργασίες των Sohnius και Kovacs [26].

2.4 IIB Θεωρία Χορδών στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$

Η δράση της IIB θεωρίας υπερχορδών στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1998 από τους Metsaev και Tseytlin [27]. Δίδεται από τη δράση της υπερχορδής Green-Schwarz στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$, η οποία είναι ένα μη γραμμικό σίγμα μοντέλο (NLSM) στο σύμπλοκο (coset) χώρο:

$$\frac{F}{G}=\frac{\mathfrak{psu}\left(2,2|4\right)}{\mathfrak{so}\left(4,1\right)\times\mathfrak{so}\left(5\right)}=\frac{\mathfrak{psu}\left(2,2|4\right)}{\mathfrak{sp}\left(2,2\right)\times\mathfrak{sp}\left(4\right)}. \tag{2.10}$$

Ας ξεκινήσουμε από την υπεράλγεβρα $\mathfrak{su}\left(2,2|4\right)$, η οποία παράγεται από τους 8×8 πίνακες $\mathbb{M}$:

$$\mathbb{M}=\left(\begin{array}{c|c}\mathbb{B}_1&\mathbb{F}_1\\\hline\mathbb{F}_2&\mathbb{B}_2\end{array}\right). \tag{2.11}$$

Οι 4×4 πίνακες $\mathbb{B}_{1,2}$ και $\mathbb{F}_{1,2}$ είναι αντίστοιχα μποζονικοί και φερμιονικοί. Το υπερίχνος του πίνακα $\mathbb{M}$ μηδενίζεται:

$$\mathrm{Str}\mathbb{M}\equiv\mathrm{Tr}\mathbb{B}_1-\mathrm{Tr}\mathbb{B}_2=0. \tag{2.12}$$

Η $\mathfrak{psu}\,(2,2|4)$ λαμβάνεται ως η άλγεβρα πηλίκο της $\mathfrak{su}\,(2,2|4)$ ως προς το μοναδιαίο στοιχείο. Χωρίς να υπεισέλθουμε σε περισσότερες λεπτομέρειες, η Λαγκρανζιανή της IIB θεωρίας υπερχορδών στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ δίνεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$\mathcal{L}_{\text{string}}=-\frac{1}{4\pi\alpha'}\left[\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ab}\,\mathrm{Str}\left(A_a^{(2)}A_b^{(2)}\right)+\kappa\epsilon^{ab}\,\mathrm{Str}\left(A_a^{(1)}A_b^{(3)}\right)\right], \tag{2.13}$$

όπου ο πρώτος όρος είναι ο κινητικός και ο δεύτερος είναι ένας όρος Wess-Zumino, που πολλαπλασιάζεται με τον πραγματικό αριθμό κ έτσι ώστε το $\mathcal{L}_{\text{string}}$ να είναι πραγματικό. Χωρίζουμε τα στοιχεία $\mathfrak{g}$ της υπερομάδας $\mathfrak{psu}\,(2,2|4)$ σε ένα μποζονικό και ένα φερμιονικό μέρος ως ακολούθως:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{g}_{\mathfrak{b}}. \tag{2.14}$$

Τότε το A ορίζεται ως εξής:

$$A_a=\sum_{i=0}^{3}A_a^{(i)}\equiv-\mathfrak{g}^{-1}\partial_a\mathfrak{g}=-\mathfrak{g}_{\mathfrak{b}}^{-1}\mathfrak{g}_{\mathfrak{f}}^{-1}\left(\partial_a\mathfrak{g}_{\mathfrak{f}}\right)\mathfrak{g}_{\mathfrak{b}}-\mathfrak{g}_{\mathfrak{b}}^{-1}\partial_a\mathfrak{g}_{\mathfrak{b}}. \tag{2.15}$$

Ο διαχωρισμός A στα επιμέρους $A^{(i)}$ καθίσταται δυνατός λόγω της λεγόμενης $\mathbb{Z}_4$ διαβάθμισης (grading) της $\mathfrak{psu}\,(2,2|4)$. Όπως αποδεικνύεται, μπορούμε να γράψουμε την (2.13) ως εξής:

$$\mathcal{L}_{\text{string}}=-\frac{1}{16\pi\alpha'}\,\mathrm{Str}\Big[\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ab}\left(\mathcal{B}_a+\mathcal{G}\mathcal{B}_a\mathcal{G}^{-1}+\partial_a\mathcal{G}\mathcal{G}^{-1}\right)\left(\mathcal{B}_b+\mathcal{G}\mathcal{B}_b\mathcal{G}^{-1}+\partial_b\mathcal{G}\mathcal{G}^{-1}\right)- \tag{2.16}$$

$$-2i\kappa\epsilon^{ab}\mathcal{F}_a\mathcal{G}\mathcal{F}_b^{st}\mathcal{G}^{-1}\Big], \tag{2.17}$$

όπου $\mathcal{B}$ και $\mathcal{F}$ είναι αντίστοιχα ο άρτιος $(0,2)$ και ο περιττός $(1,3)$ φερμιονικός παράγοντας του $\mathfrak{g}_{\mathfrak{f}}^{-1}\partial_a\mathfrak{g}_{\mathfrak{f}}$. Το $\mathcal{G}$ δίδεται από

$$\mathcal{G}=\begin{pmatrix} i\mathcal{G}_{\text{AdS}} & 0\\ 0 & \mathcal{G}_{\text{S}}\end{pmatrix},\qquad \mathfrak{g}_{\mathfrak{f}}^{-1}\partial_a\mathfrak{g}_{\mathfrak{f}}\equiv\mathcal{B}_a+\mathcal{F}_a \tag{2.18}$$

με

$$\mathcal{G}_{\text{AdS}}=\begin{pmatrix} 0 & -Y_{05} & Y_{12}^* & Y_{34}^*\\ Y_{05} & 0 & -Y_{34} & Y_{12}\\ -Y_{12}^* & Y_{34} & 0 & -Y_{05}^*\\ -Y_{34}^* & -Y_{12} & Y_{05}^* & 0\end{pmatrix},\quad \mathcal{G}_{\text{S}}=\begin{pmatrix} 0 & -X_{56} & -iX_{12}^* & -iX_{34}^*\\ X_{56} & 0 & iX_{34} & -iX_{12}\\ iX_{12}^* & -iX_{34} & 0 & -X_{56}^*\\ iX_{34}^* & iX_{12} & iX_{56}^* & 0\end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

ενώ οι anti-de Sitter και οι σφαιρικές συντεταγμένες συνδυάζονται σε ζεύγη ως εξής

$$\begin{aligned} Y_{05}&=Y_0+iY_5 & & X_{12}=X_1+iX_2\\ Y_{12}&=Y_1+iY_2 &\quad \& \quad & X_{34}=X_3+iX_4\\ Y_{34}&=Y_3+iY_4 & & X_{56}=X_5+iX_6.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Το αποτέλεσμα είναι ότι το μποζονικό μέρος του (2.17) $(B=F=0)$ δίδεται από τη δράση Polyakov για τις χορδές:

$$S_P=-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau d\sigma\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ab}\partial_a\mathbf{X}^m\partial_b\mathbf{X}^n G_{mn}\left(\mathbf{X}\right), \tag{2.21}$$

όπου $\mathbf{X}_m$ και G_{mn} είναι οι συντεταγμένες του $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ και ο μετρικός τανυστής αντίστοιχα. Το κ-καθορισμένο φερμιονικό μέρος είναι

$$S_F=-\frac{i}{2\pi\alpha'}\int d\tau d\sigma\left(\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ab}\delta_{\alpha\beta}-\epsilon^{ab}s_{\alpha\beta}\right)\bar{\theta}^{\alpha}\rho_a\mathcal{D}_b\theta^{\beta}+O\left(\theta^4\right), \tag{2.22}$$

όπου θ είναι σπίνορες Majorana-Weyl και

$$\rho_a \equiv \Gamma_\mu e^\mu_m \partial_a \mathbf{X}^m, \quad G_{mn} = e^\mu_m e^\nu_n \eta_{\mu\nu}, \quad a,b = 0,1, \quad m,n = 0,1,\ldots,9$$

$$s_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{diag}\,(1,-1)\,, \quad \alpha,\beta = 1,2, \quad \mu,\nu = 0,1,\ldots,9$$

$$\mathcal{D}_m \equiv \partial_m + \frac{1}{4}\omega^{\mu\nu}_m \Gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{8\cdot 5!}\Gamma^{m_1\ldots m_5}\Gamma_m F_{m_1\ldots m_5}, \quad \mathcal{D}_a \equiv \text{προβολή του } \mathcal{D}_m$$

$$\Gamma_\mu = e^m_\mu \Gamma_m, \text{ (10d πίνακες Dirac)}.$$

e^μ_m είναι το zehnbein, $\eta_{\mu\nu}$ είναι η 10d μετρική Lorentz, $\omega^{\mu\nu}_m$ είναι η συνοχή Lorentz και $F_{m_1\ldots m_5}$ είναι η 5-μορφή του πεδίου Ramond-Ramond (RR). Περισσότερα μπορείτε να βρείτε στην ανασκόπηση [28].

2.5 Ταίριασμα Παραμέτρων

Όταν δύο θεωρίες είναι ίσες, οι θεμελιώδεις παράμετροί τους αναμένεται να είναι σε ένα-προς-ένα αντιστοιχία. Λόγω της αντιστοιχίας AdS/CFT, αυτό πρέπει να συμβαίνει στην περίπτωση της θεωρίας $\mathcal{N}=4$, $\mathfrak{su}\,(N_c)$ SYM και της IIB θεωρίας χορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. Η πρώτη εξαρτάται από δύο βασικές παραμέτρους, την τάξη (rank) της ομάδας βαθμίδας/αριθμό χρωμάτων και τη σταθερά σύζευξης του 't Hooft:

$$N_c, \quad \lambda = g^2_{\mathrm{YM}} N_c. \tag{2.23}$$

Από την πλευρά της θεωρίας χορδών, οι βασικές παράμετροι είναι οι ακτίνες του AdS_5 και της 5-σφαίρας, το θεμελιώδες μήκος χορδής/κλίση Regge και η 10-διάστατη σταθερά Newton/μήκος Planck:

$$\ell = R, \quad \ell_s^2 = \alpha', \quad G_{10} = \ell_p^8 = \ell_s^8 g_s^2. \tag{2.24}$$

Η αντιστοιχία AdS/CFT συνδέει τις θεμελιώδεις παραμέτρους των δύο θεωριών ως εξής:

$$\boxed{\text{Ταίριασμα παραμέτρων AdS/CFT: } \left(\frac{\ell_p}{\ell}\right)^4 = \frac{1}{4\pi N_c}\,, \qquad \left(\frac{\ell_s}{\ell}\right)^4 = \frac{1}{\lambda}}\,. \tag{2.25}$$

Έχουμε επίσης, για τις σταθερές σύζευξης:

$$g^2_{\mathrm{YM}} = 4\pi g_s. \tag{2.26}$$

Υπάρχουν δύο ενδιαφέροντα όρια που συνήθως συναντά κάποιος όταν ασχολείται με την αντιστοιχία AdS/CFT. Το πρώτο είναι το όριο ισχυρής σύζευξης στο οποίο, σύμφωνα με την (2.25), το θεμελιώδες μήκος της χορδής τείνει στο μηδέν και οι χορδές είναι ουσιαστικά σημειακές:[3]

$$\lambda \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \ell_s \to 0. \tag{2.28}$$

Το δεύτερο ενδιαφέρον όριο είναι το όριο των μεγάλων N_c/επίπεδο/όριο 't Hooft, το οποίο, από την (2.25), αντιστοιχεί σε ελεύθερες χορδές:

$$N_c \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad g_s \to 0. \tag{2.29}$$

Συνδυάζοντας τα δύο όρια (2.28)–(2.29), οδηγούμαστε στη λεγόμενη προσέγγιση της κλασικής (υπέρ)βαρύτητας:

$$\boxed{\text{Προσέγγιση κλασικής υπερβαρύτητας: } (\lambda, N_c) \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad (\ell_s, g_s) \to 0}\,, \tag{2.30}$$

[3] Στο αντίθετο όριο $\lambda \to 0$ η θεωρία SYM είναι ελεύθερη, ενώ η τάση των χορδών τείνει στο μηδέν καθώς η ποσότητα,

$$\lambda \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{1}{2\pi\alpha'} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi\ell^2} \to 0 \tag{2.27}$$

γίνεται πολύ μικρή [29].

με την οποία η θεωρία χορδών τύπου IIB ανάγεται στην κλασική IIB υπερβαρύτητα στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ που είναι δυϊκή της επίπεδης, ισχυρά συζευγμένης θεωρίας $\mathcal{N} = 4$ SYM.

2.6 Ο Τομέας BMN

Το να λύσει κανείς το πλήρες κβαντικό IIB σίγμα μοντέλο υπερχορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ είναι ένα εξαιρετικά δύσκολο και μέχρι στιγμής άλυτο πρόβλημα. Αντ'αυτού, το κβαντικό σίγμα μοντέλο των χορδών μπορεί να λυθεί στο υπόβαθρο του επιπέδου κύματος, στο οποίο η δράση των υπερχορδών απλοποιείται σημαντικά [30].

Οι χωρόχρονοι pp-κύματος είναι μια ειδική κατηγορία χωροχρόνων που αποτελούν ακριβείς λύσεις της υπερβαρύτητας ως προς α' [31]. Μία ειδική περίπτωση των pp-κυμάτων είναι τα επίπεδα κύματα, τα οποία αποτελούν τα υπόβαθρα ορισμένων μέγιστα υπερσυμμετρικών λύσεων της υπερβαρύτητας τύπου IIB. Επίπεδα κύματα μπορούν να ληφθούν ως όρια Penrose των χωροχρόνων $\mathrm{AdS}_{p+2} \times \mathrm{S}^{q+2}$ και των τροχιακών πολλαπλοτήτων (orbifolds) αυτών. Στο όριο Penrose, οι ακτίνες των AdS_{p+2} και της $(q+2)$-σφαίρας (ℓ και R αντίστοιχα) τείνουν στο άπειρο, ενώ ο λόγος τους διατηρείται σταθερός:

$$\ell,\ R \to \infty \quad \& \quad \frac{\ell}{R} = \text{σταθερό}. \tag{2.31}$$

Ένα εντελώς ανάλογο όριο, το όριο Berenstein-Maldacena-Nastase (BMN) [32], μπορεί επίσης να ληφθεί από τη μεριά της θεωρίας βαθμίδας της αντιστοιχίας AdS/CFT, αν θεωρήσουμε κάθε τελεστή της $\mathcal{N} = 4$ SYM με διάσταση κλίμακας Δ και R-φορτίο J, έτσι ώστε:[4]

$$N_c,\ J \to \infty \quad \& \quad \frac{N_c}{J^2} = \text{σταθερό}, \quad \Delta - J = \text{σταθερό}. \tag{2.33}$$

Έτσι οδηγούμαστε στο λεγόμενο (BMN) τομέα της $\mathcal{N} = 4$ SYM ο οποίος είναι δυϊκός της IIB θεωρίας υπερχορδών επί επίπεδου κύματος. Η αντιστοίχιση μεταξύ αυτών των δύο οριακών περιπτώσεων της AdS/CFT είναι γνωστή ως δυαδικότητα επίπεδου κύματος/θεωρίας super Yang-Mills:

$$\begin{tikzcd}
\text{IIB θεωρία χορδών στον } \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5 \arrow[r, leftrightarrow, "\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4"] \arrow[d, "\text{Όριο Penrose}"] & \mathcal{N} = 4,\ \mathfrak{su}\left(N_c\right) \text{ θεωρία SYM} \arrow[d, "\text{Όριο BMN}"] \\
\text{IIB θεωρία χορδών σε επίπεδο κύμα} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{επίπεδο κύμα/SYM}"] & \text{BMN τομέας της } \mathcal{N} = 4 \text{ SYM}
\end{tikzcd}$$

Η δυαδικότητα επίπεδου κύματος/θεωρίας super Yang-Mills έχει μελετηθεί εκτενώς (βλέπε [33]).

Για μελλοντικούς σκοπούς, θα ήταν χρήσιμο να ορίσουμε και ένα πολύ παρόμοιο όριο από την πλευρά της θεωρίας χορδών της αντιστοιχίας AdS/CFT, που είναι γνωστό ως το όριο Frolov-Tseytlin (FT) [34]:

$$\lambda,\ J \to \infty \quad \& \quad \lambda' = \frac{\lambda}{J^2} \ll 1, \tag{2.34}$$

όπου J είναι η στροφορμή μιας κατάστασης της IIB θεωρίας χορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$.

[4] Η διάσταση κλίμακας Δ ενός τελεστή $\mathcal{O}(x)$ καθορίζει τη συμπεριφορά του κάτω από τις διαστολές (dilations):

$$x' = \alpha x \quad \to \quad \mathcal{O}(\alpha x) = \alpha^{-\Delta} \mathcal{O}(x). \tag{2.32}$$

2.7 Δυαδικότητες Maldacena

Τα επιχειρήματα των §2.1 και §2.2 μπορούν να επαναληφθούν και για άλλα συστήματα από βράνες, πέραν του συστήματος D3. Τα όρια χαμηλής ενέργειας οδηγούν σε διαχωρισμούς ανάλογους των (2.3)–(2.5) και συνεπάγονται ένα πλήθος από δυαδικότητες μεταξύ θεωριών στις 10 ή τις 11 διαστάσεις, εντός χωροχρόνων που περιέχουν μια συνιστώσα anti-de Sitter επί μία συμπαγή πολλαπλότητα (ή γινόμενα αυτών) και σε (υπέρ)σύμμορφες θεωρίες πεδίου σε επίπεδους χωροχρόνους με μια διάσταση λιγότερο. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Θ. Βαρύτητας	**Χωρόχρονος**	**#Διαστ.**	**Σύστημα**	**Θ. Βαθμίδας**	**#Διαστ.**
IIB Θεωρία Χορδών	$\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$	$5+5$	D3	$\mathcal{N}=4$ SYM	$3+1$
IIB Θεωρία Χορδών	$\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^3 \times \mathrm{M}^4$	$3+3$	D1 + D5	$\mathcal{N}=(4,4)$ SCFT	$1+1$
IIB Θεωρία Χορδών	$\mathrm{AdS}_2 \times \mathrm{S}^2 \times \mathrm{M}^6$	$2+2+6$	D3	Σύμμορφη ΚΜ	$0+1$
M-Θεωρία	$\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$	$7+4$	M5	$\mathrm{A}_{N_c-1}(2,0)$ SCFT	$5+1$
M-Θεωρία	$\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$	$4+7$	M2	$\mathcal{N}=8$ SCFT	$2+1$
M-Θεωρία	$\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^2 \times \mathrm{M}^6$	$3+2+6$	M5	$\mathcal{N}=(0,4)$ SCFT	$1+1$

Για την πολλαπλότητα M, $M^4 = K3$ ή T^4 και $M^6 = T^6$, $T^2 \times K3$ ή CY_3. Σε όλες τις περιπτώσεις που περιέχουν p-σφαίρα ($p = 3,4,5,7$), υπάρχουν πάντα N_c μονάδες ροής RR p-μορφής στην S^p:

$$\int_{\mathrm{S}^p} F_p = N_c, \quad p = 3,4,5,7. \tag{2.35}$$

Πολύ κοντά στον ορίζοντα λαμβάνονται διάφορες τιμές για τους λόγους $\mathfrak{k} \equiv \ell/R$ της ακτίνας του AdS δια της ακτίνας της αντίστοιχης σφαίρας. Αυτοί συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα, για κάθε μια από τις δυαδικότητες Maldacena:

	$\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$	$\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^3 \times \mathrm{M}^4$	$\mathrm{AdS}_2 \times \mathrm{S}^2 \times \mathrm{M}^6$	$\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$	$\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$	$\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^2 \times \mathrm{M}^6$
$\mathfrak{k} =$	1	1	1	2	1/2	2

2.8 Αντιστοιχία ABJM

Πιο πρόσφατα, κατασκευάστηκε μια ακόμη ομάδα δυαδικοτήτων μεταξύ 10-διάστατων ή 11-διάστατων θεωριών στο χωρόχρονο AdS_4 επί μια συμπαγή πολλαπλότητα και μιας υπερσύμμορφης 3-διάστατης θεωρίας πεδίου.[5]

$$\boxed{\left\{\mathcal{N}=6,\ U\left(N_1\right)_k \times U\left(N_2\right)_{-k} \ \text{super C-S θεωρία}\right\} \xrightarrow{N_{1,2}\to\infty} \left\{\text{M-θεωρία σε } \mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k\right\}} \tag{2.36}$$

Για $N_1 \neq N_2$, η (2.36) δίνει την αντιστοιχία Aharony-Bergman-Jafferis (ABJ), ενώ για $N_1 = N_2 = N_c$,

[5] Στη σχέση (2.36), η συντομογραφία super CS αποτελεί σύντμηση του super Chern-Simons.

δίνει τη δυαδικότητα Aharony-Bergman-Jafferis-Maldacena (ABJM) [35]. Για $k = 1$ λαμβάνουμε τη δυαδικότητα Maldacena με την M-θεωρία στον $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$ που είναι δυϊκή της $\mathcal{N} = 8$ SCFT. Στην περίπτωση της ομάδας βαθμίδας $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$, η αριστερή πλευρά της (2.36) γίνεται η $\mathcal{N} = 8$ Bagger-Lambert-Gustavsson (BLG) θεωρία [36]. Με διπλή διαστατική αναγωγή της ABJM, οδηγούμαστε στην ακόλουθη δυαδικότητα:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{N} = 6,\ U(N_c)_k \times U(N_c)_{-k} \text{ super C-S θεωρία} \\ k^5 \gg N_c \to \infty \ \&\ \lambda \equiv 2\pi^2 N_c/k = \text{σταθ.} \end{array} \longleftrightarrow \text{ IIA θεωρία χορδών σε } \mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{CP}^3} \tag{2.37}$$

Όσο για τις ροές των παραπάνω δυαδικοτήτων, υπάρχουν N_2 μονάδες ροής RR 4-μορφής στον AdS_4 για την (2.36), ενώ η (2.37) έχει N_c μονάδες ροής RR 4-μορφής στον AdS_4 και k μονάδες ροής RR 2-μορφής στον $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^3$.

2.9 Αντιστοιχία Πεδίου/Τελεστή

Λέγεται συχνά ότι οι σύμμορφες θεωρίες πεδίου δεν έχουν ασυμπτωτικές καταστάσεις/σωματίδια (κατά συνέπεια, δεν διαθέτουν το συνηθισμένο πίνακα σκέδασης) και είναι οι τελεστές που πρέπει να αναλάβουν αυτό το ρόλο.[6] Ο ρόλος των τελεστών στην AdS/CFT καθορίζεται με βάση την αντιστοιχία πεδίου/τελεστή. Ας θεωρήσουμε την ακόλουθη παραμόρφωση της σύμμορφης θεωρίας πεδίου:

$$S' = S + \int d^d x\, \phi(x)\, \mathcal{O}(x), \tag{2.38}$$

όπου $\mathcal{O}(x)$ είναι ένας τοπικός τελεστής, αναλλοίωτος σε μετασχηματισμούς βαθμίδας και $\phi(x)$ είναι η πηγή του. Σύμφωνα με την αντιστοιχία πεδίου/τελεστή, σε κάθε τοπικό και αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστή $\mathcal{O}(x)$ της (παραμορφωμένης) συνοριακής θεωρίας, αντιστοιχεί ένα δυϊκό πεδίο του εσωτερικού $\Phi(x,y)$ τέτοιο ώστε η τιμή του Φ στο όριο ($y \to 0$ στο σύμμορφο σύστημα αναφοράς) να αποτελεί πηγή του $\mathcal{O}(x)$:

$$\phi(x) = \Phi\Big|_{\partial \mathrm{AdS}}(x) = \lim_{y \to 0} \Phi(x,y). \tag{2.39}$$

Δεν υπάρχει κάποιος γενικός αλγόριθμος που να αντιστοιχίζει αυθαίρετους τελεστές του συνόρου στα δυϊκά τους πεδία στο εσωτερικό ή το αντίστροφο. Ως εκ τούτου, ένας σχετικά μικρός αριθμός παρόμοιων (heuristic) ταυτοποιήσεων είναι γνωστός.

Ως ένα ενδεικτικό παράδειγμα της αντιστοιχίας πεδίου/τελεστή, ας θεωρήσουμε ένα ελεύθερο βαθμωτό πεδίο εντός του AdS_{p+2}:

$$S_\phi = -\frac{1}{2} \int d^{p+2}x \sqrt{-g} \left(\partial_m \Phi \partial^m \Phi + m^2 \Phi^2\right) \quad \& \quad ds^2 = \frac{\ell^2}{y^2}\left(-dt^2 + d\mathbf{x}_p^2 + dy^2\right). \tag{2.40}$$

Αν λύσουμε τις εξισώσεις κίνησης του εν λόγω πεδίου, θα διαπιστώσουμε ότι η συμπεριφορά του κοντά στο σύνορο του AdS ($y \to 0$) είναι η ακόλουθη:

$$\Phi(x,y) = \underbrace{A(x)\, y^{\Delta_-}}_{\substack{\text{μη κανονικοποιήσιμος} \\ \text{όρος}}} + \underbrace{B(x)\, y^{\Delta_+}}_{\substack{\text{κανονικοποιήσιμος} \\ \text{όρος}}}, \quad y \to 0, \tag{2.41}$$

όπου

$$\Delta_\pm = \frac{1}{2}\left(d \pm \sqrt{d^2 + 4m^2\ell^2}\right), \qquad d = p + 1.^{7} \tag{2.42}$$

[6] Ο αντίστοιχος πίνακας σκέδασης φέρει το όνομα πίνακας σκέδασης «κοσμικού φύλλου» ("worldsheet"). Μπορεί να οριστεί επίσης και ένας «χωροχρονικός» πίνακας σκέδασης, με βάση τα πλάτη σκέδασης n-γκλουονίων. Ανατρέξτε στο [37] για περισσότερα.

[7] Ας σημειωθεί ότι για πραγματικές τιμές της $\Delta_\pm$, αρνητικά τετράγωνα μάζας επιτρέπονται σε κάποιο βαθμό ($4m^2\ell^2 \geq -d^2$), συνθήκη που είναι γνωστή ως φράγμα Breitenlohner-Freedman (BF).

Για $m^2 > 0$ η συμπεριφορά του (2.41) στο σύνορο κυριαρχείται από τον πρώτο όρο, ο οποίος απειρίζεται για $y \to 0$. Επομένως

$$\phi(x) = A(x) \tag{2.43}$$

και ο *μη κανονικοποιήσιμος όρος* $A(x)$ καθορίζει τη συνοριακή Λαγκρανζιανή μέσω της (2.38). Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το Δ_+ ισούται με την διάσταση κλίμακας Δ του δυϊκού (βαθμωτού) τελεστή $\mathcal{O}(x)$ του πεδίου Φ, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$x' = \alpha x \quad \to \quad \mathcal{O}(\alpha x) = \alpha^{-\Delta}\mathcal{O}(x)\,. \tag{2.44}$$

Τώρα, εφόσον το πεδίο $\Phi(x,y)$ είναι βαθμωτό, είναι αναλλοίωτο κάτω από τις διαστολές

$$\Phi(\alpha x, \alpha y) = \Phi(x,y) \quad \Rightarrow \quad A(\alpha x) = \alpha^{-\Delta_-}A(x) \quad \& \quad B(\alpha x) = \alpha^{-\Delta_+}B(x)\,. \tag{2.45}$$

Επομένως οι (2.38)–(2.42) συνεπάγονται

$$\Delta_- = d - \Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta_+ = d - \Delta_- = \Delta. \tag{2.46}$$

Όπως αποδεικνύεται, ο *κανονικοποιήσιμος όρος* $B(x)$ μπορεί να τεθεί σε 1-1 αντιστοιχία με καταστάσεις στο χώρο Hilbert της συνοριακής θεωρίας. Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι ο $B(x)$ σχετίζεται με την αναμενόμενη τιμή του συνοριακού τελεστή $\langle\mathcal{O}(x)\rangle$. Συνοψίζοντας,

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Κανονικοποιήσιμοι τρόποι εσωτερικού} \longleftrightarrow \text{Καταστάσεις στο σύνορο} \\ \\ \text{Μη κανονικοποιήσιμοι τρόποι εσωτερικού} \longleftrightarrow \text{Λαγκρανζιανή στο σύνορο.} \end{array}\right\}$$

Η προηγούμενη ανάλυση μπορεί να επαναληφθεί και για τους τελεστές μιας θεωρίας βαθμίδας με οποιοδήποτε σπίν. Ο πίνακας που ακολουθεί είναι από την αναφορά [9]:

Πεδίο	Σπίν	Διαστάσεις Κλίμακας
Βαθμωτό	0	$\frac{1}{2}\left[d \pm \sqrt{d^2 + 4m^2\ell^2}\right]$
Σπινοριακό	1/2, 3/2	$\frac{1}{2}\Big(d + 2\lvert m\rvert\ell\Big)$
Ανυσματικό	1	$\frac{1}{2}\left[d \pm \sqrt{(d-2)^2 + 4m^2\ell^2}\right]$
Άμαζο Σπίν-2	2	d
q-μορφή	-	$\frac{1}{2}\left[d \pm \sqrt{(d-2q)^2 + 4m^2\ell^2}\right]$.

2.10 Τεστ της Αντιστοιχίας $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$

Θα ολοκληρώσουμε αυτό το κομμάτι με μια συνοπτική συζήτηση των κυριότερων τεστ της αντιστοιχίας AdS/CFT. Αν και θα επικεντρωθούμε στην αντιστοιχία $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$, όλα τα τεστ που θα συζητηθούν μπορεί να γενικευθούν κατάλληλα σε οποιαδήποτε από τις δυαδικότητες βαθμίδας/βαρύτητας.

Η αντιστοιχία $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ (2.1) συνεπάγεται ότι η συνάρτηση επιμερισμού της θεωρίας χορδών τύπου IIB στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ και η συνάρτηση επιμερισμού της $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N)$ super Yang-Mills (SYM) θεωρίας είναι μεταξύ τους ίσες:

$$\mathcal{Z}_{\text{string}}\left[\Phi\Big|_{\partial\text{AdS}}(x)\right] = \mathcal{Z}_{\text{CFT}}\left[\phi(x)\right], \tag{2.47}$$

όπου ϕ είναι οι πηγές όλων των αναλλοίωτων σε μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστών της $\mathcal{N} = 4$ SYM και Φ είναι τα δυϊκά τους πεδία στο εσωτερικό (bulk). Η πρόταση (2.47) αποτελεί γενίκευση της αντιστοιχίας πεδίου/τελεστή (2.39), σύμφωνα με την οποία όχι μόνο οι τελεστές στο σύνορο αλλά κάθε παρατηρήσιμο μέγεθος στο σύνορο (φάσματα, συναρτήσεις συσχετισμού, πλάτη σκέδασης, βρόχοι Wilson, κλπ.) διαθέτει ένα δυϊκό και ίσο παρατηρήσιμο μέγεθος στο εσωτερικό. Το επόμενο επίπεδο γενίκευσης είναι η ύπαρξη μιας 1-1 απεικόνισης μεταξύ των ιδιοτήτων της θεωρίας υπερχορδών τύπου IIB στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ και εκείνων της $\mathcal{N} = 4$ SYM. Αυτή η απεικόνιση είναι κοινώς γνωστή ως «ΛΕΞΙΚΟ» της αντιστοιχίας AdS/CFT. Η αποκρυπτογράφηση και ολοκλήρωση του λεξικού της αντιστοιχίας AdS/CFT αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα της θεωρητικής φυσικής.

Αυτή τη στιγμή, το επίσημο status της αντιστοιχίας AdS/CFT είναι «εικασία». Δεν είναι γνωστό αν υπάρχει κάποιο αυστηρό μαθηματικό επιχείρημα με το οποίο να μπορούμε αξιόπιστα να αποδείξουμε ή να διαψεύσουμε την αντιστοιχία, ούτε έχει επινοηθεί κάποιος θεωρητικός αλγόριθμος οποιουδήποτε είδους ο οποίος, αν ακολουθηθεί πιστά, να μπορεί να οδηγήσει σε μια αποδεκτή απόδειξη ή διάψευσή της. Αξίζει να σημειωθεί ότι, το πρόβλημα της αυστηρής απόδειξης της αντιστοιχίας AdS/CFT κάνει την εμφάνισή του στη λίστα που κατάρτισε πρόσφατα ο A. Strominger στα πλαίσια του συνεδρίου «Χορδές 2014», με όλες τις «βαθιές και ενδιαφέρουσες» ερωτήσεις στη θεωρία χορδών, που μπορούν να απαντηθούν μέσα στα επόμενα 5-10 χρόνια.[8] Μέχρι σήμερα είναι γνωστές τρεις βασικές διατυπώσεις της αντιστοιχίας $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$:

- Ασθενής διατύπωση της AdS/CFT: η αντιστοιχία ισχύει μόνο για $N_c,\ \lambda \to \infty$.
- Μέτρια διατύπωση της AdS/CFT: η αντιστοιχία ισχύει μόνο για $N_c \to \infty$.
- Ισχυρή διατύπωση της AdS/CFT: η αντιστοιχία ισχύει για κάθε $N_c,\ \lambda$.

Ωστόσο, το τοπίο δεν είναι 100% σαφές με καμία από αυτές. Με βάση αποτελέσματα από την ολοκληρωσιμότητα της αντιστοιχίας $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$, υπάρχουν ενδείξεις ότι η αντιστοιχία είναι έγκυρη στις δύο ασθενέστερες εκδοχές της, αλλά, με την παρούσα μορφή της, όχι και στην ισχυρή διατύπωση. Π.χ. στο όριο μηδενικής τάσης $\lambda \to 0$, η εικόνα είναι πέραν από σαφής [29]. Προς το παρόν, η κύρια στρατηγική για την απόδειξη ή την ανταπόδειξη της αντιστοιχίας AdS/CFT, συνίσταται στον υπολογισμό όλων των παρατηρήσιμων μεγεθών των δύο θεωριών, όσο το δυνατόν ακριβέστερα, προκειμένου να διαπιστωθεί η μεταξύ τους συμφωνία ή η διαφωνία. Παράλληλα, σημαντική προσπάθεια αφιερώνεται στην ολοκλήρωση του «λεξικού» της AdS/CFT. Ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για τον υπολογισμό και την αναγνώριση των παρατηρήσιμων μεγεθών της αντιστοιχίας AdS/CFT (του οποίου η παρουσίαση παραλείπεται για λόγους οικονομίας) είναι η ολοκληρωσιμότητα.

Πέραν από τον υπολογισμό/σύγκριση και το ταίριασμα των παρατηρήσιμων, υπάρχουν και διάφορα άλλα τεστ που επιτρέπουν να συγκρίνουμε τις δύο θεωρίες της AdS/CFT, ήτοι τη θεωρία χορδών τύπου IIB στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ και την $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N)$ SYM. Σε ό,τι ακολουθεί θα παρουσιάσουμε συνοπτικά μερικά από αυτά τα τεστ. Ωστόσο, η έμφασή μας θα επικεντρωθεί στην αντιστοίχιση των φασμάτων, δεδομένου ότι αυτή είναι άμεσα συνδεδεμένη με το πεδίο εφαρμογής και το περιεχόμενο της παρούσας διατριβής.

2.10.1 Συμμετρίες

Οι υπερχορδές τύπου IIB ορίζονται στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ και έτσι μοιράζονται τις συμμετρίες του, δηλαδή την καθολική μποζονική ισομετρία $\mathfrak{so}\,(4,2) \times \mathfrak{so}\,(6)$, που μπορεί να επεκταθεί στην υπερομάδα $\mathfrak{psu}\,(2,2|4)$.

[8] Βλέπε http://physics.princeton.edu/strings2014/slides/Strominger.pdf, σελίδα 13. Η υπόδειξη που προτείνεται από τον Η. Κυρίτση είναι να μελετήσει κανείς τις συμμετρίες του γενικευμένου συναρτησιακού Schwinger και στη συνέχεια να προσπαθήσει το απεικονίσει στην θεωρία πεδίου των χορδών...

Όπως έχουμε πει, η $\mathcal{N}=4$, $\mathfrak{su}(N_c)$ SYM θεωρία είναι σύμμορφα αναλλοίωτη και ως εκ τούτου έχει την 4-διάστατη σύμμορφη ομάδα $\mathfrak{so}(4,2)$ ως συμμετρία. Η Λαγκρανζιανή (2.6) έχει επίσης εμφανή $\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6)$ R-συμμετρία που σχετίζεται με την συμπαγοποίηση από τις $d=10$ στις $d=4$ διαστάσεις, και με την οποία τα έξι βαθμωτά πεδία ϕ_i μετασχηματίζονται ως ανύσματα. Και πάλι, η συμμετρία $\mathfrak{so}(4,2) \times \mathfrak{so}(6)$ επεκτείνεται στη super AdS_5 ομάδα $\mathfrak{psu}(2,2|4)$. Συνολικά υπάρχουν $15+15$ μποζονικοί γεννήτορες (15 σύμμορφοι και 15 R-συμμετρίες) και $16+16$ φερμιονικοί γεννήτορες (16 Poincaré και 16 υπερσύμμορφοι) στην $\mathfrak{psu}(2,2|4)$:

Μποζονικοί Γεννήτορες	Φερμιονικοί Γεννήτορες	
$D,\ P_\mu,\ K_\mu,\ L_{\mu\nu}$	$Q^{\mathrm{a}}_\alpha,\ \bar{Q}^{\mathrm{a}}_{\dot{\alpha}}$	$\mu,\nu=0,1,2,3, \quad \mathrm{a}=1,2,3,4$
$T^{\mathfrak{a}}$	$S^{\mathrm{a}}_\alpha,\ \bar{S}^{\mathrm{a}}_{\dot{\alpha}}$	$\alpha,\dot{\alpha}=1,2, \quad \mathfrak{a}=1,2,\ldots,15$

Για μελλοντική χρήση ας γράψουμε τις διαστάσεις κλίμακας των παραπάνω γεννητόρων:

$$[D]=[L_{\mu\nu}]=[T^{\mathfrak{a}}]=0, \quad [P_\mu]=1, \quad [K_\mu]=-1, \quad [Q]=\frac{1}{2}, \quad [S]=-\frac{1}{2}. \tag{2.48}$$

Εκτός από τις παραπάνω συμμετρίες, και οι δύο θεωρίες μοιράζονται μια μη-διαταρακτική $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{Z})$ συμμετρία ή S-δυαδικότητα. Η θεωρία χορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ είναι επίσης αναλλοίωτη κάτω από μια ορισμένη T-δυαδικότητα [38]. Η μελέτη των πλατών σκέδασης στην επίπεδη $\mathcal{N}=4$ SYM θεωρία αποκάλυψε την ύπαρξη της δυϊκής υπερσύμμορφης συμμετρίας (dual superconformal symmetry), μία κρυφή συμμετρία που αντιστοιχεί στη συμμετρία των βρόχων Wilson της $\mathcal{N}=4$ SYM και ενσωματώνει την T-δυαδικότητα εντός της θεωρίας. Η δυϊκή και η απλή υπερσύμμορφη συμμετρία συνδυάζονται στη λεγόμενη Yangian συμμετρία, η οποία γενικεύει την $\mathfrak{psu}(2,2|4)$ και είναι μια συμμετρία που συνήθως παρουσιάζεται από ολοκληρώσιμα συστήματα.

2.10.2 Φάσματα

Ίσως η πιο σημαντική πρόβλεψη της αντιστοιχίας AdS/CFT είναι η ισότητα μεταξύ των φασμάτων της $\mathcal{N}=4$ SYM και της θεωρίας χορδών τύπου IIB στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. Όπως έχουμε ήδη πει, ο ρόλος των σωματιδίων στις σύμμορφες θεωρίες πεδίου αναλαμβάνεται από τελεστές, το φάσμα των οποίων αποτελείται από τις (ενδεχομένως ανώμαλες) διαστάσεις κλίμακάς τους. Από την άλλη πλευρά έχουμε καταστάσεις χορδών και τις ενέργειες που τους αντιστοιχούν. Το ταίριασμα των φασμάτων των δύο θεωριών περιλαμβάνει γενικά τα ακόλουθα βήματα:

1. Υπολογισμός των διαστάσεων κλίμακας Δ όλων των τελεστών της $\mathcal{N}=4$ SYM.
2. Υπολογισμός των ενεργειών E των καταστάσεων της IIB θεωρίας υπερχορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$.
3. Αντιστοίχιση των τελεστών της $\mathcal{N}=4$ SYM στις καταστάσεις της IIB θεωρίας στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$.
4. Σύγκριση των διαστάσεων των τελεστών Δ με τις ενέργειες των δυϊκών τους χορδών E.

Τα βήματα 1 και 2 είναι λιγότερο περίπλοκα στο επίπεδο όριο ($N_c \to \infty$), στο οποίο η θεωρία χορδών IIB περιέχει μόνο ελεύθερες καταστάσεις κλειστών χορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. Ένας άλλος περιορισμός είναι ότι, εκτός από σχετικά λίγες περιπτώσεις, δεν υπάρχει κάποια γενική μέθοδος με την οποία να μπορεί να διεκπεραιώσει κανείς την αντιστοίχιση κατάστασης/τελεστή στο βήμα 3. Αυτό οφείλεται κυρίως σε δύο λόγους: (α) είναι δύσκολο να κβαντιστεί το σίγμα μοντέλο των χορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ και (β) το φάσμα των αναλλοίωτων υπό μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστών είναι μάλλον δύσκολο να υπολογιστεί.

Η πρόοδος στο βήμα 4 περιορίζεται δραστικά από την ασθενή/ισχυρή φύση της σταθεράς σύζευξης της AdS/CFT. Για μικρές σταθερές σύζευξης 't Hooft ($\lambda \to 0$), η $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία είναι ασθενώς συζευγμένη και το φάσμα της μπορεί να υπολογιστεί διαταρακτικά. Ωστόσο, η διαταρακτική περιοχή της IIB θεωρίας χορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ καλύπτει μόνο τις μεγάλες τιμές της σύζευξης 't Hooft ($\lambda \to \infty$), όπου η δυϊκή θεωρία βαθμίδας είναι ισχυρά συζευγμένη και μακριά από τη διαταρακτική της περιοχή. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να συγκρίνουμε άμεσα τις διαστάσεις κλίμακας των τελεστών με τις ενέργειες των δυϊκών τους καταστάσεων χορδών, εκτός και αν βρεθεί κάποιος αξιόπιστος τρόπος επέκτασης των αποτελεσμάτων μας από ασθενή σε ισχυρή σύζευξη και αντίστροφα.

Ας προσπαθήσουμε πρώτα να περιγράψουμε το φασματικό πρόβλημα από την πλευρά της θεωρίας βαθμίδας. Θα θεωρήσουμε μόνο τοπικούς, αναλλοίωτους σε μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστές, τα συστατικά πεδία των οποίων εξαρτώνται από ένα μόνο σημείο στο χωροχρόνο. Όλοι οι εν λόγω τελεστές μπορούν να χωριστούν σε τελεστές μονού και πολλαπλού ίχνους, που είναι δυϊκοί σε μονοσωματιδιακές και πολυσωματιδιακές καταστάσεις αντίστοιχα. Μόνο η πρώτη περίπτωση θα μας απασχολήσει εδώ. Για να ταξινομήσουμε όλους τους τοπικούς, αναλλοίωτους σε μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστές μονού ίχνους της $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N_c)$ SYM, είναι χρήσιμο να εισάγουμε τις έννοιες των υπερσύμμορφων πρωτογενών (primary) τελεστών και των απογόνων τους.

Οι σύμμορφοι πρωτογενείς τελεστές εξουδετερώνονται από τους σύμμορφους γεννήτορες K_μ, ενώ οι υπερσύμμορφοι πρωτογενείς τελεστές εξουδετερώνονται από τους υπερσύμμορφους γεννήτορες S^{a}_{α} και έχουν τη χαμηλότερη διάσταση σε μια δεδομένη υπερσύμμορφη πολλαπλέτα των μοναδιακών αναπαραστάσεων της $\mathfrak{psu}(2,2|4)$. Οι απόγονοι των υπερσύμμορφων τελεστών λαμβάνονται με τη δράση των γεννητόρων Poincaré σε άλλο τελεστή της ίδιας πολλαπλέτας. Οι χειραλικοί υπερσύμμορφοι πρωτογενείς τελεστές (γνωστοί και ως τελεστές BPS) εξουδετερώνονται από τουλάχιστον ένα από τα υπερφορτία Poincaré και κατατάσσονται στις μικρές (short) αναπαραστάσεις της άλγεβρας. Αυτό σημαίνει ότι οι τελεστές BPS (και οι απόγονοί τους) παραμένουν ακανονικοποίητοι, ήτοι οι διαστάσεις κλίμακάς τους προστατεύονται από κβαντικές διορθώσεις. Ανάλογα με τον αριθμό των φορτίων Q που τους εξουδετερώνει, οι χειραλικοί πρωτογενείς τελεστές αποκαλούνται 1/2 BPS, 1/4 BPS ή 1/8 BPS. Αυτοί εξουδετερώνονται από το ήμισυ, το 1/4 ή το 1/8 των υπερφορτίων Poincaré αντίστοιχα. Ένα πολύ χρήσιμο συμπέρασμα είναι ότι χειραλικοί πρωτογενείς τελεστές αποτελούνται αποκλειστικά από βαθμωτά πεδία της $\mathcal{N} = 4$ SYM:[9]

$$\mathcal{O}^{j_1 j_2 \cdots j_n} = \mathrm{Tr}\left[\phi^{(j_1}\phi^{j_2}\ldots\phi^{j_n)}\right]. \tag{2.49}$$

Όλες οι μοναδιακές αναπαραστάσεις των $\mathfrak{psu}(2,2|4)$ έχουν ταξινομηθεί από τους Dobrev και Petkova σύμφωνα με τους κβαντικούς αριθμούς της παρακάτω μποζονικής υποομάδας του $\mathfrak{so}(4,2) \times \mathfrak{so}(6)$:

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{\begin{array}{ccc} \mathfrak{so}(1,1) & \times & \mathfrak{so}(1,3) \\ \Delta & & s_\pm \end{array}}^{\mathfrak{so}(4,2)} & \times & \overbrace{\begin{array}{c} \mathfrak{su}(4) \\ [r_1, r_2, r_3] \end{array}}^{\mathfrak{so}(6)} \end{array}, \tag{2.50}$$

όπου $[r_1, r_2, r_3]$ είναι οι δείκτες Dynkin της αναπαράστασης $\mathfrak{su}(4)$. Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικές σειρές αναπαραστάσεων, τρεις εκ των οποίων είναι BPS (δηλαδή περιέχουν έναν χειραλικό πρωτογενή τελεστή) και μία δεν είναι BPS (δεν περιέχει κανένα χειραλικό τελεστή). Όλοι οι τοπικοί, αναλλοίωτοι σε μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστές μονού ίχνους της $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N_c)$ SYM θεωρίας ταξινομούνται σύμφωνα με το σχήμα Dobrev-Petkova (2.50).

Στην πλευρά της θεωρίας χορδών ισχύει μια παρόμοια ταξινόμηση. Οι καταστάσεις χορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ χαρακτηρίζονται από έξι διατηρούμενα φορτία: την ενέργειά τους E, τα σπίν τους $S_{1,2}$ στον AdS και τα σπίν τους $J_{1,2,3}$ στην S^5. Αυτά τα φορτία αντιστοιχούν στις κυκλικές συντεταγμένες (3.6) της μποζονικής δράσης για τη χορδή στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ και είναι σε ένα-προς-ένα αντιστοιχία με την ταξινόμηση

[9] Στην (2.49), οι παρενθέσεις ( ) δηλώνουν συμμετροποίηση ως προς τους δείκτες $j_1, j_2, \ldots, j_n$.

των τελεστών (2.50) της $\mathcal{N}=4$ SYM:

$$\overbrace{\underset{E}{\mathfrak{so}(1,1)} \times \underset{S_1,S_2}{\mathfrak{so}(1,3)}}^{\mathrm{AdS}_5 \sim \mathfrak{so}(4,2)} \times \overbrace{\underset{J_1,J_2,J_3}{\mathfrak{su}(4)}}^{\mathrm{S}^5 \sim \mathfrak{so}(6)} \, . \tag{2.51}$$

Στο όριο της κλασικής υπερβαρύτητας ($N_c, \lambda \to \infty$) το φάσμα των 1/2 BPS τελεστών της $\mathcal{N}=4$ SYM ταυτίζεται πλήρως με εκείνο της IIB υπερβαρύτητας, συμπαγοποιημένης στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. Έτσι, οι τελεστές BPS είναι δυϊκοί στις ελεύθερες σημειακές χορδές ($g_s, \ell_s \to 0$). Για λεπτομέρειες και περαιτέρω αναφορές ο αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες [9, 15].

Τα φάσματα έχουν επίσης βρεθεί να συμφωνούν και στο όριο BMN (2.33). Όπως έχουμε ήδη εξηγήσει, το σίγμα μοντέλο της χορδής λύνεται πλήρως στα υπόβαθρα των επίπεδων κυμάτων και οι ενέργειες των καταστάσεων ελεύθερων χορδών που υπολογίζονται είναι σε πλήρη συμφωνία με τις διαστάσεις των δυϊκών τους τελεστών από τη θεωρία βαθμίδας. Οι τελεστές BMN είναι «σχεδόν» προστατευμένοι—και ως εκ τούτου «σχεδόν» BPS—και οι δυϊκές τους καταστάσεις ελεύθερων χορδών είναι «σχεδόν» σημειακές. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το θέμα αυτό, ο αναγνώστης παραπέμπεται στην αρχική εργασία [32] και τις ανασκοπήσεις [33] της δυαδικότητας επιπέδου κύματος/SYM.

Πέρα από τους τελεστές BPS και BMN, είναι η ολοκληρωσιμότητα που έρχεται στο προσκήνιο, και παρέχει τα εργαλεία για την πλήρη λύση του φασματικού προβλήματος. Ακόμη και μια τέτοια πανίσχυρη τεχνική όπως η ολοκληρωσιμότητα έχει τις ελλείψεις της και δεδομένα από άλλες μεθόδους εξακολουθούν να είναι αναγκαία. Για παράδειγμα, σε κάποιες περιπτώσεις οι εξισώσεις που προέρχονται από την ολοκληρωσιμότητα είναι τρομερά δυσεπίλυτες. Επιπλέον, η αντιστοιχία κατάστασης/τελεστή γίνεται κάπως ασαφής στα πλαίσια της ολοκληρωσιμότητας. Τέλος, λίγες μόνο μέθοδοι είναι μέχρι στιγμής σε θέση να παράσχουν κλειστές φόρμουλες για τα υπολογιζόμενα φάσματα. Στο μέρος II της παρούσας διατριβής θα περιγράψουμε την κατάσταση που επικρατεί σε ακριβώς αυτές τις περιοχές και θα προτείνουμε μια πιθανή μέθοδο προκειμένου να επιτευχθεί πρόοδος.

2.10.3 Συναρτήσεις Συσχέτισης

Ο υπολογισμός των συναρτήσεων συσχέτισης στην αντιστοιχία AdS/CFT κάνει ουσιαστικά χρήση του γεγονότος ότι η σύμμορφη συμμετρία καθορίζει πλήρως τις συναρτήσεις συσχέτισης 2 και 3 σημείων. Για παράδειγμα, η συνάρτηση συσχέτισης των δύο βαθμωτών (μονού ίχνος) πρωτογενών τελεστών $\mathcal{O}_{(i,j)}(x)$, με διαστάσεις κλίμακας Δ_i και Δ_j δίνεται από [39]:

$$\langle \mathcal{O}_i(x_i)\, \mathcal{O}_j(x_j) \rangle = \frac{\delta_{ij}}{x_{ij}^{2\Delta_i}}. \tag{2.52}$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση 3 σημείων είναι:

$$\langle \mathcal{O}_i(x_i)\, \mathcal{O}_j(x_j)\, \mathcal{O}_k(x_k) \rangle = \frac{C_{ijk}}{|x_{ij}|^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}\, |x_{jk}|^{\Delta_j+\Delta_k-\Delta_i}\, |x_{ki}|^{\Delta_k+\Delta_i-\Delta_j}}, \tag{2.53}$$

όπου C_{ijk} είναι οι σταθερές δομής και Δ_k είναι η διάσταση κλίμακας των $\mathcal{O}_k(x)$. Στο επίπεδο όριο ($N_c \to \infty$), οι σταθερές C_{ijk} γενικά δέχονται το ακόλουθο ανάπτυγμα ασθενούς σύζευξης:

$$C_{ijk} = c_{ijk}^{(0)} + \lambda \cdot c_{ijk}^{(1)} + \lambda \cdot c_{ijk}^{(2)} + \ldots, \tag{2.54}$$

Οι συναρτήσεις συσχέτισης περισσότερων σημείων μπορούν να υπολογιστούν από εκείνες των 2 και 3 σημείων χρησιμοποιώντας το λεγόμενο ανάπτυγμα γινομένου τελεστών (OPE). Το πρόβλημα του υπολογισμού των συναρτήσεων συσχέτισης στην αντιστοιχία AdS/CFT ανάγεται ως εκ τούτου στον υπολογισμό των συντελεστών OPE στη μορφή (2.54), είτε σε ασθενή ($\lambda \to 0$) είτε σε ισχυρή σύζευξη ($\lambda \to \infty$).

Ενώ για ασθενή σύζευξη μπορεί κανείς να προχωρήσει διαταρακτικά, με τον υπολογισμό των αντίστοιχων διαγραμμάτων Feynman, ο υπολογισμός των συναρτήσεων συσχέτισης για ισχυρή σύζευξη γίνεται με τη χρήση της θεωρίας χορδών με βάση την (2.47). Συμβολίζοντας με W το συναρτησιακό των συνδεδεμένων συναρτήσεων Green της θεωρίας βαθμίδας και με S_{string} τη δράση της IIB θεωρίας χορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$, έχουμε:

$$e^{-S_{\text{string}}[\Phi(x,y=0)]} = \mathcal{Z}_{\text{string}}\left[\Phi\left(x,y=0\right)\right] = \mathcal{Z}_{\text{CFT}}\left[\phi\left(x\right)\right] = e^{-W[\phi(x)]}, \tag{2.55}$$

όπου το όριο του AdS βρίσκεται στο $y=0$. Το επόμενο βήμα περιλαμβάνει την επανακανονικοποίηση της ευκλειδοποιημένης δράσης $S_{\text{string}}^{(\text{ren})}$ στο εσωτερικό και τη λύση των εξισώσεων κίνησης που λαμβάνονται από την ελαχιστοποίησή της. Επιβάλλοντας τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στο $y=0$ και εισάγοντας τη λύση στην επανακανονικοποιημένη δράση, λαμβάνουμε:

$$W\left[\phi\left(x\right)\right] \approx S_{\text{string}}^{(\text{ren})}\left[\Phi_{\mathrm{C}}^{(\mathrm{E})}\left(x,0\right)\right] = S_{\text{sugra}}^{(\text{ren})}\left[\Phi_{\mathrm{C}}^{(\mathrm{E})}\left(x,0\right)\right] + O\left(\alpha'\right), \tag{2.56}$$

όπου S_{string} είναι η δράση της IIB υπερβαρύτητας στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ μαζί με τις διορθώσεις ως προς α'. Έτσι, στην προσέγγιση της κλασικής υπερβαρύτητας (2.30),

$$W\left[\phi\left(x\right)\right] \approx S_{\text{sugra}}^{(\text{ren})}\left[\Phi_{\mathrm{C}}^{(\mathrm{E})}\left(x,0\right)\right]. \tag{2.57}$$

Η συνάρτηση συσχέτισης n-σημείων μεταξύ των συνοριακών τελεστών $\mathcal{O}\left(x\right)$ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\left\langle \mathcal{O}_1\left(x_1\right)\mathcal{O}_2\left(x_2\right)\ldots\mathcal{O}_n\left(x_n\right)\right\rangle = \left.\frac{\delta S_{\text{string}}^{(\text{ren})}\left[\Phi_{\mathrm{C}}^{(\mathrm{E})}\right]}{\delta\phi\left(x_1\right)\delta\phi\left(x_2\right)\ldots\delta\phi\left(x_n\right)}\right|_{\phi=0}. \tag{2.58}$$

Η αντιστοίχιση των συναρτήσεων συσχέτισης όπως υπολογίζονται και από τις δύο πλευρές της αντιστοιχίας AdS/CFT έχει επιτευχθεί σε πολλές περιπτώσεις, π.χ. για τις συσχετίσεις μεταξύ τελεστών BPS. Αλλά επειδή αυτό σε μεγάλο βαθμό αποτελεί αντικείμενο έντονου τρέχοντος ενδιαφέροντος, θα αναβάλλουμε την οποιαδήποτε περαιτέρω συζήτηση και θα παραπέμψουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στην υπάρχουσα βιβλιογραφία.

2.10.4 Ανωμαλίες, Moduli Spaces, κλπ.

Ένα άλλο τεστ της αντιστοιχίας $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ είναι το ταίριασμα των ανωμαλιών[10] οι οποίες προκύπτουν όταν η $\mathcal{N}=4$ SYM συζευχθεί με εξωτερικά βαρυτικά πεδία ή με πεδία βαθμίδας. Αν παραμορφώσουμε την θεωρία βαθμίδας με ένα καθολικό ρεύμα $\mathfrak{su}\left(4\right) \cong \mathfrak{so}\left(6\right)$, θα προκύψει μια (αξονική) ανωμαλία τύπου Adler-Bell-Jackiw, ενώ τα ρεύματα $\mathfrak{so}\left(4,2\right)$ οδηγούν σε μια Weyl/σύμμορφη ανωμαλία. Αμφότερες οι ανωμαλίες μπορούν να αναπαραχθούν και στις δύο πλευρές της δυαδικότητας, σε πρώτη τάξη ως προς $1/N_c$, προσφέροντας έτσι μια πολύτιμη επιβεβαίωση της αντιστοιχίας.

Υπάρχουν πολύ περισσότερα τεστ συμβατότητας μεταξύ των δύο θεωριών, π.χ. η αντιστοίχιση του moduli space της $\mathcal{N}=4$ SYM, ήτοι του $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{6(N_c-1)}/\mathcal{S}_{N_c}$[11] με εκείνο της θεωρίας χορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$, η σύγκριση της συμπεριφοράς και των δύο θεωριών υπό παραμορφώσεις, υπό πεπερασμένη θερμοκρασία, κλπ. Για περισσότερα, ένα ωραίο σημείο εκκίνησης είναι η επισκόπηση [9].

[10] Ανωμαλία είναι η παραβίαση μιας κλασικής συμμετρίας στο κβαντικό επίπεδο.

[11] $\mathcal{S}_{N_c}$ είναι η ομάδα μετάθεσης N_c στοιχείων.

Μέρος II
Περιστρεφόμενες Χορδές στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$

3 Εισαγωγή

Όπως εξηγήσαμε στην εισαγωγή, η αντιστοιχία AdS/CFT (2.1) συνεπάγεται ότι τα φάσματα της $\mathcal{N} = 4$, $\mathfrak{su}(N_c)$ SYM θεωρίας και της IIB θεωρίας χορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ θα πρέπει να ταιριάζουν, τουλάχιστον σε ό,τι αφορά στην επίπεδη προσέγγιση/όριο ελεύθερης χορδής. Πράγματι, τα δύο φάσματα έχουν βρεθεί να συμφωνούν τόσο στο BPS όσο και στο όριο BMN, παρέχοντας ουσιαστική υποστήριξη στην αντιστοιχία AdS/CFT. Πέρα από τα όρια BPS και BMN, η επίπεδη ολοκληρωσιμότητα (θερμοδυναμικό BA, Y-σύστημα, κβαντική φασματική καμπύλη) λύνει πλήρως το φασματικό πρόβλημα της AdS/CFT, παρέχοντας το ακριβές σύστημα εξισώσεων που το καθορίζουν.

Όλα τα παραπάνω αποτελούν πολύ ισχυρά επιχειρήματα υπέρ της επίπεδης αντιστοιχίας AdS/CFT. Τα φάσματα της $\mathcal{N} = 4$ SYM και της IIB θεωρίας χορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ περιγράφονται από το ίδιο το σύστημα συναρτησιακών εξισώσεων, που σημαίνει ότι θα πρέπει να συμπίπτουν. Ωστόσο, όταν πρόκειται για τον πρακτικό υπολογισμό του κοινού φάσματος, υπάρχουν περιπτώσεις όπου η διαδικασία αποδεικνύεται ότι είναι μάλλον τεχνικά πολύπλοκη. Πέρα από αυτό, θα θέλαμε επίσης να έχουμε στη διάθεσή μας και εργαλεία για τον υπολογισμό των φασμάτων μη ολοκληρώσιμων μοντέλων, αλλά και στις περιπτώσεις όπου είναι γνωστό ότι η ολοκληρωσιμότητα σπάει (π.χ. QCD, μη-επίπεδη $\mathcal{N} = 4$ SYM, p-βράνες).

Δεύτερον, θα θέλαμε να αντιμετωπίσουμε μερικά από τα παραδοσιακά προβλήματα της AdS/CFT, όπως π.χ. ποιο είναι το λεξικό της AdS/CFT. Από την αντιστοιχία κατάστασης/τελεστή γνωρίζουμε ότι σε κάθε τελεστή της θεωρίας βαθμίδας αντιστοιχεί μια δυϊκή IIB κατάσταση χορδών. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, υπάρχουν δύο βασικά εμπόδια που αντιμετωπίζουμε κατά την αντιστοίχιση κατάστασης/τελεστή, η δυσκολία κβάντωσης των χορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ και οι τεχνικές δυσκολίες στον υπολογισμό του φάσματος της θεωρίας SYM. Ως εκ τούτου, δεν υπάρχει συστηματική διαδικασία η οποία να απεικονίζει ένα τελεστή της θεωρίας βαθμίδας σε κάθε κατάσταση χορδών, και η ταυτοποίηση κατάστασης/τελεστή προχωρά μέχρι στιγμής μόνο ευρηματικά.

Αυτό σημαίνει ότι θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την επιλογή μας και να υπολογίσουμε τα φάσματα, προκειμένου να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι μια ορισμένη κατάσταση χορδών είναι δυϊκή σε ένα τελεστή της θεωρίας βαθμίδας. Το πλεονέκτημα είναι ότι έτσι τεστάρουμε ταυτόχρονα και την αντιστοιχία AdS/CFT αναλυτικά. Όπως θα γίνει φανερό και σε ό,τι ακολουθεί, τα φάσματα πρέπει να έχουν την κατάλληλη μορφή για να μπορούν πραγματικά να χρησιμοποιηθούν. Οι ενέργειες των χορδών και οι διαστάσεις των τελεστών πρέπει να εκφράζονται συναρτήσει των διατηρούμενων φορτίων και των αντίστοιχων κβαντικών αριθμών. Μόνο με αυτόν τον τρόπο μπορούν οι ενέργειες των κλασικών χορδών, που είναι έγκυρες σε ισχυρή σύζευξη λ, να φιλοξενήσουν κβαντικές διορθώσεις (δηλαδή διορθώσεις α' ή διορθώσεις καμπυλότητας) και να συγκριθούν με τα αντίστοιχα αποτελέσματα σε ασθενή σύζευξη.

Τέλος, με την προσέγγιση αυτή, φέρνουμε πιο κοντά τη δυνατότητα ύπαρξης κλειστών τύπων για τις ενέργειες των χορδών και τις διαστάσεις των δυϊκών τους τελεστών σε ισχυρή σύζευξη. Ενώ προς το παρόν αυτό φαίνεται ιδιαίτερα φιλόδοξο (ακόμα και στο κλασσικό επίπεδο), με αρκετή εφευρετικότητα θα μπορούσε να γίνει πολύ πιο προσιτό. Δεν είναι καθόλου προφανές ότι θα είμαστε πάντα σε θέση να μετατρέψουμε χαοτικές εκφράσεις με ασυσχέτιστους τυχαίους συντελεστές που έχουν μία εντελώς απρόβλεπτη και ακανόνιστη μορφή, σε ένα διατεταγμένο και δομημένο σύνολο. Ακόμη και σε αυτές τις ευτυχείς συγκυρίες όπου ένα τέτοιο ενδεχόμενο επιτρέπεται από το ίδιο το πρόβλημα, δεν είναι καθόλου προφανές ότι είναι επίσης και εφικτό, με τα υπολογιστικά και αναλυτικά εργαλεία που έχουμε στη διάθεσή μας.

Στην §2.10.2, παραθέσαμε 4 βήματα που επιτρέπουν την αντιστοίχιση μεταξύ των φασμάτων των δύο θεωριών. Όπως μόλις υποστηρίξαμε, πολύ πριν θελήσουμε να συγκρίνουμε τα φάσματα της AdS/CFT, πρέπει να αναπτύξουμε τεχνικές που μας επιτρέπουν να τα υπολογίσουμε αναλυτικά (και σε κατάλληλη μορφή!). Ο σκοπός του μέρους II της παρούσας διατριβής είναι λοιπόν διττός:

1. Να υπολογίσουμε τις διαστάσεις της $\mathcal{N}=4$ SYM σε ισχυρή σύζευξη χρησιμοποιώντας χορδές.
2. Αν είναι δυνατόν, να βρούμε κλειστές φόρμουλες για το δυϊκό φάσμα των χορδών.

3.1 Κλασικές Μποζονικές Χορδές στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$

Καθ'ότι παρακάτω πρόκειται να ασχοληθούμε εκτενώς με τις κλασικές χορδές, θα ήταν χρήσιμο να διατυπώσουμε άμεσα τις συμβάσεις που θα ακολουθήσουμε κατά τη μελέτη τους. Ας θεωρήσουμε την κίνηση μιας κλειστής κλασικής και αφόρτιστης μποζονικής χορδής εντός του $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$:

$$\begin{aligned} Y_{05} &= Y_0 + iY_5 = \ell \cosh\rho\, e^{it} & & X_{12} = X_1 + iX_2 = R\cos\overline{\theta}_1\, e^{i\overline{\phi}_1} \\ Y_{12} &= Y_1 + iY_2 = \ell \sinh\rho \cos\theta\, e^{i\phi_1} & \& \quad & X_{34} = X_3 + iX_4 = R\sin\overline{\theta}_1 \cos\overline{\theta}_2\, e^{i\overline{\phi}_2} \\ Y_{34} &= Y_3 + iY_4 = \ell \sinh\rho \sin\theta\, e^{i\phi_2} & & X_{56} = X_5 + iX_6 = R\sin\overline{\theta}_1 \sin\overline{\theta}_2\, e^{i\overline{\phi}_3}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

όπου Y^μ και X^i είναι οι συντεταγμένες εμβάπτισης (embedding) του $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ και $\rho \geq 0,\, t \in [0,\, 2\pi)\,,\, \overline{\theta}_1 \in [0,\, \pi]$ και $\theta,\, \phi_1,\, \phi_2,\, \overline{\theta}_2,\, \overline{\phi}_1,\, \overline{\phi}_2,\, \overline{\phi}_3 \in [0,\, 2\pi)$. Το αντίστοιχο γραμμικό στοιχείο δίδεται από:[12]

$$\begin{aligned} ds^2 = \ell^2 \Big[-\cosh^2\rho\, dt^2 &+ d\rho^2 + \sinh^2\rho \left(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\phi_1^2 + \sin^2\theta\, d\phi_2^2 \right) \Big] + \\ &+ R^2 \left[d\overline{\theta}_1^2 + \cos^2\overline{\theta}_1\, d\overline{\phi}_1^2 + \sin^2\overline{\theta}_1 \, \left(d\overline{\theta}_2^2 + \cos^2\overline{\theta}_2\, d\overline{\phi}_2^2 + \sin^2\overline{\theta_2}\, d\overline{\phi}_3^2 \right) \right]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Η δράση Polyakov στη σύμμορφη βαθμίδα ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) είναι:[13]

$$\begin{aligned} S_P &= -\frac{T}{2} \int \sqrt{-\gamma}\, \gamma^{ab} \Big[G_{mn}^{AdS}(y) \partial_a y^m \partial_b y^n + G_{mn}^{S}(x) \partial_a x^m \partial_b x^n \Big] d\tau\, d\sigma = \\ &= \frac{T}{2} \int \Big[G_{mn}^{AdS}(y) \left(\dot{y}^m \dot{y}^n - y'^{\,m} y'^{\,n} \right) + G_{mn}^{S}(x) \left(\dot{x}^m \dot{x}^n - x'^{\,m} x'^{\,n} \right) \Big] d\tau\, d\sigma, \end{aligned} \tag{3.3}$$

όπου $y^m \equiv (t,\, \rho,\, \theta,\, \phi_1,\, \phi_2)$ και $x^m \equiv \left(\overline{\theta}_1,\, \overline{\theta}_2,\, \overline{\phi}_1,\, \overline{\phi}_2,\, \overline{\phi}_3\right)$. Οι σύνδεσμοι Virasoro είναι:

$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2} \Big[G_{mn}^{AdS}(y) \left(\dot{y}^m \dot{y}^n + y'^{\,m} y'^{\,n} \right) + G_{mn}^{S}(x) \left(\dot{x}^m \dot{x}^n + x'^{\,m} x'^{\,n} \right) \Big] = 0 \tag{3.4}$$

$$T_{01} = T_{10} = G_{mn}^{AdS}(y)\, \dot{y}^m y'^{\,n} + G_{mn}^{S}(x)\, \dot{x}^m x'^{\,n} = 0. \tag{3.5}$$

Οι κυκλικές συντεταγμένες της δράσης $t,\, \phi_1,\, \phi_2,\, \overline{\phi}_1,\, \overline{\phi}_2,\, \overline{\phi}_3$, γεννούν τα ακόλουθα διατηρούμενα φορτία:

$$E = \left| \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right| = T\ell^2 \int_0^{2\pi} \dot{t} \cosh^2\rho\, d\sigma \qquad\qquad J_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{\phi}}_1} = TR^2 \int_0^{2\pi} \dot{\overline{\phi}}_1 \cos^2\overline{\theta}_1\, d\sigma$$

[12] Όπως είδαμε, $R = \ell$ στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. Ωστόσο, ας κρατήσουμε τη συζήτησή μας εντελώς γενική προς το παρόν.
[13] T είναι η τάση της χορδής, $T \equiv T_1 = 1/2\pi\alpha'$.

$$S_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = T\ell^2 \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_1 \sinh^2\rho \cos^2\theta \, d\sigma \qquad J_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{\phi}}_2} = TR^2 \int_0^{2\pi} \dot{\overline{\phi}}_2 \sin^2\overline{\theta}_1 \cos^2\overline{\theta}_2 \, d\sigma \tag{3.6}$$

$$S_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = T\ell^2 \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_2 \sinh^2\rho \sin^2\theta \, d\sigma \qquad J_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{\phi}}_3} = TR^2 \int_0^{2\pi} \dot{\overline{\phi}}_3 \sin^2\overline{\theta}_1 \sin^2\overline{\theta}_2 \, d\sigma,$$

που είναι φορτία εντός κελύφους (on-shell), σε πλήρη συμφωνία με την καθολική ισομετρία $\mathfrak{so}\,(4,2)\times\mathfrak{so}\,(6)$ του $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$. Ας καταστρώσουμε επίσης και το φορμαλισμό για τη μποζονική χορδή στο σύστημα των συντεταγμένων εμβάπτισης.[14]

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dY^\mu dY^\nu + \delta_{ij}dX^i dX^j = -dY_0^2 + \sum_{i=1}^{p+1} dY_i^2 - dY_{p+2}^2 + \sum_{i=1}^{q+1} dX_i^2 \tag{3.7}$$

$$-\eta_{\mu\nu}Y^\mu Y^\nu = Y_0^2 - \sum_{i=1}^{p+1} Y_i^2 + Y_{p+2}^2 = \ell^2 \qquad \& \qquad \delta_{ij}X^i X^j = \sum_{i=1}^{q+1} dX_i^2 = R^2, \tag{3.8}$$

όπου $\eta_{\mu\nu} = (-,+,\ldots,+,-)$ και $\delta_{ij} = (+,+,\ldots,+,+)$. Η δράση Polyakov για τη χορδή στη σύμμορφη βαθμίδα ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) δίδεται από:

$$S_P = \frac{T}{2}\int \Big[\eta_{\mu\nu}\left(\dot{Y}^\mu\dot{Y}^\nu - \acute{Y}^\mu\acute{Y}^\nu\right) + \left(\dot{X}^i\dot{X}^i - \acute{X}^i\acute{X}^i\right) + \tag{3.9}$$

$$+\Lambda\left(\eta_{\mu\nu}Y^\mu Y^\nu + \ell^2\right) + \widetilde{\Lambda}\left(X^i X^i - R^2\right)\Big] d\tau d\sigma. \tag{3.10}$$

Οι εξισώσεις κίνησης και οι σύνδεσμοι (Virasoro και Lagrange) στο σύστημα των συντεταγμένων εμβάπτισης είναι:

Εξισώσεις Κίνησης	Σύνδεσμοι Virasoro	Σύνδεσμοι Lagrange	
$\ddot{Y}^\mu - (Y^\mu)'' = \Lambda\, Y^\mu,$	$\eta_{\mu\nu}\left(\dot{Y}^\mu\dot{Y}^\nu + \acute{Y}^\mu\acute{Y}^\nu\right) + \dot{X}^i\dot{X}^i + \acute{X}^i\acute{X}^i = 0,$	$\eta_{\mu\nu}Y^\mu Y^\nu = -\ell^2$	(3.11)
$\ddot{X}^i - \left(X^i\right)'' = \widetilde{\Lambda}\, X^i,$	$\eta_{\mu\nu}\dot{Y}^\mu\acute{Y}^\nu + \dot{X}^i\acute{X}^i = 0,$	$X^i X^i = R^2.$	(3.12)

Το σύστημα (3.10) έχει τους ακόλουθους $15+15$ νόμους διατήρησης,

$$S^{\mu\nu} = T\int\left(Y^\mu\dot{Y}^\nu - Y^\nu\dot{Y}^\mu\right)d\sigma, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3,4,5 \tag{3.13}$$

[14] Οι ακόλουθες συμβάσεις για τους δείκτες έχουν χρησιμοποιηθεί μέχρι τώρα και θα εφαρμοστούν και σε ό,τι ακολουθεί. Για ένα p-διάστατο εκτεταμένο αντικείμενο (p-βράνη) σε $D = d+1$ χωροχρονικές διαστάσεις οι συντεταγμένες της βράνης $\sigma_a = \{\tau,\sigma,\delta,\ldots\}$ συμβολίζονται με μικρούς λατινικούς δείκτες της σειράς $(a,b,c,\ldots)$. Η σειρά $(m,n,r,s,\ldots)$ δηλώνει χωροχρονικές συντεταγμένες (που λαμβάνουν τις τιμές $0,1,2,\ldots d$). Η σειρά των ελληνικών γραμμάτων $(\mu,\nu,\ldots)$ γενικά θα χρησιμοποιηθεί σε περίπτωση μετρικών με υπογραφή Minkowski, ενώ τα χωρικά μέρη και οι Ευκλείδειες μετρικές, π.χ. το χωρικό μέρος του χωροχρόνου (που λαμβάνει τιμές $1,2,\ldots d$), το χωρικό μέρος του κοσμικού φύλλου/όγκου $(\sigma,\delta,\ldots)$, τα βαθμωτά πεδία ϕ, κλπ. γενικώς θα χρησιμοποιούν τους δείκτες της σειράς $(i,j,k,\ldots)$. Συντεταγμένες με μικρά ελληνικά γράμματα της σειράς $(\alpha,\beta,\ldots$, με τελεία ή χωρίς) συνήθως δηλώνουν τις συντεταγμένες σπινόρων Weyl, ενώ γράμματα Fraktur $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ldots)$ ονοματίζουν τους γεννήτορες κάποιας ομάδας Lie. Όσον αφορά τις μονάδες, χρησιμοποιείται $c=1$.

$$J^{ij} = T \int \left(X^i \dot{X}^j - X^j \dot{X}^i \right) d\sigma, \qquad i,j = 1,2,3,4,5,6, \tag{3.14}$$

που είναι συμβατοί με την καθολική συμμετρία $\mathfrak{so}\,(4,2) \times \mathfrak{so}\,(6)$ του $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ και τη δράση (3.10).

Ένας πολύ βολικός εναλλακτικός τρόπος για να εκφράσουμε τη δράση (3.10), τις εξισώσεις κίνησης και τους συνδέσμους (3.11)–(3.12), είναι μέσω των συντεταγμένων κώνου φωτός του κοσμικού φύλλου $\xi_\pm$ που ορίζονται ως εξής:

$$\xi_\pm = \frac{1}{2} (\tau \pm \sigma) \qquad\qquad \partial_\pm = \partial_\tau \pm \partial_\sigma \tag{3.15}$$

$$\tau = \xi_+ + \xi_- \qquad \longrightarrow \qquad \partial_\tau = \frac{1}{2} (\partial_+ + \partial_-) \tag{3.16}$$

$$\sigma = \xi_+ - \xi_- \qquad\qquad \partial_\sigma = \frac{1}{2} (\partial_+ - \partial_-) \,. \tag{3.17}$$

Η δράση είναι

$$S_P = \frac{T}{2} \int \left[\eta_{\mu\nu} \partial_+ Y^\mu \partial_- Y^\nu + \partial_+ X^i \partial_- X^i + \Lambda \left(\eta_{\mu\nu} Y^\mu Y^\nu + \ell^2 \right) + \widetilde{\Lambda} \left(X^i X^i - R^2 \right) \right] d\tau d\sigma, \tag{3.18}$$

ενώ οι εξισώσεις κίνησης και οι σύνδεσμοι Virasoro/Lagrange (3.11)–(3.12) γράφονται ως:

Εξισώσεις Κίνησης	Σύνδεσμοι Virasoro	Σύνδεσμοι Lagrange	
$\partial_+ \partial_- Y^\mu = \Lambda\, Y^\mu,$	$\eta_{\mu\nu} \partial_+ Y^\mu \partial_+ Y^\nu + \partial_+ X^i \partial_+ X^i = 0,$	$\eta_{\mu\nu} Y^\mu Y^\nu = -\ell^2$	(3.19)
$\partial_+ \partial_- X^i = \widetilde{\Lambda}\, X^i,$	$\eta_{\mu\nu} \partial_- Y^\mu \partial_- Y^\nu + \partial_- X^i \partial_- X^i = 0,$	$X^i X^i = R^2.$	(3.20)

Ο φορμαλισμός που αναπτύξαμε χρησιμεύει πολύ στην απόδειξη κάποιων σημαντικών αναγωγών του κλασσικού σίγμα μοντέλου της χορδής.

3.2 Αναγωγή Pohlmeyer

Σύμφωνα με την αναγωγή Pohlmeyer [40], το κλασικό σίγμα μοντέλο της χορδής στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ μπορεί να αναχθεί στην κλασική sine-Gordon (sG) εξίσωση[15] και το σίγμα μοντέλο της χορδής στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^3$ είναι κλασικά ισοδύναμο με την εξίσωση complex sine-Gordon (CsG). Παρόμοιες αναγωγές [42, 43] έχουν πραγματοποιηθεί για τα σίγμα μοντέλα των χορδών στους χώρους $\mathrm{AdS}_{2/3/4}$, τα οποία μπορούν να αναχθούν στη Liouville, sinh-Gordon και B_2-Toda εξίσωση αντίστοιχα. Οι αναγωγές αυτές συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

σ-Μοντέλο	Αναγωγή Pohlmeyer	εξίσωση
$\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$	sine-Gordon (sG)	$\partial_+ \partial_- \phi + \dfrac{\ell^2}{R^2} \sin \phi = 0$
$\mathbb{R} \times \mathrm{S}^3$	Complex sine-Gordon (CsG)	$\partial_+ \partial_- \psi + \dfrac{\psi^*}{\ell^2 R^2} \dfrac{\partial_+ \psi \partial_- \psi}{\ell^2 - \lvert\psi\rvert^2} + \dfrac{\psi}{R^2} \left(\ell^2 - \lvert\psi\rvert^2 \right) = 0$

[15] Ο Mikhailov έδειξε ότι τα δύο μοντέλα δεν είναι ισοδύναμα στο κβαντικό επίπεδο [41].

AdS_2	Liouville	$\partial_+\partial_- a - e^a = 0$
AdS_3	sinh-Gordon	$\partial'_+\partial'_-\hat{a} - 2\sinh\hat{a} = 0$
AdS_4	B_2-Toda	$\partial'_+\partial'_-\hat{a} - e^{\hat{a}} - e^{-\hat{a}}\cos b = 0$ $\partial'_+\partial'_- b - e^{-\hat{a}}\sin b = 0$

Τα πεδία Pohlmeyer ϕ, ψ, a και $\hat{a}$ ορίζονται ως εξής:[16]

$$\partial_+ X^i \partial_- X^i \equiv \ell^2 \cos\phi, \quad \psi \equiv \ell \sin\frac{\phi}{2} e^{i\chi/2}\cos\phi \tag{3.21}$$

$$K_i \partial_\pm^2 X_i = \pm \ell^2 \partial_\pm \chi \tan\frac{\phi}{2}\sin\phi, \quad K_i \equiv e_{ijkl} X_j \partial_+ X_k \partial_- X_l \tag{3.22}$$

$$\eta_{\mu\nu}\partial_+ Y^\mu \partial_- Y^\nu \equiv e^a, \quad \hat{a} \equiv a - \frac{1}{2}\ln\left(-u\cdot v/\ell^2\right), \tag{3.23}$$

όπου $u = u(\xi_+)$, $v = v(\xi_-)$. Οι τονισμένες συντεταγμένες $\xi'_\pm$ δίδονται από

$$\xi'_+ \equiv \xi_+\sqrt{\frac{-u(\xi_+)}{\ell}} \quad \& \quad \xi'_- \equiv \xi_-\sqrt{\frac{v(\xi_-)}{\ell}}. \tag{3.24}$$

Όπως έδειξε ο Μπάκας το 1993 [44], η complex sine-Gordon (CsG) εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως ένα gauged Wess-Zumino-Witten μοντέλο (gWZW) στο σύμπλοκο χώρο $\mathfrak{su}(2)/\mathfrak{u}(1)$. Όπως είδαμε, η εξίσωση CsG δίνει την αναγωγή Pohlmeyer των κλασικών χορδών στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^3$. Κάποιος θα μπορούσε εύλογα να ρωτήσει κατά πόσο γίνεται να αξιοποιηθεί το γεγονός ότι η IIB υπερχορδή στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ παραμετροποιείται με βάση το υπερσύμπλοκο (2.10), προκειμένου να γραφτεί ένα gWZW μοντέλο γι'αυτό σε κάποιο κατάλληλο σύμπλοκο χώρο. Το τελευταίο θα αντιστοιχούσε στην αναγωγή Pohlmeyer του κλασικού IIB μοντέλου της υπερχορδής στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$. Πράγματι, η αναγωγή Pohlmeyer για την IIB υπερχορδή στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ έχει γίνει σύμφωνα με τα όσα μόλις περιγράψαμε στις εργασίες [45, 46]. Το gWZW μοντέλο ορίζεται επί του συμπλόκου

$$\frac{G}{H} = \frac{\mathfrak{so}(4,1)\times\mathfrak{so}(5)}{\mathfrak{su}(2)^4} \tag{3.25}$$

και παραμορφώνεται από ένα ολοκληρώσιμο δυναμικό και φερμιονικούς όρους.

3.3 Αναγωγή Neumann-Rosochatius στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^5$

Υπάρχει μία μεγάλη κατηγορία από κλασικές περιστρεφόμενες χορδές στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ που μπορούν να αναχθούν σε ορισμένα μονοδιάστατα ολοκληρώσιμα συστήματα που περιγράφουν ένα σωματίδιο που ταλαντώνεται επί μιας σφαίρας: το σύστημα Neumann [47, 48]. Μια ειδική περίπτωση του συστήματος Neumann δίνεται από όλες τις χορδές που περιστρέφονται σαν στερεά σώματα στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ και καλείται σύστημα Neumann-Rosochatius (NR). Το σύστημα NR είναι φυσικά ξανά ολοκληρώσιμο και περιγράφει ένα σωματίδιο επί μιας σφαίρας και εντός του δυναμικού $r^2 + r^{-2}$.

Στα επόμενα πρόκειται να παρουσιάσουμε μία γενίκευση των ansätze των Neumann και Neumann-Rosochatius (βλέπε [49]), που θα μας επιτρέψει να εξάγουμε δύο μη στερεά περιστρεφόμενες λύσεις

[16] Ο ορισμός του b μπορεί να βρεθεί στις αναφορές [42].

χορδών στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$, το (απείρου μεγέθους) γιγάντιο μαγνόνιο και την απλή ακίδα (single spike). Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο ansatz στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^5$:

$$\Big\{t=\kappa\tau,\, \rho=\theta=\phi_1=\phi_2=0\Big\}\times\Big\{Z_i=z_i\left(\xi\right)e^{i\omega_i\tau}\Big\},\quad \xi=\alpha\sigma+\beta\tau\ \&\ z_i\left(\xi+2\pi\alpha\right)=z_i\left(\xi\right), \tag{3.26}$$

όπου $Z_i=\{X_{12},X_{34},X_{56}\}$, $i=1,2,3$ είναι οι συντεταγμένες εμβάπτισης της 5-διάστατης σφαίρας (3.1) και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Το (3.26) είναι το γενικευμένο ansatz του Neumann. Η σύμμορφη δράση της χορδής (3.10) γράφεται:

$$S_P=\frac{T}{2}\int\Big[-\ell^2\kappa^2+\left(\dot{Z}^i\dot{\bar{Z}}^i-\acute{Z}^i\acute{\bar{Z}}^i\right)+\widetilde{\Lambda}\left(Z^i\bar{Z}^i-R^2\right)\Big]d\tau d\sigma. \tag{3.27}$$

Το ansatz (3.26) οδηγεί στις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης και συνδέσμους Largrange:

$$\left(\alpha^2-\beta^2\right)z_i''-2i\beta\omega_i z_i'+\omega_i^2 z_i+\widetilde{\Lambda}z_i=0,\qquad \sum_{i=1}^{3}\left|z_i\right|^2=R^2, \tag{3.28}$$

όπου όλες οι παράγωγοι του z λαμβάνονται ως προς τη μεταβλητή ξ. Οι σύνδεσμοι Virasoro δίδονται από

$$\sum_{i=1}^{3}2\beta\left|z_i'\right|^2+i\,\omega_i\left(z_i\bar{z}_i'-\bar{z}_i z_i'\right)=0 \tag{3.29}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left|z_i'\right|^2+\omega_i^2\left|z_i\right|^2+i\,\beta\,\omega_i\left(z_i\bar{z}_i'-\bar{z}_i z_i'\right)=\ell^2\kappa^2. \tag{3.30}$$

Χρησιμοποιώντας αυτούς τους συνδέσμους, η Λαγκρανζιανή και η Χαμιλτονιανή του συστήματος Neumann γράφονται:

$$\mathcal{L}=-\ell^2\kappa^2+\sum_{i=1}^{3}\left(\beta^2-\alpha^2\right)\left|z_i'\right|^2+i\,\beta\,\omega_i\left(z_i\bar{z}_i'-\bar{z}_i z_i'\right)+\omega_i^2\left|z_i\right|^2+\widetilde{\Lambda}\left(\left|z_i\right|^2-R^2\right) \tag{3.31}$$

$$\mathcal{H}=-\ell^2\kappa^2+\sum_{i=1}^{3}\Big[\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left|z_i'\right|^2+\omega_i^2\left|z_i\right|^2\Big]=0. \tag{3.32}$$

$$\tag{3.33}$$

Στο ansatz των Neumann-Rosochatius, το z_i έχει την εξής μορφή:

$$z_i\left(\xi\right)=r_i\left(\xi\right)e^{i\mu_i\left(\xi\right)}. \tag{3.34}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.34), οι εξισώσεις κίνησης (3.28) γράφονται ως:

$$\left(\alpha^2-\beta^2\right)\left(r_i''-r_i\mu_i'^{\,2}\right)+2\beta\omega_i r_i\mu_i'+\omega_i^2 r_i+\widetilde{\Lambda}r_i=0\quad\&\quad \mu_i'=\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[\frac{C_i}{r_i^2}+\beta\omega_i\right], \tag{3.35}$$

όπου C_i είναι πραγματικές σταθερές ολοκλήρωσης. Οι σύνδεσμοι (Lagrange και Virasoro) του συστήματος γράφονται ως:

$$\sum_{i=1}^{3} 2\beta \left(r_i'^{\,2} + r_i^2 \mu_i'^{\,2}\right) + 2\omega_i r_i^2 \mu_i' = 0 \quad \& \quad \sum_{i=1}^{3} r_i^2 = R^2 \tag{3.36}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\alpha^2 + \beta^2\right) \left(r_i'^{\,2} + r_i^2 \mu_i'^{\,2}\right) + \omega_i^2 r_i^2 + 2\beta\omega_i r_i^2 \mu_i' = \ell^2\kappa^2. \tag{3.37}$$

Η NR Λαγκρανζιανή και Χαμιλτονιανή δίδονται από:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \left(\beta^2 - \alpha^2\right) \left[r_i'^{\,2} + \left(\mu_i' + \frac{\beta\omega_i}{\beta^2 - \alpha^2}\right)^2 r_i^2 \right] - \frac{\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2}\, \omega_i^2 r_i^2 \right\} + \widetilde{\Lambda} \left[\sum_{i=1}^{3} r_i^2 - R^2 \right] - \ell^2\kappa^2 \tag{3.38}$$

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \left(\alpha^2 - \beta^2\right) \left(r_i'^{\,2} + r_i^2 \mu_i'^{\,2}\right) + R^2 \omega_i^2 \right\} - \ell^2\kappa^2 = 0. \tag{3.39}$$

Οι εξισώσεις (3.35)–(3.39) μπορούν να απλοποιηθούν περαιτέρω χρησιμοποιώντας την τιμή του μ_i' στην (3.35):

$$\left(\alpha^2 - \beta^2\right) r_i'' - \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{C_i^2}{r_i^3} + \left[\frac{\alpha^2 \omega_i^2}{\alpha^2 - \beta^2} + \widetilde{\Lambda} \right] r_i = 0 \quad \& \quad \sum_{i=1}^{3} r_i^2 = R^2. \tag{3.40}$$

Οι σύνδεσμοι Virasoro είναι:

$$\sum_{i=1}^{3} \left\{ \left(\alpha^2 - \beta^2\right) r_i'^{\,2} + \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\frac{C_i^2}{r_i^2} + \alpha^2 \omega_i^2 r_i^2 + 2\beta C_i \omega_i \right] \right\} = \ell^2\kappa^2 \quad \& \quad \ell^2\beta\kappa^2 + \sum_{i=1}^{3} C_i \omega_i = 0. \tag{3.41}$$

Η Λαγκρανζιανή και Χαμιλτονιανή πυκνότητα του συστήματος με τις εξισώσεις κίνησης (3.40) είναι:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \left(\beta^2 - \alpha^2\right) r_i'^{\,2} - \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2} \frac{C_i^2}{r_i^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2}\, \omega_i^2 r_i^2 \right\} + \widetilde{\Lambda} \left[\sum_{i=1}^{3} r_i^2 - R^2 \right] - \ell^2\kappa^2 \tag{3.42}$$

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \left(\alpha^2 - \beta^2\right) r_i'^{\,2} + \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\frac{C_i^2}{r_i^2} + \alpha^2 \omega_i^2 r_i^2 + 2\beta C_i \omega_i \right] \right\} - \ell^2\kappa^2 = 0. \tag{3.43}$$

4 Χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP)

Το 2002 οι Gubser, Klebanov και Polyakov (GKP) [11], πρότειναν τη μελέτη κλειστών μποζονικών και αφόρτιστων χορδών που περιστρέφονται ή πάλλονται εντός του $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$, προκειμένου να υπολογιστούν οι (ανώμαλες) διαστάσεις κλίμακας των δυϊκών τους τελεστών στη θεωρία SYM σε ισχυρή σύζευξη, περιοχή που είναι απρόσιτη στη θεωρία διαταραχών από την πλευρά της θεωρίας βαθμίδας. Η εργασία των Gubser, Klebanov και Polyakov περιέχει τρία ansätze χορδών για τα οποία η σχέση ενέργειας-στροφορμής[17] υπολογίζεται:

I. μία κλειστή χορδή που περιστρέφεται στερεά εντός του $\mathrm{AdS}_3\subset\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$.

II. μία κλειστή χορδή που περιστρέφεται στερεά γύρω από τον πόλο της S^2 στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2\subset\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$.

III. μία κλειστή χορδή που πάλλεται εντός του $\mathrm{AdS}_3\subset\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$.

Κάθε μία από αυτές τις χορδές είναι δυϊκή σε ένα τοπικό, αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστή μονού ίχνους της $\mathcal{N}=4$ SYM, οι (ανώμαλες) διαστάσεις κλίμακας του οποίου σε ισχυρή σύζευξη είναι ίσες με την ενέργεια της κλειστής κατάστασης χορδής.

Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε τις τρεις βασικές περιπτώσεις των GKP (I, II, III). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, όλες οι χορδές GKP είναι μποζονικές και αφόρτιστες, και έτσι ο φορμαλισμός που αναπτύχθηκε στην §3.1 θα αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμος. Όπως θα εξηγηθεί με περισσότερες λεπτομέρειες παρακάτω, οι μεγάλες χορδές GKP ανήκουν σε μια ομάδα περιπτώσεων όπου οι ολοκληρώσιμες μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί μέχρι στιγμής δεν είναι πολύ αποτελεσματικές. Αυτό σημαίνει ότι πιο παραδοσιακές μέθοδοι (δηλαδή τετραγωνισμοί), θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να υπολογιστούν τα φάσματα σε αυτήν την περίπτωση. Στην §5 θα δούμε πώς η προβλεπτική ικανότητα των συνηθισμένων φασματικών μεθόδων μπορεί να ενισχυθεί σημαντικά συστηματοποιώντας τον υπολογισμό των κλασικών ενεργειών των χορδών. Στην §8 οι μέθοδοι αυτές θα εφαρμοσθούν σε ένα ακόμη κλασσικό σύστημα χορδών, το γιγάντιο μαγνόνιο (giant magnon).

Η περίπτωση (I) των GKP, που περιγράφει μια περιστρεφόμενη διπλωμένη χορδή στον AdS_3, είναι ίσως η πιο δημοφιλής και έχει αναλυθεί διεξοδικά από την πρώτη στιγμή που εμφανίστηκε. Η παρατήρηση-κλειδί των GKP ήταν ότι η ενέργεια μείον τη στροφορμή μιας μεγάλης διπλωμένης χορδής που περιστρέφεται εντός του AdS_3, συμπεριφέρεται σαν το λογάριθμο της στροφορμής:

$$E-S=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\ln\frac{S}{\sqrt{\lambda}},\quad S,\,\lambda\to\infty. \tag{4.1}$$

Αυτή η συμπεριφορά είναι οικεία από τη μελέτη των ανώμαλων διαστάσεων των τελεστών Wilson με συστροφή (twist) 2 στην διαταρακτική QCD. Πράγματι, οι GKP προχώρησαν στην αναπαραγωγή αυτής της λογαριθμικής συμπεριφοράς υπολογίζοντας ουσιαστικά τις ανώμαλες διαστάσεις των ακόλουθων τελεστών υψηλού σπίν και συστροφής-2 στην $\mathcal{N}=4$ SYM:[18]

$$\mathcal{O}_S=\mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}\,\mathcal{D}_+^S\,\mathcal{Z}\right]+\ldots,\quad S\to\infty \tag{4.2}$$

όπου οι τελείες στην (4.2) συμβολίζουν όλες τις πιθανές κατανομές της παραγώγου του κώνου φωτός $\mathcal{D}_+$ μεταξύ των δύο πεδίων $\mathcal{Z}$, ενώ κάθε όρος του αθροίσματος πολλαπλασιάζεται με ένα κατάλληλο

[17] Γνωστή και ως «σχέση διασποράς». Εναλλακτικά, ο όρος «ανώμαλη διάσταση» θα χρησιμοποιείται σε αυτή την διατριβή, δεδομένου ότι η ενέργεια μείον τη στροφορμή της χορδής είναι ίση με τις ανώμαλες διαστάσεις του δυϊκού τελεστή της θεωρίας βαθμίδας.

[18] Τελεστές με συστροφή J, $\mathrm{Tr}\Big[\mathcal{D}_+^{S_1}\,\mathcal{Z}\,\mathcal{D}_+^{S_2}\,\mathcal{Z}\ldots\mathcal{D}_+^{S_J}\,\mathcal{Z}\Big]$, με $S_1+S_2+\ldots+S_J=S$ ανήκουν στον κλειστό, μη-συμπαγή $\mathfrak{sl}(2)$ τομέα της $\mathcal{N}=4$ SYM. Ο τομέας $\mathfrak{sl}(2)$ είναι δυϊκός στις χορδές που περιστρέφονται στον $\mathrm{AdS}_3\times\mathrm{S}^1$ και ο τελεστής διαστολής του δίνεται από τη Χαμιλτονιανή της σιδηρομαγνητικής $\mathrm{XXX}_{-1/2}$ αλυσίδας σπίν Heisenberg.

συντελεστή. Στην πραγματικότητα ο υπολογισμός είναι σχεδόν ταυτόσημος με εκείνον της QCD. Ωστόσο, το διαταρακτικό αποτέλεσμα συμπεριφέρεται ως λ αντί για $\sqrt{\lambda}$ στην (4.1). Οι GKP υπέθεσαν ότι η διαφορά αυτή θα μπορούσε να καλυφθεί από τις κβαντικές διορθώσεις που λαμβάνει το αποτέλεσμα της θεωρίας βαθμίδας. Θα έχουμε περισσότερα να πούμε για τις ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών συστροφής-2 της QCD, της $\mathcal{N}=4$ SYM και της περιστρεφόμενης χορδής στον AdS_3, στην §5.

Η περίπτωση (II) των GKP που περιγράφει μια διπλωμένη περιστρεφόμενη χορδή στον $\mathbb{R}\times\text{S}^2$, έχει επίσης μελετηθεί πολύ διεξοδικά. Στην αρχική τους πραγματεία [11], οι Gubser, Klebanov και Polyakov εξήγαγαν την ακόλουθη εξίσωση για τις ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών της $\mathcal{N}=4$ SYM θεωρίας σε ισχυρή σύζευξη, που είναι δυϊκοί στην κλειστή διπλωμένη χορδή (II) του $\mathbb{R}\times\text{S}^2$:

$$E-J=\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi},\quad J=\infty,\ \lambda\to\infty. \tag{4.3}$$

Όλες οι κλειστές διπλωμένες χορδές με μία στροφορμή, που περιστρέφονται στον $\mathbb{R}\times\text{S}^2$, μπορούν να αναλυθούν σε πιο στοιχειώδεις διεγέρσεις της θεωρίας χορδών, που είναι γνωστές ως γιγάντια μαγνόνια (giant magnons). Αυτά είναι ανοικτές χορδές ενός σπίν, που περιστρέφονται στον $\text{S}^2\subset\text{S}^5$ και ταυτοποιήθηκαν το 2006 από τους Hofman και Maldacena [50] ως οι δυϊκές διεγέρσεις των μαγνονίων της $\mathcal{N}=4$ SYM, από την πλευρά της θεωρίας χορδών. Η σχέση ενέργειας-σπίν ενός γιγάντιου μαγνονίου με γωνιακή έκταση $\Delta\varphi$ είναι:

$$E-J=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right|,\quad J=\infty,\ \lambda\to\infty, \tag{4.4}$$

όπου $\Delta\varphi=p$ είναι η ορμή του δυϊκού του μαγνονίου. Υπερθέτοντας δύο γιγάντια μαγνόνια μέγιστης γωνιακής έκτασης $\Delta\varphi=\pi$ και στροφορμής $J/2$, λαμβάνουμε την εξίσωση των GKP (4.3). Η χορδή GKP (II) είναι επομένως δυϊκή στους τελεστές της $\mathcal{N}=4$ SYM με δύο μαγνόνια:

$$\mathcal{O}_J=\text{Tr}\left[\mathcal{Z}^J\mathcal{X}^2\right]+\ldots,\quad J\to\infty. \tag{4.5}$$

Περισσότερα για το γιγάντιο μαγνόνιο και τη σχέση του με τη χορδή GKP (II) θα ειπωθούν στις §6–§7, όπου τα γιγάντια μαγνόνια θα μελετηθούν λεπτομερέστερα.

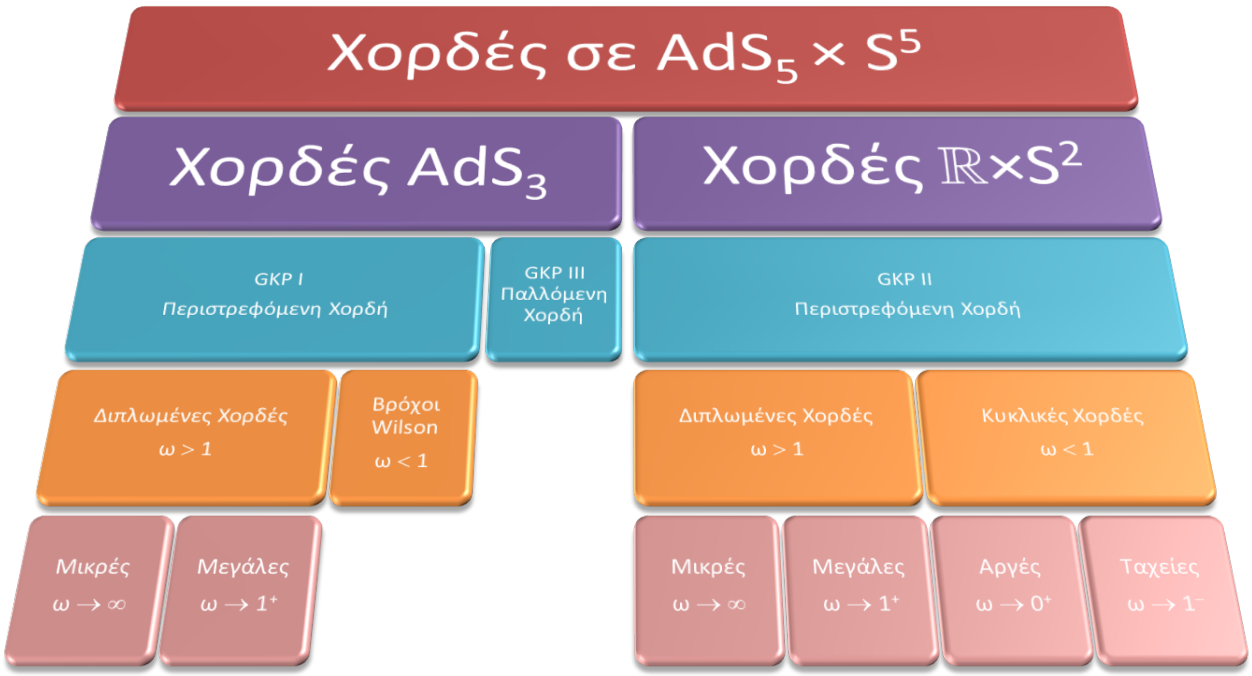
Οι δύο περιστρεφόμενες χορδές GKP (I - II) υπακούν δυαδικότητες μικρών-μεγάλων χορδών που συνδέουν τις κλασικές τιμές των διατηρούμενων ενεργειών και σπίν τους στην περιοχή των μικρών χορδών με τις τιμές των φορτίων αυτών στην περιοχή των μεγάλων χορδών. Αυτές οι δυαδικότητες είναι πολύ ενδιαφέρουσες, διότι ίσως να υπάρχει η δυνατότητα αναβάθμισής τους στο κβαντικό επίπεδο. Μια τέτοια προοπτική θα προσέφερε τη δυνατότητα χρήσης των ενεργειών των μικρών χορδών, για τις οποίες είναι διαθέσιμα καταπληκτικά αποτελέσματα από την ολοκληρωσιμότητα (συνάρτηση κλίσης Basso, κβαντική φασματική καμπύλη, κλπ..), για να υπολογιστούν οι ενέργειες των μεγάλων χορδών, για τις οποίες οι υπάρχουσες μέθοδοι δεν είναι εξίσου προφητικές όπως έχουμε πει.

Η περίπτωση (III) των GKP αποτελείται από μία χορδή που πάλλεται εντός του AdS_3. Η μελέτη παλλόμενων χορδών στον χωροχρόνο anti-de Sitter ξεκίνησε πριν από πολύ καιρό από τους de Vega, Larsen και Sánchez [51] στο πλαίσιο της κοσμολογίας χορδών. Οι Gubser-Klebanov-Polyakov [11] προσέγγισαν την ενέργεια των μικρών παλλόμενων χορδών στον AdS_3 με τον ακόλουθο τύπο:

$$E\sim\sqrt{\sqrt{\lambda}\cdot n} \tag{4.6}$$

όπου n είναι το επίπεδο διέγερση της χορδής. Ωστόσο, δεν ήταν αρχικά σαφές πώς να επεκτείνει κανείς αυτόν τον τύπο για μεγάλες τιμές της ενέργειας E και του επιπέδου n, αλλά ούτε και σε ποιους τελεστές της θεωρίας βαθμίδας ήταν δυϊκή η παλλόμενη χορδή των GKP. Και οι δύο αυτές ερωτήσεις απαντήθηκαν από τον Minahan στην εργασία [52]. Οι τελεστές της $\mathcal{N}=4$ SYM που είναι δυϊκοί στις παλλόμενες χορδές GKP είναι

$$\mathcal{O}_n=\text{Tr}\left[\mathcal{Z}\mathcal{D}_+^n\mathcal{D}_-^n\mathcal{Z}\right]+\ldots, \tag{4.7}$$



Σχήμα 1: Οι χορδές GKP.

όπου και πάλι οι τελείες συμβολίζουν όλες τις πιθανές μεταθέσεις των παραγώγων του κώνου φωτός $\mathcal{D}_{\pm}$ ανάμεσα στα δύο μιγαδικά βαθμωτά πεδία και κάθε όρος στο άθροισμα πολλαπλασιάζεται με έναν κατάλληλο συντελεστή. Η ακριβής μορφή των τελεστών $\mathcal{O}_n$ θα δοθεί στην §4.3.1, όπου η παλλόμενη χορδή GKP θα κβαντιστεί αλά WKB και θα εξαχθεί μια ημικλασική σχέση διασποράς που θα ισχύει για όλες τις τιμές του επιπέδου της χορδής n. Η διόρθωση ενός βρόχου για την ενέργεια της παλλόμενης χορδής υπολογίστηκε στην [53].

Αυτή η ενότητα οργανώνεται ως εξής. Στην §4.1 πρόκειται να παρουσιαστεί η περιστρεφόμενη χορδή GKP στον AdS_3 (περίπτωση I). Ανάλογα με το αν η γωνιακή ταχύτητα ω της χορδής είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από τη μονάδα, η χορδή είτε διπλώνει στα άκρα της και περιστρέφεται σαν στερεό σώμα στον AdS_3 ($\omega > 1$) ή αγγίζει το σύνορο του AdS ($\omega < 1$). Στην πρώτη περίπτωση ($\omega > 1$) υπάρχουν δύο ενδιαφέρουσες οριακές περιπτώσεις, αυτή της «μικρής» χορδής με $\omega \to \infty$ και εκείνη της «μεγάλης» χορδής για την οποία $\omega \to 1^+$. Οι αναλυτικές εκφράσεις για τα διατηρούμενα φορτία (δηλαδή την ενέργεια E και το σπίν S) των μικρών και μεγάλων διπλωμένων χορδών GKP δίδονται στις §4.1.1 ανδ §4.1.2. Η δυαδικότητα μικρών-μεγάλων χορδών για τη χορδή GKP (I) θα εξαχθεί στην §4.1.3. Οι χορδές GKP που αγγίζουν το σύνορο του AdS (βρόχοι Wilson) θα παραλειφθούν.

Η περιστρεφόμενη χορδή στον $\mathbb{R} \times \text{S}^2$ (περίπτωση II) παρουσιάζεται στην §4.2. Και πάλι υπάρχουν δύο κύριες περιοχές ανάλογα με την τιμή της γωνιακής ταχύτητας ω, οι διπλωμένες χορδές ($\omega > 1$), είτε μικρές ($\omega \to \infty$) είτε μεγάλες ($\omega \to 1^+$), και οι κυκλικές χορδές ($\omega < 1$), οι οποίες εκτείνονται κατά μήκος ενός μεγάλου κύκλου της δισδιάστατης σφαίρας και είναι είτε «αργές» ($\omega \to 0^+$) είτε «γρήγορες» ($\omega \to 1^-$). Οι ενότητες §4.2.1–§4.2.2 ασχολούνται με τα διατηρούμενα φορτία (ενέργεια E και σπίν J) της πρώτης περιοχής, και στις §4.2.3–§4.2.4 παρουσιάζεται η δεύτερη περίπτωση. Οι δυαδικότητες μεταξύ μικρών-μεγάλων και γρήγορων-αργών χορδών αποδεικνύονται στην §4.2.5.

Αυτή η ενότητα ολοκληρώνεται με την παρουσίαση της παλλόμενης χορδής των GKP (περίπτωση III), στην §4.3. Η ημικλασική κβάντωση αυτής της χορδής λαμβάνει χώρα στην §4.3.1.

4.1 Περιστρεφόμενες Χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov στον AdS_3

Το ansatz για την κλειστή διπλωμένη χορδή των GKP (I) που περιστρέφεται στον $AdS_3 \subset AdS_5 \times S^5$ είναι:

$$\Big\{t = \kappa\tau,\, \rho = \rho(\sigma),\, \theta = \kappa\omega\tau,\, \phi_1 = \phi_2 = 0\Big\} \times \Big\{\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_2 = \bar{\phi}_3 = 0\Big\}. \tag{4.8}$$

Σε συντεταγμένες εμβάπτισης η λύση δίνεται από

$$\begin{aligned}
&Y_0 = \ell \cosh\rho(\sigma)\cos\kappa\tau, \qquad Y_2 = Y_4 = 0, \qquad && X_1 = R = \ell \\
&Y_1 = \ell \sinh\rho(\sigma)\cos\kappa\omega\tau && X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = X_6 = 0 \\
&Y_3 = \ell \sinh\rho(\sigma)\sin\kappa\omega\tau && \\
&Y_5 = \ell \cosh\rho(\sigma)\sin\kappa\tau. &&
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Η δράση Polyakov στη σύμμορφη βαθμίδα ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) είναι:

$$S_P = \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'}\int\Big(-\dot{t}^2\cosh^2\rho - \rho'^{\,2} + \dot{\theta}^2\sinh^2\rho\Big)\,d\tau d\sigma = \tag{4.10}$$

$$= \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'}\int\left(-\kappa^2\cosh^2\rho - \rho'^{\,2} + \kappa^2\omega^2\sinh^2\rho\right)d\tau d\sigma, \tag{4.11}$$

Οι εξισώσεις κίνησης και οι σύνδεσμοι Virasoro (3.4) γράφονται:

$$\rho'' + \kappa^2\left(\omega^2 - 1\right)\sinh\rho\cosh\rho = 0 \tag{4.12}$$

$$\rho'^{\,2} - \kappa^2\left(\cosh^2\rho - \omega^2\sinh^2\rho\right) = 0. \tag{4.13}$$

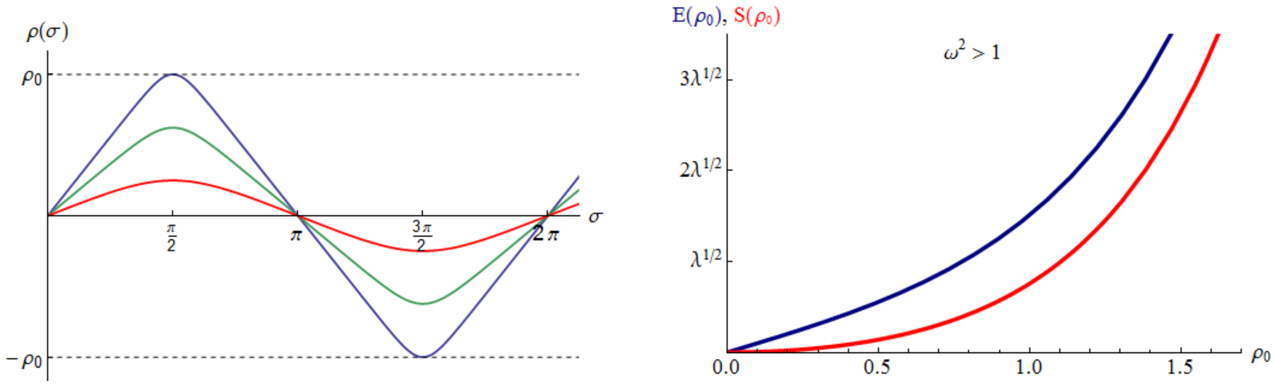
Σύνδεσμοι και εξισώσεις είναι ουσιαστικά ισοδύναμες με την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\rho} &= \frac{1}{\kappa\sqrt{\cosh^2\rho - \omega^2\sinh^2\rho}} = \frac{1}{\kappa\sqrt{1 - (\omega^2 - 1)\sinh^2\rho}} = \\
&= \frac{1}{\kappa\sqrt{(\omega^2 - 1)\left(q - \sinh^2\rho\right)}}\,, \quad q \equiv \frac{1}{\omega^2 - 1}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Ανάλογα με την τιμή της γωνιακής ταχύτητας ω, λαμβάνουμε δύο βασικές περιπτώσεις:

(i). $\omega^2 > 1$: Κλειστή περιστρεφόμενη χορδή που διπλώνει στα σημεία $d\sigma/d\rho\Big|_{\rho_0} = \infty$ και

$$0 \leq \sinh^2\rho \leq \sinh^2\rho_0 = \frac{1}{\omega^2 - 1} = q < \infty.$$



Σχήμα 2: $\rho = \rho(\sigma)$ και ενέργεια/στροφορμή της κλειστής διπλωμένης χορδής GKP εντός του AdS_3 (4.8), για $\omega > 1$.

α. «Μικρές» Χορδές: $\omega \to \infty$, $\rho_0 \sim 1/\omega$.

β. «Μεγάλες» Χορδές: $\omega = 1 + 2\eta \to 1^+$, $\rho_0 \sim \ln 1/\eta \to \infty$.

(ii). $\omega^2 < 1$: Δύο αντίθετα προσανατολισμένοι, περιστρεφόμενοι βρόχοι Wilson[19] με

$$0 \leq \sinh^2 \rho \leq \sinh^2 \rho_0 = \infty.$$

Τα διατηρούμενα φορτία που αντιστοιχούν στις δύο κυκλικές συντεταγμένες τ και θ δίδονται από τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$E = \left|\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right| = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi} \kappa \cosh^2 \rho \, d\sigma = 4 \cdot \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{\rho_0} \frac{\cosh^2 \rho \, d\rho}{\sqrt{1 - (\omega^2 - 1)\sinh^2 \rho}} \tag{4.15}$$

$$S = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi} \kappa \, \omega \sinh^2 \rho \, d\sigma = 4 \cdot \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{\rho_0} \frac{\omega \sinh^2 \rho \, d\rho}{\sqrt{1 - (\omega^2 - 1)\sinh^2 \rho}}, \tag{4.16}$$

Η χορδή έχει τέσσερα κομμάτια που εκτείνονται μεταξύ του $\rho = 0$ και του $\rho = \rho_0$. Γι'αυτό το λόγο όλα τα ολοκληρώματα ως προς ρ έχουν πολλαπλασιαστεί επί 4. Θα πρέπει ακόμα να υπολογίσουμε και το μήκος της χορδής

$$\sigma \cdot \kappa = \int_0^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{1 - (\omega^2 - 1)\sinh^2 \rho}}, \tag{4.17}$$

όπου ο παράγοντας κ είναι τέτοιος ώστε $\sigma(\rho_0) = \pi/2$. Προκειμένου να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα θέτουμε $\omega \tanh \rho = \sin \varphi$. Εν συντομία, τα αποτελέσματα είναι:

$$\sigma = \frac{1}{\kappa\,\omega}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{1}{\omega^2}\sin^2 \varphi\right)^{1/2}} = \frac{1}{\kappa\,\omega} \cdot \mathbb{F}\left(\varphi \,\middle|\, \frac{1}{\omega^2}\right) \Rightarrow \rho(\sigma) = \operatorname{arctanh}\left[\frac{1}{\omega} sn\left(\kappa\omega\sigma \,\middle|\, \frac{1}{\omega^2}\right)\right], \tag{4.18}$$

[19]Οι βρόχοι Wilson ακουμπούν στο σύνορο του χώρου anti-de Sitter για $\rho = \infty$.

όπου

$$\kappa = \frac{2}{\pi\omega}\,\mathbb{F}\left(\varphi_0 \,\middle|\, \frac{1}{\omega^2}\right) \quad \& \quad \omega\cdot\tanh\rho_0 = \sin\varphi_0$$

$$E= \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'\omega}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\left(1-\frac{1}{\omega^2}\sin^2\varphi\right)^{3/2}} = \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'\omega}\cdot\mathbf{\Pi}\left(\frac{1}{\omega^2},\varphi_0\,\middle|\,\frac{1}{\omega^2}\right) =$$

$$= \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'}\left(\frac{\omega}{\omega^2-1}\cdot\mathbb{E}\left(\varphi_0\,\middle|\,\frac{1}{\omega^2}\right) - \frac{1}{2\omega\left(\omega^2-1\right)}\frac{\sin 2\varphi_0}{\sqrt{1-\frac{1}{\omega^2}\sin^2\varphi_0}}\right) \tag{4.19}$$

$$S= \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'\omega^2}\int_0^{\varphi_0}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\left(1-\frac{1}{\omega^2}\sin^2\varphi\right)^{3/2}} = \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'}\left[\mathbf{\Pi}\left(\frac{1}{\omega^2},\varphi_0\middle|\frac{1}{\omega^2}\right) - \mathbb{E}\left(\varphi_0\,\middle|\,\frac{1}{\omega^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2\ell^2}{\pi\alpha'}\left(\frac{\omega^2}{\omega^2-1}\cdot\mathbb{E}\left(\varphi_0\,\middle|\,\frac{1}{\omega^2}\right) - \mathbb{F}\left(\varphi_0\,\middle|\,\frac{1}{\omega^2}\right) - \frac{1}{2\left(\omega^2-1\right)}\frac{\sin 2\varphi_0}{\sqrt{1-\frac{1}{\omega^2}\sin^2\varphi_0}}\right). \tag{4.20}$$

Οι ορισμοί των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων πρώτου, δεύτερου και τρίτου είδους, $\mathbb{F}(\varphi\big|m)$, $\mathbb{E}(\varphi\big|m)$, $\mathbf{\Pi}(n,\varphi\big|m)$, καθώς επίσης και εκείνοι της ελλειπτικής συνάρτησης του Jacobi $sn(u|m)$ δίδονται στο παράρτημα Ε΄.

$\underline{\omega^2 > 1}$: Κλειστή διπλωμένη χορδή (AdS_3).

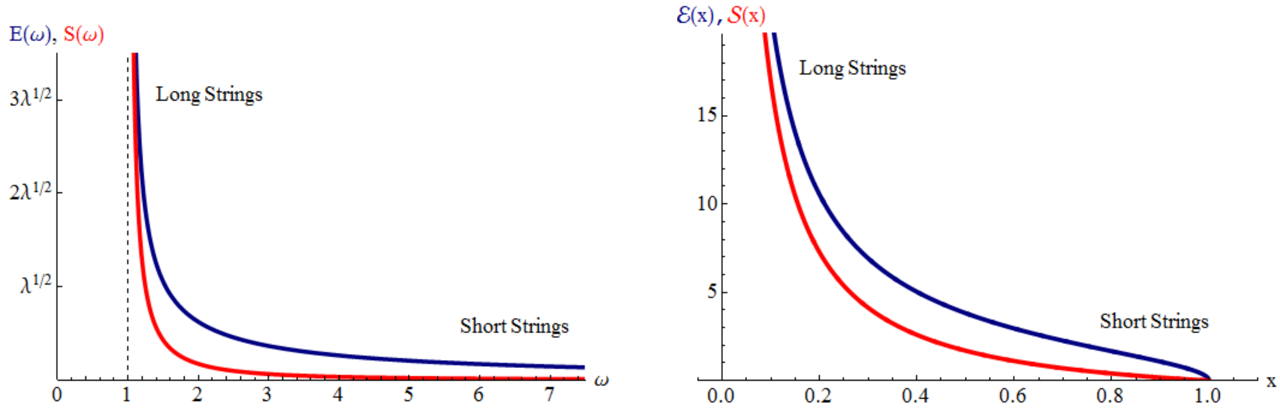
Στην περίπτωση (i) της κλειστής διπλωμένης χορδής με $\omega^2 > 1$, είναι $\varphi_0 = \pi/2$, έτσι ώστε τα ολοκληρώματα (4.15)–(4.17) απλοποιούνται και μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των πλήρων ελλειπτικών ολοκληρωμάτων:

$$\rho(\sigma) = \operatorname{arctanh}\left[\frac{1}{\omega}sn\left(\kappa\omega\sigma\,\middle|\,\frac{1}{\omega^2}\right)\right], \quad \kappa = \frac{2}{\pi\omega}\cdot\mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right), \quad \omega = \coth\rho_0 \tag{4.21}$$

$$E(\omega) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\,\frac{\omega}{\omega^2-1}\cdot\mathbb{E}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \Rightarrow \mathcal{E} \equiv \frac{\pi\, E}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\sqrt{1-x}}{x}\cdot\mathbb{E}\left(1-x\right) \tag{4.22}$$

$$S(\omega) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\,\left[\frac{\omega^2}{\omega^2-1}\cdot\mathbb{E}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) - \mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)\right] \Rightarrow \mathcal{S} \equiv \frac{\pi\, S}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{x}\,\mathbb{E}\left(1-x\right) - 2\mathbb{K}\left(1-x\right) \tag{4.23}$$

$$\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{S} = 2\left[\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}\cdot\mathbb{E}\left(1-x\right) + \mathbb{K}\left(1-x\right)\right], \tag{4.24}$$



Σχήμα 3: Ενέργεια/σπίν της κλειστής διπλωμένης χορδής των GKP στον AdS_3 (4.8), συναρτήσει των $\omega > 1$ και $x > 0$.

όπου $x \equiv 1-1/\omega^2$ είναι η συμπληρωματική παράμετρος του $1/\omega^2$. Στα διαγράμματα 2–3 έχουμε σχεδιάσει το $\rho\,(\sigma)$ για διάφορες τιμές της γωνιακής ταχύτητας $\omega > 1$, όπως επίσης την ενέργεια και το σπίν της χορδής συναρτήσει των ρ_0, ω και του x. Το σχήμα 4 απεικονίζει το διάγραμμα της ενέργειας της χορδής συναρτήσει της στροφορμής του, ήτοι $E = E(S)$.

4.1.1 Μικρές Χορδές στον AdS_3: $\omega \to \infty$, $S \ll \sqrt{\lambda}$

Προκειμένου να λάβουμε το όριο των μικρών χορδών, οι εκφράσεις (4.22)–(4.23) πρέπει να αναπτυχθούν για $\omega \to \infty$ χρησιμοποιώντας τους τύπους του παραρτήματος Ε′:

$$E = \sqrt{\lambda}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{2n+1}{\omega^{2n+1}} = \sqrt{\lambda}\cdot\left[\frac{1}{\omega}+\frac{3}{4\,\omega^3}+\frac{45}{64\,\omega^5}+\frac{175}{256\,\omega^7}+O\left(\frac{1}{\omega^9}\right)\right] \tag{4.25}$$

$$S = \sqrt{\lambda}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{2n}{\omega^{2n}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\cdot\left[\frac{1}{\omega^2}+\frac{9}{8\,\omega^4}+\frac{75}{64\,\omega^6}+\frac{1225}{1024\,\omega^8}+O\left(\frac{1}{\omega^{10}}\right)\right]. \tag{4.26}$$

Για να ληφθεί η σειρά (4.25) χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα

$$(2n+1)\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k-1}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2 = 0. \tag{4.27}$$

Με το πρόγραμμα Mathematica μπορούμε ακόμη να υπολογίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση για το σπίν $x = x\,(\mathcal{S})$ καθώς επίσης και την ενέργεια $\mathcal{E} = \mathcal{E}\,(\mathcal{S})$ συναρτήσει του σπίν $\mathcal{S}$:

$$x = 1-\frac{2\,\mathcal{S}}{\pi}+\frac{9\,\mathcal{S}^2}{2\pi^2}-\frac{87\,\mathcal{S}^3}{8\pi^3}+\frac{1.765\,\mathcal{S}^4}{64\,\pi^4}-\frac{37.071\,\mathcal{S}^5}{512\,\pi^5}+\frac{199.815\,\mathcal{S}^6}{1024\,\pi^6}-\frac{4.397.017\,\mathcal{S}^7}{8192\,\pi^7}+\ldots \tag{4.28}$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{2}\cdot\left[\pi^{1/2}\mathcal{S}^{1/2}+\frac{3\,\mathcal{S}^{3/2}}{8\,\pi^{1/2}}-\frac{21\,\mathcal{S}^{5/2}}{128\,\pi^{3/2}}+\frac{187\,\mathcal{S}^{7/2}}{1024\,\pi^{5/2}}-\frac{9.261\,\mathcal{S}^{9/2}}{32.768\,\pi^{7/2}}+\frac{136.245\,\mathcal{S}^{11/2}}{262.144\,\pi^{9/2}}-\ldots\right]. \tag{4.29}$$

Η εξάρτηση της (4.29) από τη σταθερά σύζευξης 't Hooft λ μπορεί να καταστεί εμφανής ως εξής:

$$E = \left(2\sqrt{\lambda}\,S\right)^{1/2} \cdot \left[1 + \frac{3\,S}{8\sqrt{\lambda}} - \frac{21\,S^2}{128\,\lambda} + \frac{187\,S^3}{1\,024\,\lambda^{3/2}} - \frac{9\,261\,S^4}{32\,768\,\lambda^2} + \frac{136\,245\,S^5}{262\,144\,\lambda^{5/2}} - O\left(\frac{S^6}{\lambda^3}\right)\right]. \tag{4.30}$$

Κβαντικές διορθώσεις για τη μικρή χορδή του AdS_3 έχουν υπολογιστεί σε 1 βρόχο, στην εργασία [54]:

$$E_{qc} = \left(2\sqrt{\lambda}\,S\right)^{1/2} \cdot \left[\left(\mathrm{a}_{00} + \frac{\mathrm{a}_{01}}{\sqrt{\lambda}} + \ldots\right) + \left(\mathrm{a}_{10} + \frac{\mathrm{a}_{11}}{\sqrt{\lambda}} + \ldots\right)\frac{S}{\sqrt{\lambda}} + \left(\mathrm{a}_{20} + \frac{\mathrm{a}_{21}}{\sqrt{\lambda}} + \ldots\right)\frac{S^2}{\lambda} + \ldots\right],$$

οι λίγοι πρώτοι συντελεστές είναι,

$$\mathrm{a}_{00} = 1\,, \qquad \mathrm{a}_{01} = 3 - 4\ln 2\,, \qquad \mathrm{a}_{10} = \frac{3}{8}\,, \qquad \mathrm{a}_{11} = -\frac{1219}{576} + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{3}{4}\zeta(3).$$

Πιο πρόσφατα αποτελέσματα έχουν βρεθεί από τον Basso [55] καθώς επίσης και από το σύστημα $P\mu$. Δυστυχώς ο χώρος εδώ δεν επαρκεί για να επεκταθούμε σε αυτά τα αποτελέσματα.

4.1.2 Μεγάλες Χορδές στον AdS_3: $\omega \to 1^+$, $S \gg \sqrt{\lambda}$

Ας συνοψίσουμε καταρχήν τα αποτελέσματα των [12] που αφορούν στην αντιδιαμετρικά αντίθετη περιοχή $\omega \to 1^+$ $(S \gg \lambda)$:

$$\begin{aligned} E = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi\omega} \cdot \Bigg\{ & \frac{\omega^2}{\omega^2 - 1} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(n+3/2)}{n!(n+1)!}\Big[2\psi(n+1) - 2\psi(n+1/2) - \\ & - \ln(1-1/\omega^2) - \frac{1}{(n+1)(2n+1)}\Big]\cdot(1-1/\omega^2)^n\Bigg\} = \\ = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi\omega} \cdot \Bigg\{ & \frac{\omega^2}{\omega^2-1} - \frac{1}{4}\left[\ln\left(1-1/\omega^2\right) - 4\ln 2 + 1\right] - \frac{3}{32}\left(1-1/\omega^2\right)\Big[\ln\left(1-1/\omega^2\right) - \\ & - 4\ln 2 + \frac{13}{6}\Big] - \frac{15}{256}\left(1-1/\omega^2\right)^2\left[\ln\left(1-1/\omega^2\right) - 4\ln 2 + \frac{12}{5}\right] + \ldots\Bigg\} \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned} S = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \Bigg\{ & \frac{\omega^2}{\omega^2 - 1} - \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\Gamma(n+1/2))^2}{n!(n+1)!}\Big[2\psi(n+1) - 2\psi(n+1/2) - \ln(1-1/\omega^2) + \\ & + \frac{1}{n+1}\Big]\cdot(1-1/\omega^2)^n\Bigg\} = \\ = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \Bigg\{ & \frac{\omega^2}{\omega^2-1} + \frac{1}{4}\left[\ln\left(1-1/\omega^2\right) - 4\ln 2 - 1\right] + \frac{1}{32}\left(1-1/\omega^2\right)\Big[\ln\left(1-1/\omega^2\right) - \\ & - 4\ln 2 + \frac{3}{2}\Big] + \frac{3}{256}\left(1-1/\omega^2\right)^2\left[\ln\left(1-1/\omega^2\right) - 4\ln 2 + 2\right] + \ldots\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Οι δύο σειρές μπορούν επίσης να εκφραστούν μέσω της συμπληρωματικής παραμέτρου $x \equiv 1 - 1/\omega^2 \to 0^+$:

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\pi\,E}{\sqrt{\lambda}} = 2\sqrt{1-x}\cdot\left\{\frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n\left(d_n \ln x + h_n\right)\right\} =$$

$$= \frac{2}{x} - 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \left\{ \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} \left(d_{n-k} \ln x + h_{n-k} \right) \right\} \tag{4.33}$$

$$\mathcal{S} \equiv \frac{\pi S}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{x} + 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(c_n \ln x + b_n \right). \tag{4.34}$$

Οι συντελεστές των σειρών (4.33) και (4.34) δίδονται από:[20]

$$d_n = -\frac{1}{4}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \cdot \frac{2n+1}{n+1}$$

$$h_n = -d_n \cdot \left[4\ln 2 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k-1}\right) + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+1} \right]$$

$$c_n = \frac{1}{4}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{n+1} = -\frac{d_n}{2n+1}$$

$$b_n = -c_n \cdot \left[4\ln 2 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k-1}\right) + \frac{1}{n+1} \right], \tag{4.35}$$

όπου $n = 0\,,1\,,2\,,\ldots$. Αναλυτικά, οι μερικοί πρώτοι εξ'αυτών των συντελεστών είναι:

$$\begin{aligned}
d_0 &= -\frac{1}{4}\,, & d_1 &= -\frac{3}{32}\,, & d_2 &= -\frac{15}{256} \\
h_0 &= \ln 2 - \frac{1}{4}\,, & h_1 &= \frac{3}{8}\ln 2 - \frac{13}{64}\,, & h_2 &= \frac{15}{64}\ln 2 - \frac{9}{64} \\
c_0 &= \frac{1}{4}\,, & c_1 &= \frac{1}{32}\,, & c_2 &= \frac{3}{256} \\
b_0 &= -\ln 2 - \frac{1}{4}\,, & b_1 &= -\frac{1}{8}\ln 2 + \frac{3}{64}\,, & b_2 &= -\frac{3}{64}\ln 2 + \frac{3}{128}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

4.1.3 Δυαδικότητα Μικρών-Μεγάλων Χορδών

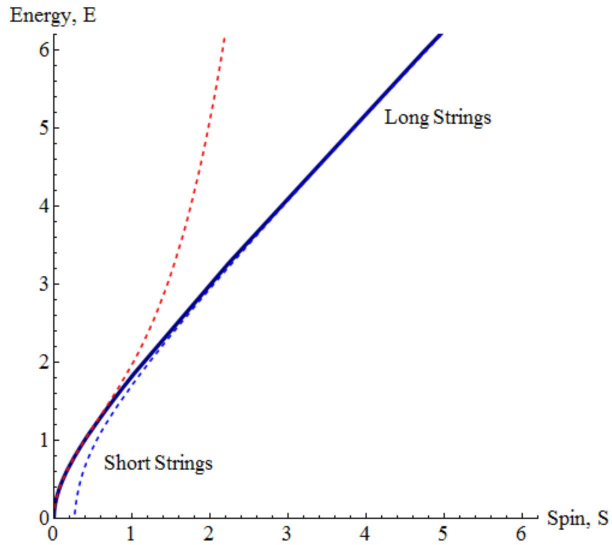
Ακολουθώντας τους Γεωργίου και Σαββίδη [12], θα εξαγάγουμε τώρα έναν τύπο που συνδέει τη διατηρούμενη ενέργεια και το σπίν των «μικρών» χορδών ($\omega \to \infty$) με την ενέργεια και το σπίν των «μεγάλων» χορδών ($\omega \to 1^+$). Ας θεωρήσουμε τη σχέση Legendre για τα πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου και δεύτερου είδους (βλέπε π.χ. [56, 57]):

$$\mathbb{E}(k)\mathbb{K}(k') + \mathbb{K}(k)\mathbb{E}(k') - \mathbb{K}(k)\mathbb{K}(k') = \frac{\pi}{2}, \tag{4.37}$$

όπου τα ορίσματα $k = 1/\omega^2$ και $k' = x = 1/\omega'^{\,2}$ ικανοποιούν τη σχέση $k + k' = 1$. Λύνουμε τις (4.22)–(4.23) ως προς $\mathbb{E}(k)$ και $\mathbb{K}(k)$ και αντικαθιστούμε τις τιμές τους στην (4.37). Λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση μεταξύ κλασικών μικρών και μεγάλων διπλωμένων χορδών που περιστρέφονται εντός του AdS_3:

$$\frac{1}{\omega}ES' + \frac{1}{\omega'}E'S - SS' = \frac{2\lambda}{\pi}, \quad \lambda \to \infty. \tag{4.38}$$

[20] Για το διπλό παραγοντικό τίθεται $0!! = 1$, $(-1)!! = 1$, $(-3)!! = -1$.



Σχήμα 4: Η ενέργεια συναρτήσει του σπίν της κλειστής διπλωμένης χορδής (4.8) του AdS_3, για $\omega^2 > 1$. Η κόκκινη διακεκομμένη γραμμή είναι το διάγραμμα των 4 πρώτων όρων στην προσέγγιση της «μικρής» χορδής (4.30), ενώ η μπλε διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην προσέγγιση της «μεγάλης » χορδής (που καθορίζεται από τους συντελεστές (5.104)–(5.105)).

Υπάρχει ένας εναλλακτικός τρόπος γραφής της (4.38) συναρτήσει των ανώμαλων διαστάσεων $\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{S}$:

$$\frac{1}{\omega}\gamma\,\mathcal{S}' + \frac{1}{\omega'}\gamma'\,\mathcal{S} + \left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega'} - 1\right)\mathcal{S}\mathcal{S}' = 2\pi, \quad \mathcal{E} \equiv \frac{\pi\,E}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathcal{S} \equiv \frac{\pi\,S}{\sqrt{\lambda}}. \tag{4.39}$$

Δεν είναι γνωστό αν δυαδικότητες μικρών-μεγάλων χορδών παρόμοιες με τις (4.38)–(4.39) μπορούν να διατυπωθούν και στο κβαντικό επίπεδο. Μια κλασική δυαδικότητα μικρών-μεγάλων χορδών θα διατυπωθεί επίσης πιο κάτω και για την περίπτωση (II) των GKP. Ακόμη περισσότερες δυαδικότητες μικρών-μεγάλων χορδών μπορούν να βρεθούν στο παράρτημα Β′.

4.2 Περιστρεφόμενες Χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$

Η κλειστή διπλωμένη χορδή GKP (II) έχει το κέντρο της στον πόλο της S^2 και περιστρέφεται γύρω της:

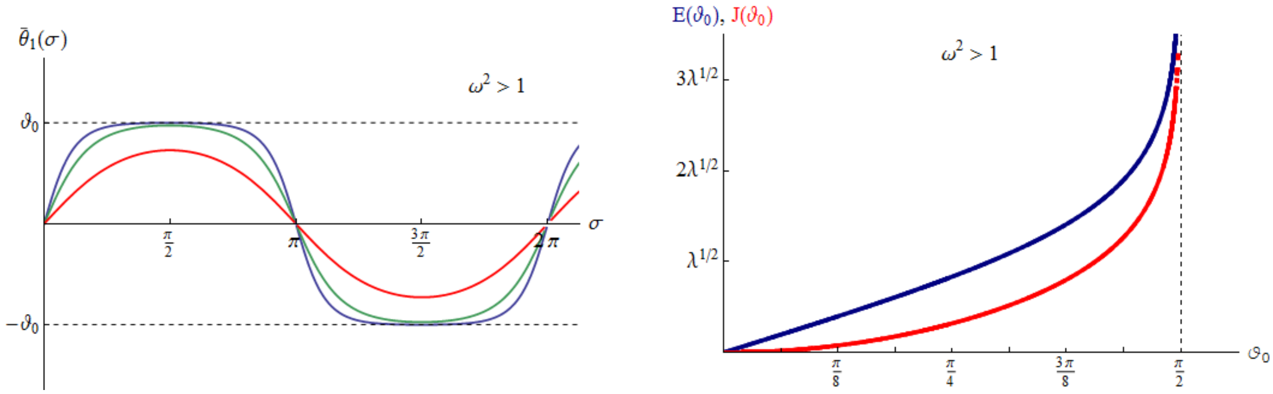
$$\Big\{t = \kappa\tau,\ \rho = \theta = \phi_1 = \phi_2 = 0\Big\} \times \Big\{\overline{\theta}_1 = \overline{\theta}_1(\sigma)\,,\ \overline{\theta}_2 = \kappa\omega\tau,\ \overline{\phi}_1 = \overline{\phi}_2 = \overline{\phi}_3 = 0\Big\}. \tag{4.40}$$

Σε συντεταγμένες εμβάπτισης το ansatz γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
&Y_0 = \ell\cos\kappa\tau\,, \quad Y_5 = \ell\sin\kappa\tau\,, && X_1 = \ell\cos\overline{\theta}_1(\sigma)\,, && X_2 = X_4 = X_6 = 0\\
&Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4 = 0 && X_3 = \ell\sin\overline{\theta}_1(\sigma)\cos\kappa\omega\tau &&\\
& && X_5 = \ell\sin\overline{\theta}_1(\sigma)\sin\kappa\omega\tau. &&
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Στη σύμμορφη βαθμίδα ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) η χορδή έχει την ακόλουθη δράση Polyakov:

$$S_P = \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'}\int\left(-\dot{t}^2 + \dot{\overline{\theta}}_2^2\sin^2\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_1'^2\right)d\tau d\sigma = \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'}\int\left(-\kappa^2 + \kappa^2\omega^2\sin^2\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_1'^2\right)d\tau d\sigma. \tag{4.42}$$



Σχήμα 5: $\overline{\theta} = \theta_1(\sigma)$ και ενέργεια/σπίν της κλειστής διπλωμένης χορδής GKP στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ (4.40), για $\omega^2 > 1$.

Η δράση αυτή συνεπάγεται τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης και συνδέσμους Virasoro (3.4):

$$\overline{\theta}_1'' + \kappa^2\omega^2 \sin\overline{\theta}_1 \cos\overline{\theta}_1 = 0 \tag{4.43}$$

$$\overline{\theta}_1'^{\,2} - \kappa^2\left(1 - \omega^2 \sin^2\overline{\theta}_1\right) = 0, \tag{4.44}$$

που είναι ισοδύναμοι με:

$$\frac{d\sigma}{d\overline{\theta}_1} = \frac{1}{\kappa\sqrt{1-\omega^2\sin^2\overline{\theta}_1}}. \tag{4.45}$$

Ανάλογα με την τιμή του $\omega \neq 1$, λαμβάνονται οι ακόλουθες περιπτώσεις:

(i). $\omega^2 > 1$: Κλειστή διπλωμένη χορδή που περιστρέφεται στερεά γύρω από τον πόλο της S^2,

$$\overline{\theta}_1 \in [0\,, \arcsin 1/\omega = \vartheta_0].$$

α. «Μικρές» Χορδές: $\omega \to \infty$, $\vartheta_0 \sim 1/\omega$.

β. «Μεγάλες» Χορδές: $\omega = 1 + 2\eta \to 1^+$, $\vartheta_0 \to \pi/2$.

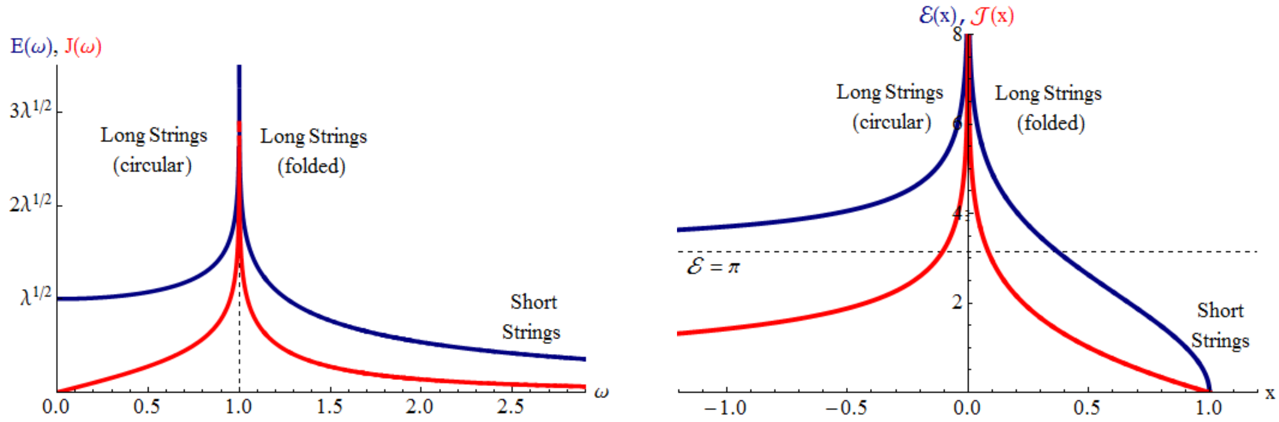
(ii). $\omega^2 < 1$: Κυκλική χορδή κατά μήκος ενός πολικού μέγιστου κύκλου της S^2, που περιστρέφεται στερεά γύρω από τους πόλους,[21]

$$\overline{\theta}_1 \in [0\,, \pi/2 = \vartheta_0].$$

Τα ολοκληρώματα για το μήκος της χορδής και τα διατηρούμενα φορτία δίνονται από:

$$\sigma\left(\overline{\theta}_1\right) = \int_0^{\overline{\theta}_1} \frac{d\overline{\theta}_1}{\kappa\sqrt{1-\omega^2\sin^2\overline{\theta}_1}} = \frac{1}{\kappa}\cdot\mathbb{F}\left(\overline{\theta}_1|\omega^2\right) \tag{4.46}$$

[21] Σε αυτή την περίπτωση η χορδή δεν διπλώνει για ϑ_0 ($d\sigma/d\overline{\theta}_1|_{\vartheta_0} \neq \infty$). Τα τέσσερα κομμάτια της ενώνονται και σχηματίζουν ένα μέγιστο κύκλο.



Σχήμα 6: Ενέργεια/σπίν της κλειστής διπλωμένης/κυκλικής χορδής στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ (4.40), συναρτήσει του ω και του x.

$$E=\left|\frac{\partial L}{\partial\dot{t}}\right|=\frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}\kappa\,d\sigma=\frac{\kappa\,\ell^2}{\alpha'}=4\cdot\frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{\vartheta_0}\frac{d\bar{\theta}_1}{\sqrt{1-\omega^2\sin^2\bar{\theta}_1}}=\frac{2\ell^2}{\pi\alpha'}\cdot\mathbb{F}\left(\vartheta_0|\omega^2\right) \tag{4.47}$$

$$J=\frac{\partial L}{\partial\dot{\bar{\theta}}_2}=\frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}\kappa\,\omega\,\sin^2\bar{\theta}_1\,d\sigma=4\cdot\frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{\vartheta_0}\frac{\omega\,\sin^2\bar{\theta}_1\,d\bar{\theta}_1}{\sqrt{1-\omega^2\sin^2\bar{\theta}_1}}=\frac{2\ell^2}{\pi\alpha'\omega}\left(\mathbb{F}\left(\vartheta_0|\omega^2\right)-\mathbb{E}\left(\vartheta_0|\omega^2\right)\right). \tag{4.48}$$

Τα ολοκληρώματα αυτά αποκλίνουν για $\omega=1$. Θέτοντας $\sigma\left(\vartheta_0\right)=\pi/2$ λαμβάνουμε:

$$\bar{\theta}_1\left(\sigma\right)=am\left[\kappa\,\sigma\,\middle|\,\omega^2\right]\quad,\quad\kappa=\frac{2}{\pi}\cdot\mathbb{F}\left(\vartheta_0|\omega^2\right). \tag{4.49}$$

Από τις (4.47)–(4.49) λαμβάνονται τα ακόλουθα αποτελέσματα:

<u>$\omega^2<1$</u>: Κυκλική χορδή ($\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$).

$$\bar{\theta}_1\left(\sigma\right)=am\left[\kappa\,\sigma\,\middle|\,\omega^2\right]\quad,\quad\kappa=\frac{2}{\pi}\cdot\mathbb{K}\left(\omega^2\right) \tag{4.50}$$

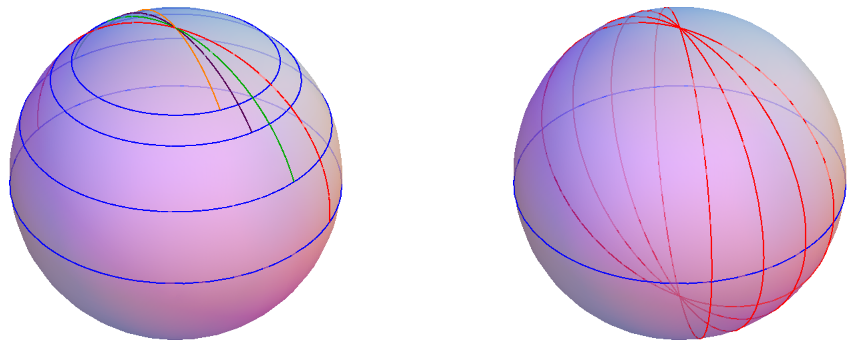
$$E\left(\omega\right)=\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\cdot\mathbb{K}\left(\omega^2\right)\Rightarrow\mathcal{E}\equiv\frac{\pi\,E}{\sqrt{\lambda}}=2\,\mathbb{K}\left(1-\widetilde{x}\right) \tag{4.51}$$

$$J\left(\omega\right)=\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi\,\omega}\cdot\Big[\mathbb{K}\left(\omega^2\right)-\mathbb{E}\left(\omega^2\right)\Big]\Rightarrow\mathcal{J}\equiv\frac{\pi\,J}{\sqrt{\lambda}}=\frac{2}{\sqrt{1-\widetilde{x}}}\cdot\Big[\mathbb{K}\left(1-\widetilde{x}\right)-\mathbb{E}\left(1-\widetilde{x}\right)\Big]. \tag{4.52}$$

$$\gamma\equiv\mathcal{E}-\mathcal{J}=\frac{2}{\sqrt{1-\widetilde{x}}}\left[\left(\sqrt{1-\widetilde{x}}-1\right)\mathbb{K}\left(1-\widetilde{x}\right)+\mathbb{E}\left(1-\widetilde{x}\right)\right], \tag{4.53}$$

<u>$\omega^2>1$</u>: Κλειστή διπλωμένη χορδή ($\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$).

$$\bar{\theta}_1\left(\sigma\right)=am\left[\kappa\,\sigma\,\middle|\,\omega^2\right],\quad\kappa=\frac{2}{\pi\,\omega}\cdot\mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right),\quad\omega=\csc\vartheta_0 \tag{4.54}$$



Σχήμα 7: Γραφήματα των χορδών GKP (II) επί του $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$. Αριστερά έχουν σχεδιαστεί διάφορα στιγμιότυπα της κλειστής διπλωμένης χορδής επί της σφαίρας για τέσσερις διαφορετικές τιμές της γωνιακής ταχύτητας $\omega > 1$ (καθένα με διαφορετικό χρώμα). Αυτή η χορδή περιστρέφεται ως στερεό σώμα γύρω από το σταθερό πολικό του σημείο. Στα δεξιά, έχουμε σχεδιάσει τέσσερα στιγμιότυπα της κυκλικής χορδής ($\omega < 1$), που περιστρέφεται στερεά γύρω από τον πολικό άξονα.

$$E\left(\omega\right) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi\,\omega} \cdot \mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \Rightarrow \mathcal{E} \equiv \frac{\pi\,E}{\sqrt{\lambda}} = 2\sqrt{1-x} \cdot \mathbb{K}\left(1-x\right) \tag{4.55}$$

$$J\left(\omega\right) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \left[\mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) - \mathbb{E}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)\right] \Rightarrow \mathcal{J} \equiv \frac{\pi\,J}{\sqrt{\lambda}} = 2\left[\mathbb{K}\left(1-x\right) - \mathbb{E}\left(1-x\right)\right] \tag{4.56}$$

$$\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{J} = 2\left[\left(\sqrt{1-x} - 1\right) \cdot \mathbb{K}\left(1-x\right) + \mathbb{E}\left(1-x\right)\right], \tag{4.57}$$

όπου $x \equiv 1 - 1/\omega^2$ και $\widetilde{x} \equiv 1 - \omega^2$ είναι οι συμπληρωματικές παράμετροι των $1/\omega^2$ και ω^2 αντίστοιχα. Στα σχήματα 5–6 έχει σχεδιαστεί το διάγραμμα $\overline{\theta}_1 = \overline{\theta}_1\left(\sigma\right)$ για διάφορες τιμές του $\omega > 1$, ενώ η ενέργεια/σπίν της χορδής στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ έχει σχεδιαστεί συναρτήσει των μεταβλητών ϑ_0, ω και x. Στο σχήμα 7 έχουν σχεδιαστεί τόσο η διπλωμένη χορδή (αριστερά) όσο και η κυκλική χορδή (δεξιά) των GKP επί της δισδιάστατης σφαίρας.

Για $\omega > 1$, υπάρχουν δύο ενδιαφέρουσες περιοχές όπου θα θέλαμε να υπολογίσουμε τη σχέση $E = E\left(J\right)$ και τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \gamma\left(J\right)$, το όριο των μικρών χορδών $\omega \to \infty$ και το όριο των μεγάλων χορδών $\omega \to 1^+$.

4.2.1 Μικρές Διπλωμένες Χορδές στον $\mathbb{R} \times \mathbf{S}^2$: $\omega \to \infty$, $J \ll \sqrt{\lambda}$

Τα αναπτύγματα της ενέργειας και του σπίν για τις μικρές χορδές του $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ ($\omega \to \infty$) συναρτήσει της γωνιακής ταχύτητας ω δίδονται από (βλέπε και παράρτημα Ε′):

$$E = \sqrt{\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{1}{\omega^{2n+1}} = \sqrt{\lambda} \cdot \left[\frac{1}{\omega} + \frac{1}{4\,\omega^3} + \frac{9}{64\,\omega^5} + \frac{25}{256\,\omega^7} + O\left(\frac{1}{\omega^9}\right)\right] \tag{4.58}$$

$$J = \sqrt{\lambda} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{2n}{2n-1} \frac{1}{\omega^{2n}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \cdot \left[\frac{1}{\omega^2} + \frac{3}{8\,\omega^4} + \frac{15}{64\,\omega^6} + O\left(\frac{1}{\omega^8}\right)\right]. \tag{4.59}$$

Μπορούμε να αντιστρέψουμε τις σειρές (4.59) χρησιμοποιώντας την Mathematica και εν συνεχεία να εισαγάγουμε την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x\left(\mathcal{J}\right)$ που υπολογίσαμε, στην έκφραση για την ενέργεια

(4.58). Έτσι λαμβάνουμε τη σχέση $\mathcal{E} = \mathcal{E}\left(\mathcal{J}\right)$:

$$x = 1 - \frac{2\mathcal{J}}{\pi} + \frac{3\mathcal{J}^2}{2\pi^2} - \frac{3\mathcal{J}^3}{8\pi^3} - \frac{5\mathcal{J}^4}{64\pi^4} + \frac{9\mathcal{J}^5}{512\pi^5} + \frac{21\mathcal{J}^6}{1024\pi^6} + \frac{35\mathcal{J}^7}{8192\pi^7} - \frac{459\mathcal{J}^8}{131.072\pi^8} - \ldots \tag{4.60}$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{2}\cdot\left[\pi^{1/2}\mathcal{J}^{1/2} + \frac{\mathcal{J}^{3/2}}{8\,\pi^{1/2}} + \frac{3\,\mathcal{J}^{5/2}}{128\,\pi^{3/2}} + \frac{\mathcal{J}^{7/2}}{1024\,\pi^{5/2}} - \frac{61\,\mathcal{J}^{9/2}}{32.768\,\pi^{7/2}} - \frac{201\,\mathcal{J}^{11/2}}{262.144\,\pi^{9/2}} + \ldots\right]. \tag{4.61}$$

Οι συντελεστές της μικρής κλειστής διπλωμένης χορδής (4.58) εντός του $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ διαφέρουν από τους αντίστοιχους της χορδής (4.25) εντός του AdS_3 κατά ένα παράγοντα $(2n+1)$, $n = 0,\,1,\,\ldots$ Επιπλέον, οι συντελεστές της στροφορμής J στη σχέση (4.59) διαφέρουν από εκείνους για το σπίν S στην (4.26) κατά τον παράγοντα $1/(2n-1)$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η (4.22) και η (4.23) μπορούν να ληφθούν από τις (4.55), (4.56) με παραγώγιση/ολοκλήρωση. Η σχέση (4.61) μπορεί επίσης να γραφεί ως εξής:

$$E = \left(2\sqrt{\lambda}\,J\right)^{1/2}\cdot\left[1 + \frac{J}{8\sqrt{\lambda}} + \frac{3J^2}{128\,\lambda} + \frac{J^3}{1\,024\,\lambda^{3/2}} - \frac{61J^4}{32\,768\,\lambda^2} - \frac{201J^5}{262\,144\,\lambda^{5/2}} + O\left(\frac{J^6}{\lambda^3}\right)\right]. \tag{4.62}$$

4.2.2 Μεγάλες Διπλωμένες Χορδές στον $\mathbb{R}\times\mathbf{S}^2$: $\omega\to 1^+$, $J \gg \sqrt{\lambda}$

Η ενέργεια και το σπίν των μεγάλων χορδών επί του $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ $(\omega\to 1^+)$ γράφονται ως εξής (χρησιμοποιώντας τους τύπους του παραρτήματος E′):

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi^2\omega}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\Gamma\left(n+1/2\right)}{n!}\right)^2\left[2\psi\left(n+1\right) - 2\psi\left(n+1/2\right) - \ln\left(1-1/\omega^2\right)\right]\cdot\left(1-1/\omega^2\right)^n = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi\omega}\cdot\left\{\left[4\ln 2 - \ln\left(1-1/\omega^2\right)\right] + \frac{1}{4}\left(1-1/\omega^2\right)\left[4\ln 2 - 2 - \ln\left(1-1/\omega^2\right)\right] + \ldots\right\} \end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\cdot\left\{4\ln 2 - 2 - \ln\left(1-1/\omega^2\right) - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+1/2\right)\Gamma\left(n+3/2\right)}{\left((n+1)!\right)^2}\left[2\,\psi\left(n+1\right) - \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. -2\,\psi\left(n+1/2\right) - \ln\left(1-1/\omega^2\right) + \frac{2n}{\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}\right]\cdot\left(1-1/\omega^2\right)^{n+1}\right\} = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\cdot\left\{\left[4\ln 2 - 2 - \ln\left(1-1/\omega^2\right)\right] - \frac{1}{4}\left(1-1/\omega^2\right)\left[4\ln 2 - \ln\left(1-1/\omega^2\right)\right] + \ldots\right\}. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Χρησιμοποιώντας τη συμπληρωματική παράμετρο $x \equiv 1 - 1/\omega^2 \to 0^+$ μπορούμε να γράψουμε τις παραπάνω σειρές ως εξής:

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\pi\,E}{\sqrt{\lambda}} = 2\sqrt{1-x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(d_n\ln x + h_n\right) = -2\sum_{n=0}^{\infty}x^n\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\left(d_{n-k}\ln x + h_{n-k}\right) \tag{4.65}$$

$$\mathcal{J} \equiv \frac{\pi\,J}{\sqrt{\lambda}} = 2\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(c_n\ln x + b_n\right). \tag{4.66}$$

Οι συντελεστές των (4.65) και (4.66) δίδονται από:

$$d_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$$

$$h_n = -d_n \cdot \left[4\ln 2 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k-1}\right)\right]$$

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n-1} = -\frac{d_n}{2n-1}$$

$$b_n = -c_n \cdot \left[4\ln 2 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k-1}\right) + \frac{2}{2n-1}\right], \tag{4.67}$$

για $n = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots$ Οι μερικοί πρώτοι εξ'αυτών είναι:

$$\begin{aligned}
&d_0 = -\frac{1}{2}\,, && d_1 = -\frac{1}{8}\,, && d_2 = -\frac{9}{128} \\
&h_0 = 2\ln 2\,, && h_1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\,, && h_2 = \frac{9}{32}\ln 2 - \frac{21}{128} \\
&c_0 = -\frac{1}{2}\,, && c_1 = \frac{1}{8}\,, && c_2 = \frac{3}{128} \\
&b_0 = 2\ln 2 - 1\,, && b_1 = -\frac{1}{2}\ln 2\,, && b_2 = -\frac{3}{32}\ln 2 + \frac{5}{128}.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

4.2.3 Αργές Κυκλικές Χορδές στον $\mathbb{R}\times\mathbf{S}^2$: $\omega \to 0^+$, $J \ll \lambda$

Παρά το γεγονός ότι οι χορδές GKP επί της σφαίρας για τις οποίες $\omega < 1$ (κυκλικές χορδές) είναι ασταθείς,[22] μοιάζουν πολύ με τις χορδές GKP για τις οποίες $\omega > 1$ (διπλωμένες χορδές) που μελετήθηκαν στις §4.2.1–§4.2.2. Σε αυτή την υποενότητα και την επόμενη, θα υπολογίσουμε τις εκφράσεις $E = E\,(J)$ για τις αργές (μικρά J) και γρήγορες (μεγάλα J) κυκλικές χορδές στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$. Στην περίπτωση των αργών κυκλικών χορδών ($\omega \to 0^+$) τα αναπτύγματα της ενέργειας (4.51) και του σπίν (4.52) συναρτήσει της γωνιακής ταχύτητας ω, δίδονται από:

$$E = \sqrt{\lambda}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\omega^{2n} = \sqrt{\lambda}\cdot\left[1 + \frac{\omega^2}{4} + \frac{9\,\omega^4}{64} + \frac{25\,\omega^6}{256} + \frac{1225\,\omega^8}{16\,384} + O\left(\omega^{10}\right)\right] \tag{4.69}$$

$$J = \sqrt{\lambda}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{2n}{2n-1}\cdot\omega^{2n-1} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\cdot\left[\omega + \frac{3\,\omega^3}{8} + \frac{15\,\omega^5}{64} + \frac{175\,\omega^7}{1024} + O\left(\omega^9\right)\right]. \tag{4.70}$$

[22] Όπως το έθεσαν οι GKP, οι χορδές στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ με $\omega < 1$ είναι ασταθείς ως προς την τάση τους να «ξεφύγουν προς τις πλευρές» της S^2. Στην ενότητα για τα γιγάντια μαγνόνια θα δούμε ότι οι χορδές GKP επί της σφαίρας σχηματίζονται από δύο γιγάντια μαγνόνια (που έχουν μέγιστη ορμή) τα οποία είναι ευσταθή στην «στοιχειώδη» τους περιοχή και ασταθή στην «διπλή» τους περιοχή. Οι κυκλικές χορδές GKP είναι ασταθείς διότι αποτελούνται από δύο γιγάντια μαγνόνια της «διπλής» περιοχής.

Αντιστρέφοντας τη σειρά (4.70) και εισάγοντας την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $\widetilde{x} \equiv 1 - \omega^2 = \widetilde{x}\,(\mathcal{J})$ στην έκφραση της ενέργειας (4.69), οδηγούμαστε στη σχέση $\mathcal{E} = \mathcal{E}\,(\mathcal{J})$:

$$\widetilde{x} = 1 - \frac{4\,\mathcal{J}^2}{\pi^2} + \frac{12\,\mathcal{J}^4}{\pi^4} - \frac{33\,\mathcal{J}^6}{\pi^6} + \frac{175\,\mathcal{J}^8}{2\pi^8} - \frac{1821\,\mathcal{J}^{10}}{8\pi^{10}} + \frac{4683\,\mathcal{J}^{12}}{8\pi^{12}} - \ldots \tag{4.71}$$

$$\mathcal{E} = \pi + \frac{\mathcal{J}^2}{\pi} - \frac{3\,\mathcal{J}^4}{4\pi^3} + \frac{\mathcal{J}^6}{\pi^5} - \frac{103\,\mathcal{J}^8}{64\pi^7} + \frac{183\,\mathcal{J}^{10}}{64\pi^9} - \frac{1383\,\mathcal{J}^{12}}{256\pi^{11}} + \frac{2725\,\mathcal{J}^{14}}{256\pi^{13}} - \ldots \tag{4.72}$$

Η τελευταία μπορεί επίσης να γραφτεί ως εξής:

$$E = \sqrt{\lambda}\cdot\left[1 + \frac{J^2}{\lambda} - \frac{3\,J^4}{4\,\lambda^2} + \frac{J^6}{\lambda^3} - \frac{103\,J^8}{64\,\lambda^4} + \frac{183\,J^{10}}{64\,\lambda^5} - \frac{1383\,J^{12}}{256\,\lambda^6} + \frac{2725\,J^{14}}{256\,\lambda^7} - O\left(\frac{J^{16}}{\lambda^8}\right)\right]. \tag{4.73}$$

4.2.4 Ταχείες Κυκλικές Χορδές στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$: $\omega \to 1^-$, $J \gg \lambda$

Η περίπτωση $\omega \to 1^-$ των ταχέων κυκλικών χορδών επί της σφαίρας αντιμετωπίζεται παρόμοια με την περίπτωση $\omega \to 1^+$:

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\pi\,E}{\sqrt{\lambda}} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{x}^n\left(d_n \ln\widetilde{x} + h_n\right) \tag{4.74}$$

$$\mathcal{J} \equiv \frac{\pi\,J}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{\sqrt{1-\widetilde{x}}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{x}^n\left(c_n \ln\widetilde{x} + b_n\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{x}^n\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\left(c_{n-k}\ln\widetilde{x} + b_{n-k}\right), \tag{4.75}$$

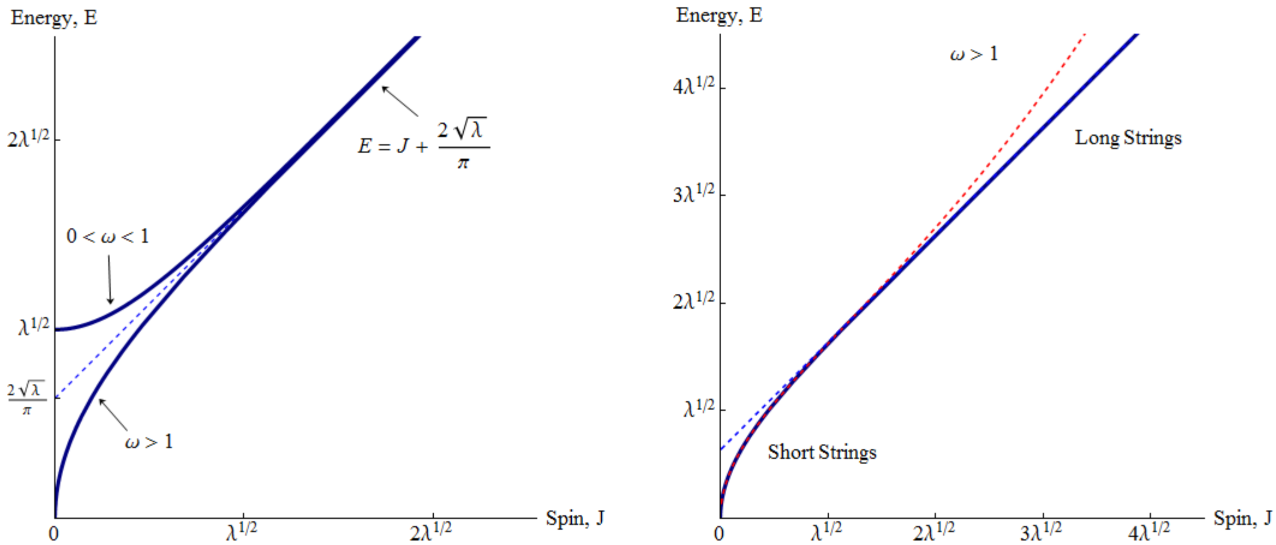
όπου η συμπληρωματική παράμετρος είναι $\widetilde{x} \equiv 1 - \omega^2 \to 0^-$, ενώ οι ορισμοί των συντελεστών b_n, c_n, d_n, h_n είναι όπως εκείνων στις σχέσεις (4.67)–(4.68).

4.2.5 Δυαδικότητα Μικρών-Μεγάλων Χορδών

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μπορούμε να διατυπώσουμε μια δυαδικότητα μικρών-μεγάλων χορδών (ή ακριβέστερα δυαδικότητα αργών/ταχέων χορδών) και στην περίπτωση των χορδών στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$. Αν λύσουμε τις εξισώσεις (4.55)–(4.56) ως προς $\mathbb{E}(k)$ και $\mathbb{K}(k)$ και εισάγουμε τις λύσεις στη σχέση Legendre (4.37), οδηγούμαστε στην ακόλουθη δυαδικότητα μεταξύ κλασικών μικρών και μεγάλων διπλωμένων χορδών στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$:

$$\omega\,\omega'\,EE' - \omega\,EJ' - \omega'\,E'J = \frac{2\lambda}{\pi}, \qquad \omega > 1, \quad \lambda \to \infty, \tag{4.76}$$

όπου τα ορίσματα των ελλειπτικών συναρτήσεων είναι $k = 1/\omega^2$ και $k' = x = 1/\omega'^{\,2}$ αντίστοιχα και ικανοποιούν τη σχέση $k + k' = 1$. Με δεδομένο ότι μεγάλες τιμές του $\omega' \to \infty$ («μικρές/αργές» χορδές) αντιστοιχούν σε τιμές του $\omega \to 1^+$ κοντά στη μονάδα («μεγάλες/ταχείες» χορδές), η σχέση (4.76) δίδει μια απεικόνιση μεταξύ των αντίστοιχων ενεργειών και σπίν. Η σχέση (4.76) είναι εντελώς ανάλογη της δυαδικότητας μικρών-μεγάλων χορδών (4.38) που βρέθηκε στην περίπτωση των κλειστών διπλωμένων χορδών που περιστρέφονται εντός του AdS_3 [12]. Είναι μια κλασική δυαδικότητα μεταξύ χορδών που περιστρέφονται στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ και, για μια ακόμη φορά, θα ήταν ενδιαφέρον να διερευνηθεί το κατά πόσον θα μπορούσε να γενικευθεί στο κβαντικό επίπεδο. Μπορούμε επίσης να διατυπώσουμε την



Σχήμα 8: Ενέργεια συναρτήσει της στροφορμής για τη διπλωμένη κλειστή/κυκλική χορδή (4.40) στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$. Στο δεξιό διάγραμμα ($\omega > 1$), η κόκκινη διακεκομμένη γραμμή αντιπροσωπεύει τους 4 πρώτους όρους της προσέγγισης «μικρής» χορδής (4.62) ενώ η μπλε διακεκομμένη γραμμή περιλαμβάνει τους δύο πρώτους όρους της προσέγγισης «μεγάλης» χορδής (Δ′.3).

(4.76) συναρτήσει της ποσότητας $\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{J}$. Μια εντελώς ανάλογη σχέση μπορεί να διατυπωθεί για ταχείες και αργές κυκλικές χορδές, χρησιμοποιώντας τις (4.51)–(4.52). Το αποτέλεσμα είναι:

$$EE' - \omega' \, EJ' - \omega \, E'J = \frac{2\lambda}{\pi}, \qquad \omega < 1, \quad \lambda \to \infty, \tag{4.77}$$

όπου $\widetilde{k} = \omega^2$, $\widetilde{k}' = \widetilde{x} = \omega'^2$ και $\widetilde{k} + \widetilde{k}' = 1$. Περισσότερα για τις δυαδικότητες μικρών-μεγάλων χορδών μπορούν να βρεθούν στο παράρτημα Β′.

4.3 Παλλόμενες Χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov στον AdS_3

Η σύντομη περιήγησή μας στις μποζονικές χορδές των GKP θα ολοκληρωθεί με την παρουσίαση της περίπτωσης (III). Αυτή αποτελείται από μία κλειστή διπλωμένη χορδή που πάλλεται εντός του AdS_3 μέρους του $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ και δίδεται από το ακόλουθο ansatz:

$$\Big\{t = t\,(\tau)\,,\, \rho = \rho(\tau),\, \theta = 0,\, \phi_1 = w\sigma,\, \phi_2 = 0\Big\} \times \Big\{\overline{\theta}_1 = \overline{\theta}_2 = \overline{\phi}_1 = \overline{\phi}_2 = \overline{\phi}_3 = 0\Big\}. \tag{4.78}$$

Στον χώρο εμβάπτισης, το παραπάνω ansatz εκφράζεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
&Y_0 = \ell \cosh\rho(\tau)\cos t(\tau), \qquad Y_3 = Y_4 = 0, \qquad X_1 = R = \ell \\
&Y_1 = \ell \sinh\rho(\tau)\cos w\sigma \qquad\qquad\qquad\quad\; X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = X_6 = 0 \\
&Y_2 = \ell \sinh\rho(\tau)\sin w\sigma \\
&Y_5 = \ell \cosh\rho(\tau)\sin t(\tau).
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Η δράση Polyakov για τη χορδή (στη σύμμορφη βαθμίδα $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή, αν επιπλέον υπολογίσουμε και το ολοκλήρωμα ως προς την μεταβλητή σ $(\sigma \in [0\,,2\pi))$:[23]

$$S_P = \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'}\int\left(-\dot{t}^2\cosh^2\rho+\dot{\rho}^2-\phi_1'^2\sinh^2\rho\right)d\tau d\sigma = \tag{4.80}$$

$$= \frac{\ell^2}{2\alpha'}\int\left(-\dot{t}^2\cosh^2\rho+\dot{\rho}^2-w^2\sinh^2\rho\right)d\tau. \tag{4.81}$$

Οι εξισώσεις κίνησης και οι σύνδεσμοι Virasoro γράφονται:

$$\ddot{t}\cosh^2\rho+2\,\dot{t}\,\dot{\rho}\,\cosh\rho\sinh\rho=0 \tag{4.82}$$

$$\ddot{\rho}+\sinh\rho\cosh\rho\left(\dot{t}^2+w^2\right)=0 \tag{4.83}$$

$$\dot{\rho}^2-\dot{t}^2\cosh^2\rho+w^2\sinh^2\rho=0. \tag{4.84}$$

Λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης:

$$\frac{d\tau}{d\rho}=\frac{\cosh\rho}{w\sqrt{e^2-\sinh^2\rho\cosh^2\rho}}\,, \qquad e=\frac{\dot{t}}{w}\cdot\cosh^2\rho\,(\tau)\equiv\sinh\rho_0\cosh\rho_0=\text{σταθ.}, \tag{4.85}$$

από τις οποίες συμπεραίνουμε ότι $\rho<\rho_0$. Η διατηρούμενη ενέργεια και το μήκος της χορδής δίδονται από:

$$E=\left|\frac{\partial L}{\partial\dot{t}}\right|=\frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}\dot{t}\cosh^2\rho\,d\sigma=\frac{\ell^2}{\alpha'}\cdot\dot{t}\,\cosh^2\rho=\frac{w\,e\,\ell^2}{\alpha'}=w\sqrt{\lambda}\,e \tag{4.86}$$

$$\tau\,(\rho)=\int_0^{\rho}\frac{\cosh\rho\,d\rho}{w\sqrt{e^2-\cosh^2\rho\sinh^2\rho}}=\int_0^{\sinh\rho}\frac{dx}{w\sqrt{e^2-x^2-x^4}}. \tag{4.87}$$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα του μήκους λαμβάνουμε το $\tau\,(\rho)$ και αντιστρέφοντας αυτήν, το $\rho\,(\tau)$:

$$\tau\,(\rho)=\frac{\mathbb{F}\left[\arcsin\left(\frac{\sinh\rho}{\sinh\rho_0}\right)\middle|-\tanh^2\rho_0\right]}{w\cosh\rho_0}\Leftrightarrow \tag{4.88}$$

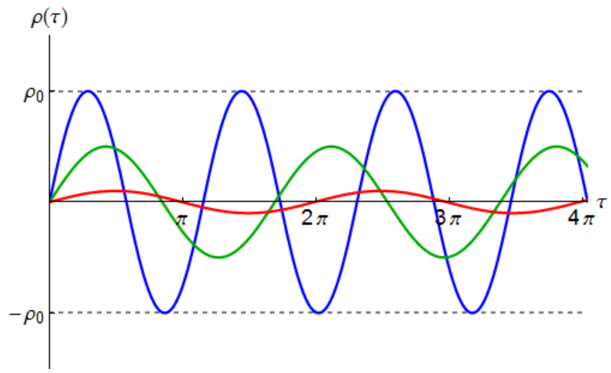
$$\rho\,(\tau)=\left|\text{arcsinh}\left[\sinh\rho_0\cdot sn\left(w\tau\cosh\rho_0\middle|-\tanh^2\rho_0\right)\right]\right|. \tag{4.89}$$

Αυτή αποτελεί μια ταλαντούμενη, χρονικά περιοδική λύση που έχουμε σχεδιάσει για διάφορα ρ_0 στο σχήμα 9.

4.3.1 Ημικλασική Κβάντωση

Ακολουθώντας τους [51, 52], πρόκειται τώρα να κβαντώσουμε ημικλασσικά την παλλόμενη χορδή των GKP εντός του AdS_3. Προκειμένου να διευκολυνθεί η όλη διαδικασία, ας μετασχηματίσουμε το σύστημα

[23] Λόγω του ότι η σύμμορφη βαθμίδα $\gamma_{ab}=\eta_{ab}$, είναι ασύμβατη με τη βαθμίδα στατικού χρόνου $t=\tau$ (η εξίσωση κίνησης (4.82) ως προς τη μεταβλητή t δεν ικανοποιείται), είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε $t=t\,(\tau)$.



Σχήμα 9: $\rho = \rho(\tau)$ για την παλλόμενη χορδή GKP στον AdS_3, που δίδεται από την (4.78).

των καθολικών συντεταγμένων με το μετασχηματισμό $\tanh\rho = \sin\xi$, όπου $\xi \in [0, \pi/2]$. Η δράση Polyakov (4.81) γίνεται:

$$S_P = \frac{\ell^2}{2\alpha'}\int\left(-\dot{t}^2\cosh^2\rho + \dot{\rho}^2 - w^2\sinh^2\rho\right)d\tau = \frac{\ell^2}{2\alpha'}\int\sec^2\xi\left(-\dot{t}^2 + \dot{\xi}^2 - w^2\sin^2\xi\right)d\tau. \quad (4.90)$$

Η Χαμιλτονιανή πυκνότητα είναι ίση προς το μηδέν, σύμφωνα με το σύνδεσμο (4.84):

$$\mathcal{H} = \pi_t\dot{t} + \pi_\xi\dot{\xi} - \mathcal{L} = \frac{\ell^2}{2\alpha'}\left(-\dot{t}^2\cosh^2\rho + \dot{\rho}^2 + w^2\sinh^2\rho\right) = \frac{\ell^2}{2\alpha'}\sec^2\xi\left(-\dot{t}^2 + \dot{\xi}^2 + w^2\sin^2\xi\right) = 0.$$

Συναρτήσει των κανονικών μεταβλητών,

$$\pi_t = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = -\frac{\ell^2}{\alpha'}\,\dot{t}\,\sec^2\xi \qquad \& \qquad \pi_\xi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}} = \frac{\ell^2}{\alpha'}\,\dot{\xi}\,\sec^2\xi, \quad (4.91)$$

Η Χαμιλτονιανή πυκνότητα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

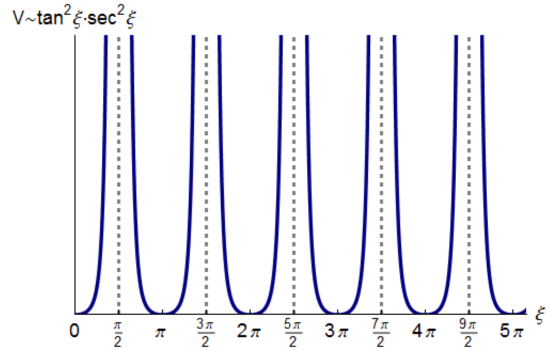
$$\mathcal{H} = \frac{\alpha'}{2\ell^2}\cos^2\xi\,\left(-\pi_t^2 + \pi_\xi^2\right) + \frac{w^2\ell^2}{2\alpha'}\tan^2\xi = 0 \quad (4.92)$$

ή ισοδύναμα,

$$H^2 = \pi_t^2 = \pi_\xi^2 + \left(\frac{w\,\ell^2}{\alpha'}\right)^2\tan^2\xi\,\sec^2\xi = \pi_\xi^2 + w^2\lambda\,\tan^2\xi\,\sec^2\xi. \quad (4.93)$$

Η (4.93) δίδει τη Χαμιλτονιανή ενός σωματιδίου Klein-Gordon εντός του περιοδικού δυναμικού (που έχουμε σχεδιάσει στο σχήμα 10) $V = w^2\lambda\,\tan^2\xi\,\sec^2\xi$. Αυτό το δυναμικό είναι τυπικά συσχετισμένο με την εμφάνιση δομής ενεργειακών ζωνών (band structure), ωστόσο εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με την κλασική του περιοχή. Ας αρχίσουμε με την πρώτη κβάντωση της (4.93) ($\pi_\mu \to i\hbar\partial_\mu$) ως ακολούθως:

$$-\hbar^2\,\partial_t^2\Psi(t,\xi) = -\hbar^2\,\partial_\xi^2\Psi(t,\xi) + w^2\lambda\,\tan^2\xi\,\sec^2\xi\cdot\Psi(t,\xi) \Rightarrow$$



Σχήμα 10: Διάγραμμα του ενεργού δυναμικού $V = w^2\lambda\,\tan^2\xi\,\sec^2\xi$.

$$\Rightarrow -\hbar^2\,\psi''(\xi) = \left(E^2 - w^2\lambda\,\tan^2\xi\,\sec^2\xi\right)\cdot\psi(\xi)\;, \quad \Psi(t,\xi) = e^{-i\,E\,t/\hbar}\cdot\psi(\xi)\,. \tag{4.94}$$

Οι επιτρεπόμενες ενέργειες και κυματοσυναρτήσεις μπορούν να βρεθούν προσεγγιστικά με τη μέθοδο WKB (βλέπε π.χ. [58]) για $\psi(0) = \pm 1$:

$$\int_0^{\xi_0}\sqrt{E_n^2 - w^2\lambda\,\tan^2\xi\,\sec^2\xi}\cdot d\xi = \hbar\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi + O\left(\hbar^2\right)\;, \quad n = 0\,,1\,,2\,,\ldots \tag{4.95}$$

$$\psi_n(\xi) = (-1)^n\left[1 - \frac{w^2\lambda}{E_n^2}\,\tan^2\xi\,\sec^2\xi\right]^{-\frac{1}{4}}\cdot\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_0^{\xi}\sqrt{E_n^2 - w^2\lambda\,\tan^2\xi'\,\sec^2\xi'}\cdot d\xi'\right), \tag{4.96}$$

στην προσέγγιση της φυσικής οπτικής. Το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί και το αποτέλεσμα είναι:

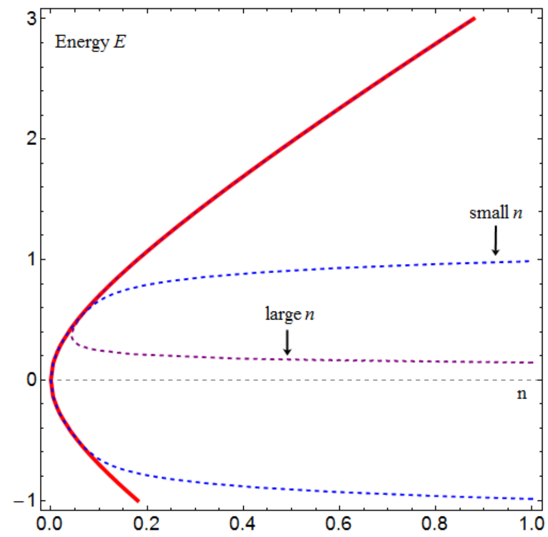
$$w\sqrt{\lambda}\cosh\rho_0\cdot\Big\{\sinh^2\rho_0\,\mathbf{\Pi}(-\sinh^2\rho_0;-\tanh^2\rho_0) + \mathbb{K}(-\tanh^2\rho_0) + \mathbb{E}(-\tanh^2\rho_0)\Big\} = \\ = \hbar\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi + O\left(\hbar^2\right), \tag{4.97}$$

όπου, από τον ορισμό (4.85) του $e = \sinh\rho_0\cosh\rho_0$, το μοναδικό κλασικό σημείο ανάκλασης (turning point) $\tanh\rho_0 = \sin\xi_0$ ικανοποιεί

$$\sinh\rho_0 = \left[\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+4e^2}\right)\right]^{1/2} \;\&\; \cosh\rho_0 = \left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4e^2}\right)\right]^{1/2}, \; e \equiv \frac{E\alpha'}{w\ell^2} = \frac{E}{w\sqrt{\lambda}}. \tag{4.98}$$

Εάν αναπτύξουμε γύρω από την τιμή $E = \infty$, λαμβάνουμε το αποτέλεσμα του [52]:

$$\hbar\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi + O\left(\hbar^2\right) = \pi E - \frac{2\,(2\pi)^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}\cdot w^{1/2}\lambda^{1/4}E^{1/2} + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{12\,(2\pi)^{1/2}}\cdot w^{3/2}\lambda^{3/4}E^{-1/2} - \\ - \frac{3\pi^{3/2}}{20\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}\cdot w^{5/2}\lambda^{5/4}E^{-3/2} + O\left(w^{7/2}\lambda^{7/4}E^{-5/2}\right). \tag{4.99}$$



Σχήμα 11: Διάγραμμα της ενέργειας E συναρτήσει του ενεργειακού επιπέδου n της παλλόμενης χορδής του AdS_3 σύμφωνα με την (4.97). Η μπλε διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην προσέγγιση των «μικρών» n (4.100) και η μώβ διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην προσέγγιση (4.102), για «μεγάλες» τιμές του n.

Μπορούμε να αντιστρέψουμε την (4.99) για μεγάλες τιμές του n, και να λάβουμε την ακόλουθη διπλή σειρά του n και του λ:[24]

$$E = 2\,n + \frac{8\sqrt{w\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}\cdot\lambda^{1/4}n^{1/2} + \left[\frac{1}{2} + \frac{16w\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4}\cdot\lambda^{1/2}\right] + \left[\frac{\sqrt{w\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}\cdot\lambda^{1/4} + \left(\frac{16\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^6} - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{24\pi^{\frac{3}{2}}}\right)w^{3/4}\lambda^{3/4}\right]\cdot n^{-1/2} + O\left(n^{-3/2}\right). \tag{4.100}$$

Μπορούμε ακόμη να αναπτύξουμε γύρω από την τιμή $E = 0$:

$$\hbar\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi + O\left(\hbar^2\right) = \frac{E^2}{4\,w\,\lambda^{1/2}} - \frac{5\,E^4}{32\,w^3\,\lambda^{3/2}} + \frac{63\,E^6}{256\,w^5\,\lambda^{5/2}} - \frac{2145\,E^8}{4096\,w^7\,\lambda^{7/2}} + O\left(w^{-9}\,\lambda^{-9/2}\,E^{10}\right) \tag{4.101}$$

Αντιστρέφοντας για μικρά n λαμβάνουμε ($\hbar \to 1$):

$$E = 2\left(\sqrt{\lambda}\,w\right)^{1/2}\left(n + \frac{1}{4}\right)^{1/2} + \frac{5\left(n+\frac{1}{4}\right)^{3/2}}{2\left(\sqrt{\lambda}\,w\right)^{1/2}} - \frac{77\left(n+\frac{1}{4}\right)^{5/2}}{16\left(\sqrt{\lambda}\,w\right)^{3/2}} + \frac{1365\left(n+\frac{1}{4}\right)^{7/2}}{64\left(\sqrt{\lambda}\,w\right)^{5/2}} + O\left(w^{-7/2}\,\lambda^{-7/4}\,n^{9/2}\right), \tag{4.102}$$

[24] Θέτουμε $\hbar = 1$.

η οποία προφανώς συμφωνεί με την σχέση (4.6) των GKP. Η συμπεριφορά $\sim \lambda^{1/4} n^{1/2}$ είναι χαρακτηριστική του ορίου των μικρών σπίν στο οποίο ο χωρόχρονος είναι κατά προσέγγιση επίπεδος. Προς σύγκριση, βλέπε και τα υπόλοιπα όρια μικρού σπίν (4.30)–(4.62) καθώς επίσης και τις ενέργειες των χορδών σε επίπεδο χωροχρόνο του παραρτήματος Α′.

Σύμφωνα με την εργασία [52], οι τελεστές που αντιστοιχούν στις παραπάνω καταστάσεις χορδών έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{n!}{\sqrt{(2n)!}} \sum_{\text{perms}} \text{Tr} \left[\mathcal{Z} \mathcal{D}_+^{n_1^+} \mathcal{D}_-^{n_1^-} \dots \mathcal{D}_+^{n_k^+} \mathcal{D}_-^{n_k^-} \mathcal{Z} \right] \cdot \exp \left(\mathrm{i} \varphi \left(n_1^{\pm}, \dots, n_k^{\pm} \right) \right) \tag{4.103}$$

και η φάση δίδεται από

$$\varphi \left(n_1^{\pm}, \dots, n_k^{\pm} \right) = - \frac{2\pi w}{n} \sum_{i \leq j}^{k} n_i^+ n_j^- \quad \& \quad \sum_{i=1}^{k} n_i^{\pm} = 2n. \tag{4.104}$$

5 Σχέσεις Διασποράς των Χορδών GKP

Αφού παρουσιάσαμε τα βασικά στοιχεία των χορδών GKP, είμαστε τώρα σε θέση να μελετήσουμε την κλασική σχέση ενέργειας-σπίν (γνωστή και ως σχέση διασποράς ή ανώμαλες διαστάσεις) των δύο στερεά περιστρεφόμενων περιπτώσεων I (4.8) και II (4.40), για τα μεγάλες τιμές του σπίν. Όπως αναφέραμε και παραπάνω, οι μεγάλες περιστρεφόμενες χορδές ανήκουν σε μια εξαιρετική κατηγορία συστημάτων όπου οι μέθοδοι που προέρχονται από την ολοκληρωσιμότητα δεν οδηγούν σε τόσο εντυπωσιακά αποτελέσματα όσο η ασθενής σύζευξη ή οι μικρές χορδές και τελεστές. Ως εκ τούτου, και μέχρι να γίνει γνωστό πώς ακριβώς η ολοκληρωσιμότητα λειτουργεί στις περιπτώσεις των μεγάλων τελεστών και χορδών, πιο παραδοσιακές μέθοδοι (όπως τετραγωνισμοί/ολοκληρώσεις) πρέπει να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τα αντίστοιχα φάσματα. Μια τέτοια μέθοδος προτάθηκε στην εργασία [3], η οποία συνέχισε την πρώιμη προσπάθεια των Γεωργίου και Σαββίδη [12].

Ο στόχος αυτής της ενότητας είναι ο υπολογισμός της κλασικής σχέσης διασποράς των χορδών GKP (I) και (II) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των [3]. Από τη στιγμή που θα εργαστούμε αποκλειστικά και μόνο στην πλευρά της θεωρίας χορδών της επίπεδης αντιστοιχίας AdS/CFT, τα αποτελέσματά μας θα είναι έγκυρα για μεγάλες τιμές της σταθερά σύζευξης 't Hooft $\lambda \to \infty$ και για $N_c = \infty$. Σε αυτό το όριο, όλες οι διορθώσεις $1/N_c$ αγνοούνται. Επιπλέον, θα ασχοληθούμε μόνο με κλασσικές χορδές GKP, δηλαδή δεν πρόκειται να εξετάσουμε τις κβαντικές διορθώσεις (α' διορθώσεις) που αυτές οι χορδές γενικά λαμβάνουν. Τυπικά αυτό σημαίνει επίσης ότι $\lambda = \infty$.

Όπως προείπαμε, πρόκειται να μας απασχολήσουν αποκλειστικά οι μεγάλες χορδές, δηλαδή εκείνες οι χορδές που έχουν μεγάλες (αλλά όχι άπειρες) τιμές διατηρούμενων φορτίων, $\mathcal{E}, \mathcal{J}, \mathcal{S} \to \infty$. Αυτή είναι μία από τις λίγες εναπομένουσες περιπτώσεις όπου η ολοκληρωσιμότητα δεν μπορεί ακόμη να προσφέρει μεγάλη βοήθεια. Τα αποτελέσματα για τα φάσματα των χορδών που θα λάβουμε με τη χρήση της μεθόδου του [3] δεν έχουν ληφθεί από οποιαδήποτε άλλη μέθοδο (ολοκληρωσιμότητας), π.χ. τις διορθώσεις Lüscher, την αλγεβρική καμπύλη, το θερμοδυναμικό Bethe ansatz (TBA), το Y-σύστημα ή την κβαντική φασματική καμπύλη (QSC). Θεωρούμε επίσης αναγκαίο να τονίσουμε ότι αυτά τα αποτελέσματα είναι ημιαναλυτικά και συνεπώς είναι αδύνατο να εξαχθούν με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Υπάρχουν πολλοί και διάφοροι λόγοι για τους οποίους μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε τη σχέση διασποράς των μεγάλων, στερεά περιστρεφόμενων χορδών GKP. Κατ'αρχήν, παρότι η ολοκληρωσιμότητα μας υποδεικνύει ότι τα επίπεδα φάσματα της θεωρίας $\mathcal{N} = 4$ SYM και της IIB θεωρίας χορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ πρέπει να ταυτίζονται διότι περιγράφονται από το ίδιο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, θέλουμε να ελέγξουμε ρητά ότι όντως τα φάσματα ταιριάζουν σε όλες τις πιθανές περιπτώσεις. Δεύτερον, θέλουμε να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε στην πράξη τα φάσματα προκειμένου να απαντήσουμε κάποιες παραδοσιακές ερωτήσεις της αντιστοιχίας AdS/CFT, αλλά και επειδή θα θέλαμε να βελτιωθεί ο τρόπος που η ολοκληρωσιμότητα λειτουργεί σε ορισμένα όρια και, ενδεχομένως, ακόμη και να πάμε πιο πέρα από την ολοκληρωσιμότητα. Τρίτον, θα θέλαμε να διερευνήσουμε τη δυνατότητα να περιγράψουμε τις χορδές και το φάσμα της θεωρίας βαθμίδας με τη βοήθεια κλειστών τύπων που, στην ιδεατή περίπτωση, θα ίσχυαν για όλες τις τιμές της σταθεράς σύζευξης 't Hooft λ.

Οι μεγάλες χορδές GKP που περιστρέφονται εντός του AdS_3 (περίπτωση I) και εντός του $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ (περίπτωση II) είναι αντίστοιχα δυϊκές στους ακόλουθους (μεγάλους) τελεστές της $\mathcal{N} = 4$ SYM:

$$\mathcal{O}_S = Tr\left[\mathcal{D}_+^m \mathcal{Z} \mathcal{D}_+^{S-m} \mathcal{Z}\right] + \ldots \quad \& \quad \mathcal{O}_J = \mathrm{Tr}\left[\mathcal{X} \mathcal{Z}^m \mathcal{X} \mathcal{Z}^{J-m}\right] + \ldots, \quad S, J \to \infty, \tag{5.1}$$

όπου $N_c, \lambda = \infty$ και οι τελείες συμβολίζουν τις μεταθέσεις των πεδίων εντός του ίχνους, πολλαπλασιασμένες επί τον κατάλληλο συντελεστή. Οι τελεστές συστροφής 2 ($\mathcal{O}_S$) και εκείνοι με 2 μαγνόνια ($\mathcal{O}_J$) ανήκουν αντίστοιχα στους τομείς $\mathfrak{sl}(2)$ και $\mathfrak{su}(2)$ της $\mathcal{N} = 4$ SYM. Στον ένα βρόχο, ο τελεστής διαστολής των δύο αυτών τομέων συμπίπτει με τη Χαμιλτονιανή της σιδηρομαγνητικής αλυσίδας σπίν $\mathrm{XXX}_{\pm 1/2}$ του Heisenberg. Κανείς εκ των τελεστών (5.1) δεν είναι BPS και κατά συνέπεια οι αντίστοιχες διαστάσεις κλίμακας περιέχουν ένα ανώμαλο μέρος.

Αναφέραμε ήδη τις διορθώσεις "wrapping" που εμφανίζονται από την πλευρά της θεωρία βαθμίδας της αντιστοιχίας AdS/CFT, όταν η τάξη του βρόχου ξεπεράσει το μήκος του τελεστή της SYM. Η αύξηση του αριθμού των βρόχων θεωρητικά μας φέρνει πιο κοντά στην ισχυρή σύζευξη όπου η περιγραφή μέσω χορδών καθίσταται έγκυρη. Η δενδροειδής (tree-level) προσέγγιση από την πλευρά της θεωρίας των χορδών (κλασσικές χορδές) αντιστοιχεί σε ∞ βρόχους της θεωρίας βαθμίδας και, εφόσον ο τελεστής της SYM δεν έχει άπειρο μήκος (ή «μέγεθος»), η σχέση διασποράς του αναμένεται να λάβει διορθώσεις wrapping.[25] Αντίθετα, αυξάνοντας τον αριθμό των βρόχων από την πλευρά της θεωρίας χορδών προσθέτοντας $\alpha' \sim \sqrt{\lambda}$ (κβαντικές) διορθώσεις στο κλασσικό αποτέλεσμα, πηγαίνουμε προς τη μεριά της $\mathcal{N}=4$ SYM.

Ας ξεκινήσουμε από τους τελεστές με συστροφή 2 και την περίπτωση GKP (I) της χορδής εντός του AdS_3. Από την άποψη της QCD, οι τελεστές συστροφής (twist operators) με υψηλό σπίν S διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη βαθιά ανελαστική σκέδαση (DIS), όπου ανώμαλες διαστάσεις κλίμακάς τους, είναι υπεύθυνες για την (λογαριθμική) παραβίαση της διαβάθμισης (scaling) Bjorken. Οι ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών με συστροφή 2 έχουν υπολογιστεί στην διαταρακτική QCD[26] σε ένα βρόχο [60], δύο βρόχους [61] και τρεις βρόχους [62]. Τα αποτελέσματα της QCD μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των αντίστοιχων ανώμαλων διαστάσεων στις διαταρακτικές θεωρίες $\mathcal{N}=1,2,4$ SYM. Στο όριο ασθενούς σύζευξης 't Hooft λ, οι ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών συστροφής 2 της $\mathcal{N}=4$ SYM, $\mathrm{Tr}\big[\mathcal{Z}\,\mathcal{D}_+^S\,\mathcal{Z}\big]$ με υψηλό σπίν S, έχουν υπολογιστεί σε ένα βρόχο [63], δύο βρόχους [64] και, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της υπερβατικότητας (transcedentality), σε τρεις βρόχους [65]. Καταλήγουμε στην ακόλουθη λογαριθμική συμπεριφορά που είναι επίσης γνωστή ως διαβάθμιση Sudakov:

$$\gamma\,(S\,,g) = \Delta - (S+2) = f(g)\ln S + \dots\,, \qquad g = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} \to 0, \tag{5.2}$$

όπου $f(g)$ είναι η "cusp" ανώμαλη διάσταση ή η παγκόσμια συνάρτηση κλίμακας (universal scaling function) της $\mathcal{N}=4$ SYM. Μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση Beisert-Eden-Staudacher (BES) σε ασθενή [66, 37] και ισχυρή σύζευξη [67, 68]. Το αποτέλεσμα της ισχυρής σύζευξης συμφωνεί με τον αναλυτικό υπολογισμό 2 βρόχων από τη μεριά της θεωρίας των χορδών [34, 69, 70].

Η γενική μορφή του αναπτύγματος των ανώμαλων διαστάσεων των τελεστών συστροφής 2, $\mathcal{O}_S$ της θεωρίας $\mathcal{N}=4$ SYM για μεγάλα σπίν είναι η ίδια σε ασθενή και ισχυρή σύζευξη [71]:

$$E - S = f\ln(S/\sqrt{\lambda}) + \sum_{n=1}^{\infty} f_{(nn)}\frac{\ln^n(S/\sqrt{\lambda})}{S^n} + \sum_{n=2}^{\infty} f_{(nn-1)}\frac{\ln^{n-1}(S/\sqrt{\lambda})}{S^n} + \dots + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{S^n}, \tag{5.3}$$

αλλά με διαφορετικά σετ συντελεστών $f_{(nk)}(\sqrt{\lambda})$ σε κάθε περίπτωση:

$$f_{(nk)} = \sum_m^{\infty} \tilde{\mathrm{f}}_{nkm}\lambda^m\,, \quad (\text{ασθενής σύζευξη}) \quad \& \quad f_{(nk)} = \sum_m^{\infty} \frac{\mathrm{f}_{nkm}}{\left(\sqrt{\lambda}\right)^m}\,, \quad (\text{ισχυρή σύζευξη}). \tag{5.4}$$

Διάφορες άλλες μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν για τον υπολογισμό των ανώμαλων διαστάσεων (5.2) των τελεστών (4.2) με συστροφή 2, στην διαταρακτική $\mathcal{N}=4$ SYM. Με αναλυτική επίλυση της

[25] Οι διορθώσεις "wrapping" είναι γνωστές ως διορθώσεις «πεπερασμένου μεγέθους», επειδή εμφανίζονται για πρώτη φορά στην κρίσιμη τάξη βρόχου L, όπου L είναι το μέγεθος του συστήματος και μηδενίζονται για άπειρο μέγεθος συστήματος, $L=\infty$. Από την πλευρά της θεωρίας βαθμίδας, το μέγεθος του συστήματος είναι ίσο με το μήκος της αλυσίδας σπίν, που συνήθως προσδιορίζεται από τη γυμνή της διάσταση κλίμακας Δ_0, τα σπίν S και J και τον αριθμό των μαγνονίων M. Από την πλευρά της θεωρίας χορδών, το μέγεθος του συστήματος καθορίζεται από την περιφέρεια $2\pi r$ του κυλινδρικού κοσμικού φύλλου, $(\tau,\sigma) \in (-\infty,+\infty)\times[-r,+r]$. Μπορεί να αποδειχθεί (βλέπε π.χ. την εξίσωση (6.20)) ότι υπάρχει μια παραμετροποίηση της περιοδικής χωρικής συντεταγμένης του κοσμικού φύλλου $\sigma\,(-r) = \sigma\,(+r)$, έτσι ώστε η διατηρούμενη ενέργεια της χορδής $\mathcal{E} \propto r$. Ως εκ τούτου, κάθε φορά που η ενέργεια $\mathcal{E}$ είναι (μη) πεπερασμένη, το ίδιο ισχύει και για την περιφέρεια του κοσμικού φύλλου $2\pi r$. Δεδομένου ότι σχεδόν πάντα η ενέργεια της χορδής $\mathcal{E}$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση των διατηρούμενων φορτίων $\mathcal{S}$ και $\mathcal{J}$, αυτά μπορεί επίσης να θεωρηθούν ως ένα μέτρο του μεγέθους του συστήματος, το οποίο θα είναι άπειρο, όταν το ένα από αυτά απειρίζεται και πεπερασμένο, όταν και τα δύο είναι πεπερασμένα.

[26] Για περαιτέρω παραπομπές, μαζί με μια συνοπτική ιστορική ανασκόπηση, βλέπε [59].

εξίσωσης Baxter, έχουν ληφθεί αποτελέσματα σε τρεις [72] και τέσσερις βρόχους [73]. Με υπολογισμό των διορθώσεων wrapping σε περισσότερους από τρεις βρόχους, οι ανώμαλες διαστάσεις σε τέσσερις και πέντε βρόχους έχουν υπολογιστεί στις εργασίες [74, 75].

Σε ισχυρή σύζευξη λ, όλα τα $f_{(nk)}$ μπορούν θεωρητικά να ληφθούν από το θερμοδυναμικό Bethe ansatz (TBA) [76]. Στις εργασίες [71, 77], οι συντελεστές f_0, f_1, $f_{(11)}$, της σχέσης (5.3) υπολογίστηκαν σε ένα βρόχο, χρησιμοποιώντας διαταρακτική θεωρία χορδών. Είναι σχετικά εύκολο να υπολογίσουμε τους μερικούς πρώτους κλασικούς συντελεστές της (5.3) σε ισχυρή σύζευξη με ένα πρόγραμμα συμβολικών υπολογισμών, π.χ. τη Mathematica (βλέπε παράρτημα Δ΄.1). Ωστόσο, οι υπολογιστικές μέθοδοι περιορίζονται γενικά από την διαθέσιμη υπολογιστική ισχύ. Κανείς δεν έχει καταφέρει ποτέ να υπολογίσει όλους τους συντελεστές (5.3) αναλυτικά. Στο [12] οι Γεωργίου και Σαββίδης κατάφεραν να υπολογίσουν όλους τους κυρίαρχους (leading, $f_{(nn)}$) και επόμενους (subleading, $f_{(nn-1)}$) όρους σε ισχυρή σύζευξη, εισάγοντας μια επαναληπτική μέθοδο η οποία μπορεί δυνητικά να τους υπολογίσει όλους. Στην [3] όλοι οι κλασσικοί μεθεπόμενοι συντελεστές (next-to-subleading, $f_{(nn-2)}$) υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση W του Lambert για την αναπαράσταση των ανώμαλων διαστάσεων (5.3). Στην §5.2, πρόκειται να επανέλθουμε στην εξαγωγή της σχέσης αυτής, δίνοντας περισσότερες λεπτομέρειες και ενδιάμεσα αποτελέσματα.

Ας συνοψίσουμε τώρα όλα τα κλασικά αποτελέσματα. Εκφράζουμε την (5.3) στη μορφή

$$\mathcal{E}-\mathcal{S}=\rho_c\,\ln\mathcal{S}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\rho_{(nk)}\,\frac{\ln^k\mathcal{S}}{\mathcal{S}^n}=\rho_c\,\ln\mathcal{S}+\rho_0+\sum_{n=1}^{\infty}\rho_{(nn)}\frac{\ln^n\mathcal{S}}{\mathcal{S}^n}+\sum_{n=2}^{\infty}\rho_{(nn-1)}\frac{\ln^{n-1}\mathcal{S}}{\mathcal{S}^n}+$$
$$+\sum_{n=3}^{\infty}\rho_{(nn-2)}\frac{\ln^{n-2}\mathcal{S}}{\mathcal{S}^n}+\ldots+\frac{\rho_1}{\mathcal{S}}+\frac{\rho_2}{\mathcal{S}^2}+\frac{\rho_3}{\mathcal{S}^3}+\ldots,\qquad \mathcal{S},\lambda\to\infty, \tag{5.5}$$

όπου $\mathcal{E}=\pi E/\sqrt{\lambda}$, $\mathcal{S}=\pi S/\sqrt{\lambda}$. Βρίσκουμε του ακόλουθους συντελεστές:

$$\rho_c=1\quad,\quad\rho_0=3\ln2-1\quad,\quad\rho_1=\frac{1}{2}\left(3\ln2-1\right)\quad,\quad\rho_2=-\frac{9\ln^2 2}{8}+\frac{27\ln2}{16}-\frac{5}{16}. \tag{5.6}$$

Βρίσκουμε επίσης,

$$\rho_{(mm)}=\frac{(-1)^{m+1}}{2^m}\frac{1}{m}, \tag{5.7}$$

$$\rho_{(m+1,m)}=\frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+1}}\Big[H_m+\frac{m}{4}+\,1-3\ln2\Big] \tag{5.8}$$

$$\rho_{(m+2,m)}=\frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+3}}\cdot(m+1)\cdot\Bigg\{H_{m+1}^2-H_{m+1}^{(2)}+\frac{1}{2}\left(m-12\ln2+5\right)\cdot H_{m+1}+\frac{m\left(m-1\right)}{24}-$$
$$-\frac{3}{2}\left(m+5\right)\ln2+9\ln^2 2\Bigg\}. \tag{5.9}$$

Όπως ήδη αναφέραμε, οι σειρές $\rho_{(mm)}$ και $\rho_{(m+1,m)}$ εξήχθησαν για πρώτη φορά στην εργασία [12]. Οι μεθεπόμενοι συντελεστές $\rho_{(m+2,m)}$ υπολογίστηκαν στην εργασία [3].

Οι τελεστές 2 μαγνονίων είναι δυϊκοί στη χορδή που περιστρέφεται εντός του $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$, ήτοι στην περίπτωση GKP (II). Οι χορδές GKP επί της δισδιάστατης σφαίρας σχετίζονται άμεσα με τα γιγάντια μαγνόνια τα οποία είναι ανοικτές χορδές με ένα σπίν που περιστρέφονται στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$. Τα γιγάντια μαγνόνια είναι οι δυϊκές χορδές των μαγνονίων, που ανήκουν στον $\mathfrak{su}\,(2)$ τομέα της $\mathcal{N}=4$ θεωρίας SYM. Η χορδή GKP επί της σφαίρας σχηματίζεται από την υπέρθεση δύο γιγάντιων μαγνονίων με μέγιστη γωνιακή έκταση $\Delta\varphi=\pi$ και στροφορμή $J/2$ το καθένα. Ως εκ τούτου, οι χορδές GKP στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ είναι δυϊκές στους τελεστές 2 μαγνονίων με μέγιστη ορμή $p=\pi$.

Οι ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών 2 μαγνονίων $\mathcal{O}_J$ δίδονται από το ασυμπτωτικό Bethe ansatz μέχρι τους $J+1$ βρόχους:

$$\Delta - J = 2\sqrt{1+\frac{\lambda}{\pi^2}}. \tag{5.10}$$

Μπορούμε να βρούμε τα όρια ασθενούς και ισχυρής σύζευξης ως ακολούθως:

$$\Delta - J = 2 + \frac{\lambda}{\pi^2} - \frac{\lambda^2}{4\pi^4} + \frac{\lambda^3}{8\pi^6} - \ldots\,, \qquad \lambda\to 0 \quad (\text{ασθενής σύζευξη}) \tag{5.11}$$

$$\Delta - J = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} + 0 + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\pi^3}{4\lambda^{3/2}} + \ldots\,, \qquad J,\lambda\to\infty \quad (\text{ισχυρή σύζευξη}). \tag{5.12}$$

Κάθε όρος στο δεξιό μέλος των εξισώσεων (5.11)–(5.12) αντιστοιχεί στις κβαντικές διορθώσεις (διορθώσεις α' ή διορθώσεις καμπυλότητας) της αντίστοιχης τάξης βρόχου. Παρατηρούμε ότι οι γυμνές διαστάσεις σε ασθενή σύζευξη $\Delta_0 = J+2$ διορθώνονται κατά τις δυνάμεις του λ, ενώ σε ισχυρή σύζευξη το αποτέλεσμα των GKP (4.3) διορθώνεται κατά τις δυνάμεις του $1/\sqrt{\lambda}$.

Από την άλλη μεριά, οι διορθώσεις wrapping, πρωτοεμφανίζονται στην εξίσωση (5.11) στους $J+2$ βρόχους. Εκτός από την περίπτωση που το μέγεθος του συστήματος είναι άπειρο ($J=\infty$, περίπτωση στην οποία δεν υπάρχουν διορθώσεις wrapping) οι διορθώσεις wrapping είναι παρούσες στο ανάπτυγμα της ισχυρής σύζευξης (5.12) ακόμη και στην δενδροειδή προσέγγιση (η οποία αντιστοιχεί σε ∞ τάξη βρόχου από τη μεριά της θεωρίας βαθμίδας). Οι κλασσικές και οι κβαντικές διορθώσεις πεπερασμένου μεγέθους που λαμβάνει η σχέση διασποράς των GKP (4.3) σε ισχυρή σύζευξη και μεγάλη αλλά πεπερασμένη στροφορμή J, έχουν τη μορφή εκθετικά μειούμενων όρων. Το κλασικό μέρος αυτών των διορθώσεων πεπερασμένου μεγέθους έχει την ακόλουθη δομή:

$$\mathcal{E}-\mathcal{J} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1}\widetilde{\mathcal{A}}_{nm}\mathcal{J}^{n-m-1}\,e^{-n(\mathcal{J}+2)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \lambda,\mathcal{J}\to\infty, \tag{5.13}$$

όπου $\mathcal{E}\equiv \pi E/\sqrt{\lambda}$ και $\mathcal{J}\equiv\pi J/\sqrt{\lambda}$. Υποθέτουμε ότι οι συντελεστές όλων των αρνητικών δυνάμεων του $\mathcal{J}$ στην (5.13) είναι μηδέν (π.χ. $\mathcal{A}_{11}=\mathcal{A}_{12}=\ldots=0$). Πολλοί κλασικοί όροι μπορούν να ληφθούν από απευθείας υπολογισμό με τη Mathematica (βλέπε παράρτημα Δ΄.1). Όπως θα δείξουμε παρακάτω στην §5.1, οι ανώμαλες διαστάσεις (5.13) μπορούν να γραφτούν με τη βοήθεια της συνάρτησης W του Lambert $W\left(\pm 4\mathcal{J}e^{-\mathcal{J}-2}\right)$ ως εξής:

$$\mathcal{E}-\mathcal{J} = 2 - \frac{1}{\mathcal{J}}\left(2W+W^2\right) - \frac{1}{2\mathcal{J}^2}\left(W^2+W^3\right) - \frac{1}{16\mathcal{J}^3}\frac{W^3\left(11\,W^2+26\,W+16\right)}{1+W} + \ldots \tag{5.14}$$

όπου η συνάρτηση W του Lambert ορίζεται από την ακόλουθη σχέση (περισσότερα στο παράρτημα Γ΄):

$$W\left(z\right)\,e^{W(z)} = z \Leftrightarrow W\left(z\,e^z\right) = z. \tag{5.15}$$

Το θετικό πρόσημο του ορίσματος της συνάρτησης W του Lambert στην εξίσωση (5.14) αντιστοιχεί στην περίπτωση της κλειστής και διπλωμένης χορδής ($\omega > 1$), ενώ το αρνητικό πρόσημο αντιστοιχεί στην περίπτωση της κυκλικής χορδής ($\omega < 1$). Αν αναπτύξουμε τη συνάρτηση W του Lambert, τότε ο δεύτερος, τρίτος και τέταρτος όρος της (5.14) δίνουν αντίστοιχα τους κυρίαρχους ($\widetilde{\mathcal{A}}_{n0}$), επόμενους ($\widetilde{\mathcal{A}}_{n1}$) και μεθεπόμενους ($\widetilde{\mathcal{A}}_{n2}$) όρους της (5.13):

- κυρίαρχοι όροι: $-\dfrac{1}{\mathcal{J}}\left(2W+W^2\right)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\mathcal{A}}_{n0}\mathcal{J}^{n-1}e^{-n(\mathcal{J}+2)}$
- επόμενοι όροι: $-\dfrac{1}{2\mathcal{J}^2}\left(W^2+W^3\right)=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\widetilde{\mathcal{A}}_{n1}\mathcal{J}^{n-2}e^{-n(\mathcal{J}+2)}$
- μεθεπόμενοι όροι: $-\dfrac{1}{16\mathcal{J}^3}\dfrac{W^3\left(11\,W^2+26\,W+16\right)}{1+W}=\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\widetilde{\mathcal{A}}_{n2}\mathcal{J}^{n-3}e^{-n(\mathcal{J}+2)}.$

Ακριβείς εκφράσεις για αυτές τις σειρές μπορούν να δοθούν, βλέπε τις εξισώσεις (5.45), (5.58) και (5.63). Μπορούμε επίσης να ισχυριστούμε ότι όλοι οι όροι της (5.13) (N^k-επόμενοι όροι) μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει της συνάρτησης W του Lambert.

Προτού προχωρήσουμε στον αναλυτικό υπολογισμό των σχέσεων ενέργειας-σπίν (5.5) και (5.14), ας σκιαγραφήσουμε στα γρήγορα πως αυτές εξάγονται. Στη περίπτωση της εξίσωσης (5.14) της μεγάλης διπλωμένης χορδής εντός του $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ ($\omega > 1$), το σημείο εκκίνησης είναι το 2×2 σύστημα εξισώσεων (4.65)–(4.66):

$$\mathcal{E}=d\,(x)\ln x+h\,(x) \tag{5.16}$$

$$\mathcal{J}=c\,(x)\ln x+b\,(x)\,, \tag{5.17}$$

όπου $x\equiv 1-1/\omega^2$ είναι η συμπληρωματική παράμετρος της γωνιακής ταχύτητας ω και $d\,(x)$, $h\,(x)$, $c\,(x)$, $b\,(x)$ είναι οι δυναμοσειρές που κάνουν την εμφάνισή τους στις σχέσεις (4.65)–(4.66), με συντελεστές d_n, h_n, c_n και b_n αντίστοιχα, που δίδονται από την (4.67). Αυτό που κάνουμε είναι ότι χρησιμοποιούμε τη φόρμουλα αντιστροφής των Lagrange-Bürmann προκειμένου να αντιστρέψουμε την εξίσωση (5.17) ως προς την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x=x\,(\mathcal{J})$ και μετά εισάγουμε την τελευταία στην σχέση (5.16) που δίνει τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma\equiv\mathcal{E}-\mathcal{J}=\gamma\,(\mathcal{J})$ συναρτήσει της συνάρτησης W του Lambert. Οδηγούμαστε έτσι στην εξίσωση (5.14) για τους κυρίαρχους, επόμενους και μεθεπόμενους συντελεστές στη σχέση διασποράς των μεγάλων διπλωμένων χορδών του χώρου $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$. Η διαδικασία είναι τεχνικά περίπλοκη, γι'αυτό το λόγο αφιερώνουμε τις επόμενες πέντε ενότητες §5.1.1–§5.1.5 στην ανάπτυξή της.

Έχοντας αναπτύξει τον απαιτούμενο φορμαλισμό, είναι σχετικά απλό να τον ξαναεφαρμόσουμε. Στην §5.1.6 ο παραπάνω αλγόριθμος επαναλαμβάνεται για ταχείες κυκλικές χορδές στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ ($\omega < 1$), χρησιμοποιώντας τις σειρές (4.74)–(4.75) στο σύστημα (5.16)–(5.17). Στην §5.2, οι μεγάλες διπλωμένες χορδές εντός του AdS_3 ($\omega > 1$) μελετώνται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.33)–(4.34) και τους συντελεστές (4.35) προκειμένου να λύσουμε το σύστημα (5.16)–(5.17). Η αναπαράσταση της συνάρτησης W για τη σχέση διασποράς των μεγάλων χορδών GKP στον AdS_3 μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των συντελεστών (5.6)–(5.9) της εξίσωσης (5.5).

Οι εκφράσεις (5.5)–(5.14) δεν δίνουν μόνο τις ενέργειες των κλασικών χορδών με αξιοσημείωτη ακρίβεια, αλλά παρέχουν και κλειστές και οργανωμένες εκφράσεις για το φάσμα αυτών. Η αναδιοργάνωση αυτή ρίχνει φως στη δομή των αναπτυγμάτων μεγάλου σπίν των ανώμαλων διαστάσεων των χορδών GKP και των δυϊκών τους τελεστών και δύναται να επηρεάσει σημαντικά τον τρόπο που αντιμετωπίζουμε τα αντίστοιχα αναπτύγματα σε ασθενή σύζευξη, μικρό σπίν, όπως επίσης και τις κβαντικές τους διορθώσεις. Οι μέθοδοι που βασίζονται στην ολοκληρωσιμότητα μπορούν επίσης να επωφεληθούν από περισσότερο αναγνωρίσιμες δομές στα φάσματα των χορδών.

5.1 Περιστρεφόμενες Χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov στον $\mathbb{R} \times \mathbf{S}^2$

5.1.1 Αντίστροφη Συνάρτηση Σπίν

Ας δούμε τώρα πως αντιστρέφεται η σειρά της στροφορμής J στην εξίσωση (4.66) ως προς τη μεταβλητή $x = x(\mathcal{J})$. Ας λύσουμε πρώτα την (4.66) ως προς $\ln x$:

$$\mathcal{J} = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n \Big(c_n \ln x + b_n\Big) \Rightarrow \ln x = \frac{\mathcal{J}/2 - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x = \left[\frac{\mathcal{J}/2 - b_0}{c_0} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{c_0}\, x^n\right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{c_0}\, x^k\right)^n. \tag{5.18}$$

Εν συνεχεία, πολλαπλασιάζουμε τις σειρές και εκθετοποιούμε την εξίσωση που προκύπτει:

$$x = x_0 \cdot \exp\Bigg\{ - \left[c_1 \frac{\mathcal{J}}{2} + b_1\, c_0 - b_0 c_1\right] \frac{x}{c_0^2} +$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{\mathcal{J}}{2} - b_0\right) \frac{\mathbf{P}_n^{(-1)}}{n!} - b_0 - \sum_{k=0}^{n-2} b_{n-k-1} \frac{\mathbf{P}_{k+1}^{(-1)}}{(k+1)!}\right] \frac{x^n}{c_0}\Bigg\}, \tag{5.19}$$

όπου η

$$x_0 \equiv \exp\left[\frac{\mathcal{J}/2 - b_0}{c_0}\right] = 16\, e^{-\mathcal{J}-2} \tag{5.20}$$

λύνει την (5.18) σε κατώτερη τάξη ως προς x και τα πολυώνυμα $\mathbf{P}_n^{(r)}$ είναι γνωστά ως πολυώνυμα δυναμικού (βλέπε παράρτημα Z′.2). Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$x = x_0 \cdot \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n\, x^n\right] = x_0 \cdot \exp\left(\mathrm{a}_1\, x + \mathrm{a}_2\, x^2 + \mathrm{a}_3\, x^3 + \ldots\right) \tag{5.21}$$

ως προς το x (έχοντας υπολογίσει τα a_n από την (5.19)). Ένας πιθανός τρόπος για να το κάνουμε αυτό είναι να προσπαθήσουμε να αντιστρέψουμε τη σειρά (5.19) ως προς το x χρησιμοποιώντας το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange [57, 78]. Όπως αποδεικνύεται, η προς αντιστροφή συνάρτηση έχει μια πολύ εύχρηστη μορφή που απλοποιεί σημαντικά το υπολογισμό του αντιστρόφου της. Το γεγονός αυτό ανακαλύφθηκε από τους J.-L. Lagrange και H. H. Bürmann [79] και η ακόλουθη φόρμουλα (που εφαρμόζουμε εδώ στην περίπτωση της εκθετικής συνάρτησης) είναι γνωστή ως φόρμουλα αντιστροφής των Lagrange και Bürmann:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} \cdot \left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \exp\left[\sum_{m=1}^{\infty} n\, \mathrm{a}_m\, z^m\right]\right\}_{z=0}. \tag{5.22}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τη n-οστή παράγωγο του εκθετικού μιας δυναμοσειράς, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη φόρμουλα για το εκθετικό:

$$\exp\left[\sum_{m=1}^{\infty} n\,\mathrm{a}_m\,z^m\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\mathbf{B}_k\left(n\cdot\mathrm{a}_1, 2\,n\cdot\mathrm{a}_2,\ldots,k!\,n\cdot\mathrm{a}_k\right)\,z^k, \tag{5.23}$$

όπου $\mathbf{B}_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ είναι τα πλήρη (εκθετικά) πολυώνυμα Bell (complete exponential Bell polynomials), που ορίζονται στο παράρτημα Z′.1. Βρίσκουμε,

$$\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\exp\left[\sum_{m=1}^{\infty} n\,\mathrm{a}_m\,z^m\right]\right\}_{z=0} = \mathbf{B}_{n-1}\left(n\cdot\mathrm{a}_1, 2\,n\cdot\mathrm{a}_2,\ldots,(n-1)!\,n\cdot\mathrm{a}_{n-1}\right) =$$

$$= n!\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^{k-1}}{k!}\,\widehat{\mathbf{B}}_{n-1,k}\left(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\ldots,\mathrm{a}_{n-1}\right) = \sum_{k,j_i=0}^{n-1} n^k\begin{pmatrix} n-1 \\ j_1\,,\ j_2\,,\ \ldots\,,\ j_{n-1}\end{pmatrix}\mathrm{a}_1^{j_1}\mathrm{a}_2^{j_2}\ldots\mathrm{a}_{n-1}^{j_{n-1}}, \tag{5.24}$$

όπου $\widehat{\mathbf{B}}_{n,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ τα συνήθη μερικά πολυώνυμα Bell (ordinary partial Bell polynomials) (βλέπε παράρτημα Z′.1) και

$$j_1 + j_2 + \ldots + j_{n-1} = k \quad \& \quad j_1 + 2\,j_2 + \ldots + (n-1)\,j_{n-1} = n-1. \tag{5.25}$$

Η παράμετρος x γράφεται ως εξής:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^{k-1}}{k!}\,\widehat{\mathbf{B}}_{n-1,k}(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\ldots,\mathrm{a}_{n-1}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n\cdot\sum_{k,j_i=0}^{n-1}\frac{n^k}{n!}\begin{pmatrix} n-1 \\ j_1\,,\ j_2\,,\ \ldots\,,\ j_{n-1}\end{pmatrix}\mathrm{a}_1^{j_1}\mathrm{a}_2^{j_2}\ldots\mathrm{a}_{n-1}^{j_{n-1}}. \tag{5.26}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η εξίσωση (5.19) συνεπάγεται ότι οι συντελεστές a_i εξαρτώνται γραμμικά από το $\mathcal{J}$, με συνέπεια η αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x\left(\mathcal{J}\right)$ να λαμβάνει αναγκαστικά την ακόλουθη μορφή:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n\cdot\sum_{k=0}^{n-1} a_{nk}J^k, \tag{5.27}$$

όπου οι συντελεστές a_{nk} δεν εξαρτώνται από το J. Για να δείξουμε ότι η εξίσωση (5.27) ισχύει, θεωρούμε τους εξής δύο συνδέσμους για τις τιμές του j:

$$\left.\begin{array}{c} j_1 + j_2 + \ldots + j_{n-1} = k \\ j_1 + 2\,j_2 + \ldots + (n-1)\,j_{n-1} = n-1 \end{array}\right\} \Rightarrow k + j_2 + \ldots + (n-2)\,j_{n-1} = n-1, \tag{5.28}$$

ήτοι η μέγιστη δύναμη του J στην (5.27) είναι $n-1$. Ένα δεύτερο συμπέρασμα που βγαίνει από αυτούς τους δύο συνδέσμους είναι ότι όλες οι κυρίαρχες συνεισφορές του $\mathcal{J}$ στο x καθορίζονται από τους κυρίαρχους ως προς το $\mathcal{J}$ όρους του a_1, όλες οι επόμενες ως προς $\mathcal{J}$ συνεισφορές στο x ελέγχονται από το a_1 και τους κυρίαρχους ως προς $\mathcal{J}$ όρους του a_2, κλπ., ήτοι όλοι οι συντελεστές του $x(\mathcal{J})$ μέχρι το $x_0^n\,\mathcal{J}^{n-m}$ καθορίζονται από τα a_1 , ... a_{m-1} και τον κυρίαρχο όρο του a_m. Αυτό γίνεται καλύτερα αντιληπτό αν παρατηρήσουμε στην $k + j_2 + \ldots + (n-2)\,j_{n-1} = n-1$, ότι όταν κάποια j_m στην (5.26) είναι $j_m \neq 0$ (ελάχιστη τιμή 1), το $k = j_m + \ldots + j_{n-1}$ είναι το πολύ $n-1-(m-1) = n-m$. Αυτό το συμπέρασμα σχετικά με τον αριθμό των όρων που καθορίζουν πλήρως το $x(\mathcal{J})$ συμφωνεί με αυτά που περιμένουμε βάσει της εξίσωσης (5.21).

5.1.2 Ανώμαλες Διαστάσεις

Έχοντας τη συνάρτηση $x(\mathcal{J})$ στη διάθεσή μας, μπορούμε να εκφράσουμε τις ανώμαλες διαστάσεις κλίμακας $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{J}$ της κλειστής διπλωμένης χορδής εντός του $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ σαν συνάρτηση του $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(f_n\,\ln x + g_n\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[A_n + f_n\,\ln\frac{x}{x_0}\right], \quad \mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathcal{J} \equiv \frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}}, \tag{5.29}$$

όπου,

$$f_n \equiv -c_n - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\cdot d_{n-k}\,, \quad g_n \equiv -b_n - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\cdot h_{n-k}\,, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{5.30}$$

Οι λίγοι πρώτοι από τους συντελεστές f_n και g_n είναι:

$$\begin{aligned} & f_0 = 0, \qquad f_1 = 0, \qquad f_2 = \frac{1}{32}, \qquad f_3 = \frac{3}{128} \\ g_0 = 1, \qquad & g_1 = -\frac{1}{4}, \qquad g_2 = -\frac{1}{8}\ln 2 - \frac{5}{64}, \qquad g_3 = -\frac{3}{32}\ln 2 - \frac{7}{256}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Οι συντελεστές A_n ορίζονται ως εξής:

$$A_n \equiv g_n + f_n \ln x_0 = g_n + 2f_n\left(2\ln 2 - \frac{\mathcal{J}}{2} - 1\right) \tag{5.32}$$

και τα λίγα πρώτα A είναι:

$$A_0 = 1\,, \quad A_1 = -\frac{1}{4}\,, \quad A_2 = -\frac{1}{64}\left(2\mathcal{J} + 9\right)\,, \quad A_3 = -\frac{1}{256}\left(6\mathcal{J} + 19\right). \tag{5.33}$$

Για μεγάλα σπίν $\mathcal{J}$, μπορούμε να αντιστρέψουμε τις σειρές (5.18)–(5.19) ως προς το $x = x(\mathcal{J})$ χρησιμοποιώντας τη Mathematica. Ακολούθως η αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x(\mathcal{J})$ μπορεί να εισαχθεί εντός της εξίσωσης (5.29) και να δώσει τη σχέση ενέργειας-σπίν για τη χορδή (II) των GKP, ή ισοδύναμα τις ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών $\mathrm{Tr}\left[\mathcal{X}\mathcal{Z}^m\,\mathcal{X}\,\mathcal{Z}^{J-m}\right]$ της $\mathcal{N} = 4$ θεωρίας SYM σαν συνάρτηση του (μεγάλου) R-φορτίου $\mathcal{J}$. Τα αποτελέσματα ενός τέτοιου υπολογισμού για την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x(\mathcal{J})$ και τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \gamma(\mathcal{J})$ μπορούν να βρεθούν στις εξισώσεις (Δ΄.2)–(Δ΄.3) του παραρτήματος Δ΄. Και οι δύο σειρές περιέχουν τα ακόλουθα είδη όρων:

Κυρίαρχοι όροι (L): $\mathcal{J}^{n-1}\left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n$

$$\text{Επόμενοι όροι (NL):}\ \mathcal{J}^{n-2}\ \left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n$$
$$\text{Μεθεπόμενοι όροι:}\ \mathcal{J}^{n-3}\ \left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n$$
$$\vdots \tag{5.34}$$

Με βάση το γεγονός ότι οι σειρές (4.65), (4.66) και (5.29) έχουν κατά βάση την ίδια δομή, μπορούμε να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση. Για να βρούμε το $\mathcal{E}-\mathcal{J}$ μέχρι μία δοθείσα επόμενη τάξη, είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x\,(\mathcal{J})$, που πρέπει να εισάγουμε εντός της (5.29) για να βρούμε την ενέργεια $\mathcal{E}=\mathcal{E}\,(\mathcal{J})$, μέχρι την ίδια τάξη. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.21) και (5.27) λαμβάνουμε:

$$\ln\frac{x}{x_0}=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{a}_k\,x^k=\mathrm{a}_1\,x+\mathrm{a}_2\,x^2+\mathrm{a}_3\,x^3+\ldots \tag{5.35}$$

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}x_0^n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}a_{nk}\mathcal{J}^k=\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{J}^{n-1}\,x_0^n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\widetilde{a}_{nk}}{\mathcal{J}^k}=\frac{1}{\mathcal{J}}\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{J}^n\,x_0^n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\widetilde{a}_{nk}}{\mathcal{J}^k}, \tag{5.36}$$

όπου $a_{nm}=\widetilde{a}_{n(n-k-1)}$ είναι σταθερές και τα a_n είναι γραμμικές συναρτήσεις του $\mathcal{J}$. Η τελευταία εξίσωση προκύπτει από την (5.27) αφού αναδιοργανώσουμε τους όρους της. Η σχέση ενέργειας-σπίν (5.29) γράφεται τότε ως εξής:

$$\mathcal{E}-\mathcal{J}=2\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(f_n\,\ln x+g_n\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left[A_n+f_n\,\ln\frac{x}{x_0}\right]=2\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left[A_n+\sum_{k=1}^{\infty}f_n\,\mathrm{a}_k\,x^k\right]. \tag{5.37}$$

Όλοι οι κυρίαρχοι όροι του x^n είναι τάξης $1/\mathcal{J}^n$ (παρατηρώντας τη μορφή του αναπτύγματος (5.36) για το x, το οποίο δεν είναι τίποτε άλλο από την εξίσωση (Δ΄.2) γραμμένη με συμβολικό τρόπο) και πολλαπλασιάζουν είτε το A_n, είτε το $f_{n-k}\cdot\mathrm{a}_k$ στην έκφραση (5.37) για το $\mathcal{E}-\mathcal{J}$, που είναι αμφότερα γραμμικά στο $\mathcal{J}$. Άρα ο r-οστός επόμενος όρος του $\mathcal{E}-\mathcal{J}$ (που είναι τάξης $1/\mathcal{J}^r$) δε λαμβάνει συνεισφορές από τους όρους του x^{r+2} (για τους οποίους $\mathcal{J}/\mathcal{J}^{r+2}\sim\mathcal{J}^{r+1}$). Συνεπώς, προκειμένου να λάβουμε ακριβώς τις πρώτες r επόμενες τάξεις του $\mathcal{E}-\mathcal{J}$ ($r=1$ κυρίαρχη, $r=2$ επόμενη, κλπ.), όχι περισσότερες από τις πρώτες $r+1$ δυνάμεις του x θα πρέπει να διατηρηθούν στην (5.37). Επιπλέον, η τελευταία δύναμη του x που θα πρέπει να κρατηθεί στην (5.37) (ήτοι η x^{r+1}) δεν μπορεί να πολλαπλασιάζεται με όρους που είναι ανεξάρτητοι του $\mathcal{J}$.

Μπορούμε να καταλάβουμε γιατί χρειαζόμαστε ακριβώς n επόμενους όρους στο ανάπτυγμα του x προκειμένου να υπολογίσουμε το $\mathcal{E}-\mathcal{J}$ μέχρι τη n-στή επόμενη τάξη. Κρατώντας λιγότερες δυνάμεις εντός του x, από το $x\cdot A_1=-x/4$ θα λείπουν κάποιοι από τους επόμενους όρους του. Όροι βαθύτερα στο x από τον $1/\mathcal{J}^n$ δε συνεισφέρουν, καθότι δεν υπάρχουν δυνάμεις του $\mathcal{J}$ στη έκφραση για το $\mathcal{E}-\mathcal{J}$ που μπορούν δυνητικά να το ανεβάσουν μέχρι την απαιτούμενη τάξη. Πιστεύουμε ότι όλες αυτές οι παρατηρήσεις θα γίνουν περισσότερο σαφείς παρακάτω.

5.1.3 Κυρίαρχοι Όροι

Ας δούμε τώρα πως τα όσα είπαμε παραπάνω μπορούν να εφαρμοστούν για τον υπολογισμό των ανώμαλων διαστάσεων σε κυρίαρχη τάξη ως προς $\mathcal{J}$. Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές της ακόλουθης σειράς:

$$E-J\Big|_{(\mathrm{L})}=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\mathcal{A}}_{n0}\,\mathcal{J}^{n-1}\,\left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n. \tag{5.38}$$

Όπως ήδη εξηγήσαμε, χρειαζόμαστε μόνο τους κυρίαρχους όρους του x, ήτοι τους όρους της ακόλουθης σειράς:

$$x_{(\mathrm{L})} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, \mathcal{J}^{n-1} \, \left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n . \tag{5.39}$$

Ο κυρίαρχος όρος του x καθορίζεται, αν στο δεξιό μέλος της (5.18) κρατήσουμε όλους τους όρους που πολλαπλασιάζουν το $x^0 = 1$ και μόνο τους κυρίαρχους ως προς $\mathcal{J}$ όρους που πολλαπλασιάζουν το $x^1 = x$. Η (5.18) τότε γράφεται ως εξής:

$$\ln x_{(\mathrm{L})} = \frac{\mathcal{J}/2 - b_0}{c_0} - \frac{c_1}{c_0^2} \frac{\mathcal{J}}{2} \cdot x_{(\mathrm{L})} \Rightarrow x_0 = x_{(\mathrm{L})} \, \exp\left[\frac{c_1}{c_0^2} \frac{\mathcal{J}}{2} \cdot x_{(\mathrm{L})}\right] = x_{(\mathrm{L})} \, e^{\mathcal{J} \cdot x_{(\mathrm{L})}/4}, \tag{5.40}$$

όπου $x_0 = 16 \, e^{-\mathcal{J}-2}$. Αυτή είναι η εξίσωση (5.21) για τους κυρίαρχους όρους του x. Μπορούμε να την λύσουμε είτε με την μέθοδο αντιστροφής που περιγράψαμε στην προηγούμενη υποενότητα, ή μπορούμε να υπολογίσουμε την ακόλουθη tetration:

$$x_{(\mathrm{L})} = x_0 \, e^{-x_0 \mathcal{J}/4 \cdot e^{-x_0 \mathcal{J}/4 \cdot e^{\cdots}}} = x_0 \cdot {}^{\infty}\!\left(e^{-x_0 \mathcal{J}/4}\right) . \tag{5.41}$$

Υπάρχει μια χρήσιμη φόρμουλα για το άπειρο εκθετικό που εμφανίζεται στην (5.41) και περιέχει τη συνάρτηση W του Lambert (για τον ορισμό και τις ιδιότητες της συνάρτησης W, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο παράρτημα Γ′)

$${}^{\infty}(e^z) = \frac{W\left(-z\right)}{-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} \, z^{n-1}, \tag{5.42}$$

στον κύριο κλάδο της W_0.[27] Επομένως βρίσκουμε

$$x_{(\mathrm{L})} = \frac{4}{\mathcal{J}} \, W\left(4 \, \mathcal{J} \, e^{-\mathcal{J}-2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, \mathcal{J}^{n-1} \, \left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n , \tag{5.43}$$

όπου ορίσαμε:

$$\alpha_n \equiv (-1)^{n+1} \, 2^{2n+2} \cdot \frac{n^{n-1}}{n!} . \tag{5.44}$$

Για να λάβουμε τη σχέση ενέργειας-ορμής σε κυρίαρχη τάξη ως προς $\mathcal{J}$, θα πρέπει να εισαγάγουμε τη φόρμουλα (5.43) για το $x_{(\mathrm{L})}$ εντός της (5.29) και να κρατήσουμε μόνο τους κυρίαρχους όρους. Το

[27] Πρέπει να επιλέξουμε τον κύριο κλάδο W_0 έτσι ώστε το x να έχει τη σωστή συμπεριφορά, $x \to 0^+$ καθώς το $\mathcal{J} \to +\infty$. Αντίθετα, στον κλάδο W_{-1}, το $x \to -4$. Περισσότερα μπορούν να βρεθούν στο παράρτημα Γ′.

αποτέλεσμα είναι:

$$E-J\Big|_{(\mathrm{L})}=\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\left\{1+g_1\,x_{(\mathrm{L})}-f_2\,\mathcal{J}x_{(\ell)}^2\right\}=\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\left\{1-\frac{x_{(\mathrm{L})}}{4}-\frac{\mathcal{J}x_{(\mathrm{L})}^2}{32}\right\}=$$

$$=\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\left\{1-\frac{1}{2\mathcal{J}}\left[2\cdot W\left(4\,\mathcal{J}\,e^{-\mathcal{J}-2}\right)+W^2\left(4\,\mathcal{J}\,e^{-\mathcal{J}-2}\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\left\{1-\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\left[4\,\alpha_n+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\,\alpha_{n-k}\right]\cdot\mathcal{J}^{n-1}\left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n\right\}. \tag{5.45}$$

Αυτοί είναι όλοι οι κυρίαρχοι όροι $\widetilde{\mathcal{A}}_{n0}$ του (5.13).

5.1.4 Επόμενοι Όροι

Για να υπολογίσουμε όλους τους επόμενους συντελεστές των ανώμαλων διαστάσεων

$$E-J\Big|_{(\mathrm{NL})}=\sum_{n=2}^{\infty}\widetilde{\mathcal{A}}_{n1}\,\mathcal{J}^{n-2}\,\left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n, \tag{5.46}$$

χρειαζόμαστε τους κυρίαρχους και τους επόμενους όρους του x στην (5.26):

$$x_{(\mathrm{NL})}=\sum_{n=2}^{\infty}\beta_n\,\mathcal{J}^{n-2}\,\left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n. \tag{5.47}$$

Αυτό σημαίνει ότι χρειαζόμαστε όλους τους όρους που πολλαπλασιάζουν το $x^{0,1}$ στο δεξί μέρος της (5.18), και μόνο τους κυρίαρχους στο $\mathcal{J}$ όρους που πολλαπλασιάζουν το x^2. Σε επόμενη (NL) τάξη, η εξίσωση (5.18) γράφεται επομένως ως εξής:

$$\ln x_{(\mathrm{L+NL+\ldots})}=\frac{\mathcal{J}/2-b_0}{c_0}-\frac{\mathcal{J}c_1/2+b_1c_0-b_0c_1}{c_0^2}\cdot x_{(\mathrm{L+NL+\ldots})}+\frac{c_1^2-c_0c_2}{c_0^3}\,\frac{\mathcal{J}}{2}\cdot x_{(\mathrm{L+NL+\ldots})}^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{(\mathrm{L+NL+\ldots})}=x_0\cdot\exp\left[-\frac{\mathcal{J}+2}{4}\cdot x_{(\mathrm{L+NL+\ldots})}-\frac{7\mathcal{J}}{64}\cdot x_{(\mathrm{L+NL+\ldots})}^2\right]. \tag{5.48}$$

Για να επιλύσουμε αυτή την εξίσωση θα πρέπει πρώτα να την αντιστρέψουμε με τον τύπο Lagrange-Bürmann. Γράφοντας,

$$x_0=x_{(\mathrm{L+NL+\ldots})}\cdot\exp\left[\frac{\mathcal{J}+2}{4}\cdot x_{(\mathrm{L+NL+\ldots})}+\frac{7\mathcal{J}}{64}\cdot x_{(\mathrm{L+NL+\ldots})}^2\right], \tag{5.49}$$

βρίσκουμε τον αντίστροφο όπως στην εξίσωση (5.26). Αναλυτικά

$$x_{(\mathrm{L+NL+\ldots})}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{\exp\left[-\frac{\mathcal{J}+2}{4}\cdot n\,x-\frac{7\mathcal{J}}{64}\cdot n\,x^2\right]\right\}\Bigg|_{x=0}\cdot\frac{x_0^n}{n!}. \tag{5.50}$$

Παρατηρώντας ότι

$$\exp\left(\alpha\, x+\beta\, x^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{d^n}{dz^n}\left\{\exp\left(\alpha\, z+\beta\, z^2\right)\right\}\Bigg|_{z=0}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\, x+\beta\, x^2\right)^n}{n!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{\substack{k,\, j_1\,=\,0\\ n\,=\,k\,+\,j_1\\ 0\,\le\, j_1\,\le\, k}}^{n}\frac{(k+j_1)!}{(k-j_1)!\, j_1!}\,\alpha^{k-j_1}\beta^{j_1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{d^n}{dz^n}\left\{\exp\left(\alpha\, z+\beta\, z^2\right)\right\}\Bigg|_{z=0}=\sum_{\substack{k,\, j_1\,=\,0\\ n\,=\,k\,+\,j_1\\ 0\,\le\, j_1\,\le\, k}}^{n}\frac{(k+j_1)!}{(k-j_1)!\, j_1!}\,\alpha^{k-j_1}\beta^{j_1}, \tag{5.51}$$

βρίσκουμε:

$$x_{(\mathrm{L+NL+\dots})}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_0^n}{n!}\sum_{\substack{k,\, j_1\,=\,0\\ n\,-\,1\,=\,k\,+\,j_1\\ 0\,\le\, j_1\,\le\, k}}^{n-1}(-1)^k\, n^k\,\frac{(n-1)!}{(k-j_1)!\, j_1!}\cdot\left(\frac{\mathcal{J}+2}{4}\right)^{k-j_1}\left(\frac{7\mathcal{J}}{64}\right)^{j_1}. \tag{5.52}$$

Το επόμενο βήμα είναι να διαλέξουμε και να κρατήσουμε μόνο τους κυρίαρχους (L) και τους επόμενους (NL) όρους. Ας ξεκινήσουμε αναπτύσσοντας το διώνυμο σε δυνάμεις του $\mathcal{J}$:

$$\left(\frac{\mathcal{J}+2}{4}\right)^{k-j_1}\cdot\left(\frac{7\mathcal{J}}{64}\right)^{j_1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-j_1}\left(\frac{7\mathcal{J}}{64}\right)^{j_1}\cdot\sum_{m=0}^{k-j_1}\binom{k-j_1}{m}\left(\frac{\mathcal{J}}{2}\right)^m=$$

$$=\frac{7^{j_1}}{2^{k+4j_1}}\cdot\sum_{m=0}^{k-j_1}\binom{k-j_1}{m}\left(\frac{\mathcal{J}}{2}\right)^{m+j_1}=\frac{7^{j_1}}{2^{k+4j_1}}\cdot\left(\left(\frac{\mathcal{J}}{2}\right)^{j_1}+\ldots+(k-j_1)\left(\frac{\mathcal{J}}{2}\right)^{k-1}+\left(\frac{\mathcal{J}}{2}\right)^{k}\right).$$

Οι κυρίαρχοι όροι $\mathcal{J}^{n-1}\, x_0^n$ αντιστοιχούν στα $k=n-1$, $m=j_1=0$ και γεννούν την κυρίαρχη δυναμοσειρά (5.43)–(5.44) της προηγούμενης ενότητας. Οι επόμενοι όροι $\mathcal{J}^{n-2}\, x_0^n$ αντιστοιχούν στο άθροισμα των όρων για τους οποίους είτε $k=n-1$, $j_1=0$ και $m=1$ ή $k=n-2$, $j_1=1$ και $m=0$. Βρίσκουμε:

$$x_{(\mathrm{NL})}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_0^n}{n!}\cdot\left\{(-1)^{n-1}\, n^{n-1}\,\frac{(n-1)}{2^{2n-3}}+(-1)^{n-2}\, n^{n-2}\,\frac{7\,(n-1)\,(n-2)}{2^{2n}}\right\}\cdot\mathcal{J}^{n-2}. \tag{5.53}$$

Οι κυρίαρχοι και οι επόμενοι όροι του x δίδονται από:

$$x_{(\mathrm{L+NL})}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\,\mathcal{J}^{n-1}+\beta_n\,\mathcal{J}^{n-2}\right)\cdot\left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n \tag{5.54}$$

όπου τα α_n ορίζονται στη σχέση (5.44) και

$$\beta_n\equiv(-1)^{n+1}\, 2^{2n}\cdot\frac{n^{n-2}}{n!}\cdot(n-1)\,(n+14)\,. \tag{5.55}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε τις σειρές (5.54) με τη βοήθεια της συνάρτησης W του Lambert, χρησιμοποιώντας τις φόρμουλες (Γ′.8)–(Γ′.13) του παραρτήματος Γ′:

$$x_{(\mathrm{L+NL})} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \mathcal{J}^{n-1} + \beta_n \mathcal{J}^{n-2}\right) \cdot \left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n = \frac{4}{\mathcal{J}} W - \frac{1}{\mathcal{J}^2} \frac{W^2 (7W + 8)}{1 + W}, \tag{5.56}$$

όπου το όρισμα της συνάρτησης W είναι $4\mathcal{J} e^{-\mathcal{J}-2}$. Για να βρούμε τους κυρίαρχους και επόμενους συντελεστές της σχέσης διασποράς, πρέπει να εισάγουμε την (5.56) στην (5.29) και να κρατήσουμε μόνο όρους σε κυρίαρχη και επόμενη τάξη:

$$\begin{aligned} E - J\Big|_{(\mathrm{L+NL})} &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \Bigg\{ 1 + A_1 \left(x_{(\mathrm{L})} + x_{(\mathrm{NL})}\right) - f_2 \mathcal{J} x_{(\mathrm{L})}^2 - 2 f_2 \mathcal{J} x_{(\mathrm{L})} \cdot x_{(\mathrm{NL})} + \\ &\qquad + \left(g_2 + 2(2\ln 2 - 1) f_2\right) x_{(\mathrm{L})}^2 - \left(\frac{c_1 f_2}{2c_0^2} + f_3\right) \mathcal{J} x_{(\mathrm{L})}^3 \Bigg\} = \\ &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \Bigg\{ 1 - \frac{x_{(\mathrm{L})}}{4} - \frac{x_{(\mathrm{NL})}}{4} - \frac{\mathcal{J}}{32} x_{(\mathrm{L})}^2 - \frac{\mathcal{J}}{16} x_{(\mathrm{L})} \cdot x_{(\mathrm{NL})} - \frac{9}{64} x_{(\mathrm{L})}^2 - \frac{\mathcal{J}}{32} x_{(\mathrm{L})}^3 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Από την τελευταία έκφραση μπορούμε να διαβάσουμε τους επόμενους συντελεστές (οι κυρίαρχοι συντελεστές δόθηκαν στη σχέση (5.45)):

$$\begin{aligned} E - J\Big|_{(\mathrm{NL})} &= -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \Bigg\{ \frac{x_{(\mathrm{NL})}}{4} + \frac{\mathcal{J}}{16} x_{(\mathrm{L})} \cdot x_{(\mathrm{NL})} + \frac{9}{64} x_{(\mathrm{L})}^2 + \frac{\mathcal{J}}{32} x_{(\mathrm{L})}^3 \Bigg\} = -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \frac{1}{4\mathcal{J}^2} \left(W^2 + W^3\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow E - J\Big|_{(\mathrm{NL})} &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{32\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg\{ 16 \beta_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \Big[9\alpha_{n-k} + 8\beta_{n-k} \Big] + \\ &\qquad + 4 \sum_{k,m=1}^{n-2} \alpha_k \alpha_m \alpha_{n-k-m} \Bigg\} \cdot \mathcal{J}^{n-2} \left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n. \end{aligned} \tag{5.58}$$

5.1.5 Μεθεπόμενοι Όροι

Παρομοίως, μπορούμε να συνεχίσουμε υπολογίζοντας όρους ανώτερης τάξης στο ανάπτυγμα μεγάλων χορδών του $E - J$. Η εξίσωση (5.26) δίνει,

$$x_{(\mathrm{L+NL+NNL}+\ldots)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} \cdot \sum_{k,j=0}^{n-1} \frac{(-1)^k n^k (n-1)!}{(k - j_1 - j_2)!\, j_1!\, j_2!} \left(\frac{\mathcal{J}+2}{4}\right)^{k-j_1-j_2} \left(\frac{7\mathcal{J}+9}{64}\right)^{j_1} \left(\frac{15\mathcal{J}}{256}\right)^{j_2}, \tag{5.59}$$

με $n - 1 = k + j_1 + 2j_2$ και $0 \le j_1 + j_2 \le k$. Τώρα, χρειαζόμαστε μόνο τους κυρίαρχους (L), επόμενους (NL) και μεθεπόμενους (NNL) όρους, οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να γράψουμε την προκύπτουσα δυναμοσειρά με τη βοήθεια της συνάρτησης W του Lambert, κάνοντας χρήση και των ταυτοτήτων (Γ′.8)–(Γ′.13) του παραρτήματος Γ′. Βρίσκουμε:

$$x_{(\mathrm{L+NL+NNL})} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n\, \mathcal{J}^{n-1} + \beta_n\, \mathcal{J}^{n-2} + \gamma_n\, \mathcal{J}^{n-3}\right) \cdot \left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n \tag{5.60}$$

όπου τα γ_n ορίζονται ως (τα α_n και β_n ορίζονται στις σχέσεις (5.44)–(5.55)):

$$\gamma_n \equiv (-1)^{n+1}\, 2^{3n-6} \cdot \frac{n^{n-3}}{n!} \cdot (n-1)\,(n-2)\left(n^2 + 41n + 228\right). \tag{5.61}$$

Η αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x\,(\mathcal{J})$ (μέχρι NNL τάξη) δίνεται τότε από

$$x_{(\mathrm{L+NL+NNL})} = \frac{4}{\mathcal{J}}\, W - \frac{1}{\mathcal{J}^2} \frac{W^2\,(7\,W+8)}{1+W} + \frac{1}{8\,\mathcal{J}^3} \frac{W^3\left(76W^3 + 269W^2 + 312W + 120\right)}{(1+W)^3}, \tag{5.62}$$

όπου τα ορίσματα των W συναρτήσεων είναι $W\left(4\,\mathcal{J}\,e^{-\mathcal{J}-2}\right)$. Εισάγουμε την (5.62) στην (5.29), κρατώντας μόνο μέχρι μεθεπόμενους όρους. Τότε οι μεθεπόμενοι (NNL) συντελεστές του $E-J$ είναι:

$$E - J\Big|_{\mathrm{NNL}} = -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}\Bigg\{\frac{x_{(\mathrm{NNL})}}{4} + \frac{9}{32}\, x_{(\mathrm{L})} \cdot x_{(\mathrm{NL})} + \frac{\mathcal{J}}{32}\, x^2_{(\mathrm{NL})} + \frac{\mathcal{J}}{16}\, x_{(\mathrm{L})} \cdot x_{(\mathrm{NNL})} + \frac{23}{256}\, x^3_{(\mathrm{L})} +$$
$$+ \frac{3\,\mathcal{J}}{32}\, x^2_{(\mathrm{L})} \cdot x_{(\mathrm{NL})} + \frac{111\,\mathcal{J}}{4096}\, x^4_{(\mathrm{L})}\Bigg\} = -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \frac{1}{32\mathcal{J}^3} \frac{W^3\left(11\,W^2 + 26\,W + 16\right)}{1+W} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E - J\Big|_{\mathrm{NNL}} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{128\,\pi} \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{64\,\gamma_n + 8\sum_{k=1}^{n-1}\Big[9\,\alpha_k\,\beta_{n-k} + 2\,\beta_k\,\beta_{n-k} + 4\,\alpha_k\,\gamma_{n-k}\Big] + \sum_{k,m=1}^{n-2} \alpha_k\,\alpha_m \cdot$$
$$\cdot\Big[23\,\alpha_{n-k-m} + 48\,\beta_{n-k-m}\Big] + \frac{111}{8}\sum_{k,m,s=1}^{n-3} \alpha_k\,\alpha_m \alpha_s\,\alpha_{n-k-m-s}\Bigg\} \cdot \mathcal{J}^{n-3}\left(e^{-\mathcal{J}-2}\right)^n. \tag{5.63}$$

Τα τελικά αποτελέσματά μας για τους κυρίαρχους, επόμενους και μεθεπόμενους όρους της αντίστροφης συνάρτησης σπίν και των ανώμαλων διαστάσεων των μεγάλων τελεστών Tr $\left[\mathcal{X}\mathcal{Z}^m\mathcal{X}\mathcal{Z}^{J-m}\right]$ της $\mathcal{N}=4$ SYM θεωρίας με δύο μαγνόνια, σε ισχυρή σύζευξη 't Hooft είναι:

$$x = \frac{4\,W}{\mathcal{J}} - \frac{1}{\mathcal{J}^2} \frac{W^2\,(7\,W+8)}{1+W} + \frac{1}{8\,\mathcal{J}^3} \frac{W^3\left(76W^3 + 269W^2 + 312W + 120\right)}{(1+W)^3} + \ldots \tag{5.64}$$

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = 2 - \frac{1}{\mathcal{J}}\left(2W + W^2\right) - \frac{1}{2\,\mathcal{J}^2}\left(W^2 + W^3\right) - \frac{1}{16\,\mathcal{J}^3} \frac{W^3\left(11\,W^2 + 26\,W + 16\right)}{1+W} + \ldots, \tag{5.65}$$

όπου $\mathcal{E} \equiv \pi E/\sqrt{\lambda}$ και $\mathcal{J} \equiv \pi J/\sqrt{\lambda}$. Αν οι σειρές (5.64) και (5.65) αναπτυχθούν γύρω από το $\mathcal{J} \to \infty$ χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor (Γ′.3), βρίσκουμε ότι συμφωνούν πλήρως με τις σειρές που βρίσκουμε με τη βοήθεια της Mathematica (Δ′.2)–(Δ′.3). Τυπικά δεν υπάρχει τίποτα που να μας εμποδίζει να πάμε ολοένα και βαθύτερα στο ανάπτυγμα (5.13) και να υπολογίσουμε όλους τους όρους του κλασικού αναπτύγματος της μεγάλης χορδής. Φαίνεται λοιπόν ότι οι συναρτήσεις W του Lambert θα συνεχίσουν να εμφανίζονται σε όλες τις επόμενες τάξεις του x, καθορίζοντας έτσι και όλες τις τάξεις του $\mathcal{E} - \mathcal{J}$. Αυτό φαίνεται καθώς η εξίσωση (5.26) θα περιέχει γενικά έναν όρο της μορφής $n^n/n!$ που πολλαπλασιάζει κάποιο πολυώνυμο Laurent του n που προέρχεται από τον πολυωνυμικό (multinomial) συντελεστή και το ανάπτυγμα των a_i σε δυνάμεις του $\mathcal{J}$. Οι εξισώσεις (Γ΄.8)–(Γ΄.13) του παραρτήματος Γ΄ μπορεί ακολούθως να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να εκφραστούν οι προκύπτουσες δυναμοσειρές ως προς τη συνάρτηση W του Lambert.

Μπορούμε να συγκρίνουμε, αν θέλουμε, τις εξισώσεις (5.64) και (5.65) για την αντίστροφη συνάρτηση σπίν και τις ανώμαλες διαστάσεις των μεγάλων χορδών (ήτοι $E \gg \sqrt{\lambda}$) με τις αντίστοιχες εκφράσεις για τις μικρές χορδές (4.60)–(4.61), δηλαδή εκείνες τις χορδές για τις οποίες $J \ll \sqrt{\lambda}$. Βλέπε επίσης και το σχήμα 27 στο παράρτημα Δ΄.1 για τα διαγράμματα των (5.64) και (5.65).

5.1.6 Ταχείες Κυκλικές Χορδές στον S^2: $\omega \to 1^-$, $J \gg \lambda$

Οι ταχείες κυκλικές χορδές επί της σφαίρας (για τις οποίες $\omega \to 1^-$) μπορούν να μελετηθούν κατά τρόπο παρόμοιο με τις μεγάλες διπλωμένες χορδές (για τις οποίες $\omega \to 1^+$). Ας εξάγουμε γρήγορα τις αντίστοιχες εκφράσεις και γι'αυτή την περίπτωση. Σημείο εκκίνησής μας είναι η σειρά των ανώμαλων διαστάσεων:

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{x}^n \left(f_n \ln\widetilde{x} + g_n\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{x}^n \left[A_n + f_n \ln\frac{\widetilde{x}}{x_0}\right], \tag{5.66}$$

$$f_n \equiv d_n - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot c_{n-k}\,, \quad g_n \equiv h_n - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot b_{n-k} \tag{5.67}$$

όπου η συμπληρωματική παράμετρος είναι $\widetilde{x} \equiv 1 - \omega^2 \to 0^-$ και οι συντελεστές d_n, h_n, c_n, b_n ορίζονται από τις (4.67)–(4.68). Τα A_n δίδονται από

$$A_n \equiv g_n + f_n \ln x_0 = g_n + f_n\,\left(4\ln 2 - \mathcal{J} - 2\right), \quad n = 0\,,1\,,2\,,\ldots \tag{5.68}$$

και το x_0 έχει ορισθεί στην εξίσωση (5.20). Το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$\widetilde{x} = -\frac{4\,W}{\mathcal{J}} - \frac{1}{\mathcal{J}^2}\frac{W^2\,(9\,W+8)}{1+W} - \frac{1}{8\,\mathcal{J}^3}\frac{W^3\left(140W^3 + 397W^2 + 376W + 120\right)}{(1+W)^3} + \ldots \tag{5.69}$$

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = 2 - \frac{1}{\mathcal{J}}\left(2W + W^2\right) - \frac{1}{2\,\mathcal{J}^2}\left(W^2 + W^3\right) - \frac{1}{16\,\mathcal{J}^3}\frac{W^3\left(11\,W^2 + 26\,W + 16\right)}{1+W} + \ldots, \tag{5.70}$$

όπου το όρισμα της συνάρτησης W είναι $W\left(-4\,\mathcal{J}\,e^{-\mathcal{J}-2}\right)$. Αναπτύσσοντας τις σειρές (5.69)–(5.70) γύρω από το $\mathcal{J} \to \infty$ με τη βοήθεια της σειράς (Γ΄.3) του παραρτήματος Γ΄, βρίσκουμε ότι είναι σε πλήρη συμφωνία με τα αντίστοιχα αναπτύγματα μεγάλου σπίν (Δ΄.4)–(Δ΄.5) που ελήφθησαν με τη Mathematica. Παρότι οι αντίστροφες συναρτήσεις σπίν $x\,(\mathcal{J})$ και $\widetilde{x}\,(\mathcal{J})$ είναι εντελώς διαφορετικές για τις μεγάλες διπλωμένες χορδές και τις ταχείες κυκλικές χορδές εντός του $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ (βλέπε και τις (5.64), (5.69)), οι αντίστοιχες εκφράσεις για τις ανώμαλες διαστάσεις, συναρτήσει της συνάρτησης W του Lambert συμπίπτουν (βλέπε (5.65), (5.70)). Επειδή τα ορίσματα των συναρτήσεων W έχουν αντίθετα πρόσημα στις δύο αυτές περιπτώσεις, οι φόρμουλες για τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \gamma\,(\mathcal{J})$ θα έχουν μια περιοδική διαφορά προσήμου (βλέπε (Δ΄.3), (Δ΄.5)). Αυτή η αντιστροφή του προσήμου φαίνεται να σχετίζεται με τη μετάβαση από την περίπτωση των ευσταθών μεγάλων διπλωμένων χορδών στις ασταθείς ταχείες κυκλικές χορδές.[28]

5.2 Περιστρεφόμενες Χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov στον AdS_3

5.2.1 Αντίστροφη Συνάρτηση Σπίν

Στην παρούσα υποενότητα θα υπολογίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση σπίν της κλειστής διπλωμένης χορδής των GKP εντός του AdS_3. Για μία ακόμη φορά θα πρέπει πρώτα να αντιστρέψουμε τη σειρά (4.34) ως προς το $x = x(\mathcal{S})$. Λύνοντας την (4.34) ως προς $\ln x$, λαμβάνουμε

$$\mathcal{S} = \frac{2}{x} + 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(c_n \ln x + b_n\right) \Rightarrow \ln x = \frac{-1/x + \mathcal{S}/2 - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x = \left[-\frac{1}{c_0\, x} + \frac{\mathcal{S}/2 - b_0}{c_0} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{c_0}\, x^n\right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{c_0}\, x^k\right)^n. \tag{5.71}$$

Η σχέση (5.71) είναι ισοδύναμη με μία εξίσωση της ακόλουθης μορφής (βλέπε την εξίσωση (5.21)):

$$x = x_0 \cdot \exp\left[\frac{\mathrm{a}_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n\, x^n\right] = x_0 \cdot \exp\left(\frac{\mathrm{a}_0}{x} + \mathrm{a}_1\, x + \mathrm{a}_2\, x^2 + \mathrm{a}_3\, x^3 + \ldots\right), \tag{5.72}$$

όπου τα a_n εξαρτώνται γραμμικά από το $\mathcal{S}$ ($\mathrm{a}_0 = -c_0^{-1} = -4$) και το x_0 ορίζεται ως εξής:

$$x_0 \equiv \exp\left[\frac{\mathcal{S}/2 - b_0}{c_0} + \frac{c_1}{c_0^2}\right] = 16\, e^{2\mathcal{S}+3/2}. \tag{5.73}$$

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να παρατηρήσουμε το εξής. Παρότι η εξίσωση (5.72) για την αντίστροφη συνάρτηση σπίν μιας κλειστής διπλωμένης χορδής που περιστρέφεται εντός του AdS_3 μοιάζει πολύ με την αντίστροφη συνάρτηση σπίν (5.21) των κλειστών (διπλωμένων ή κυκλικών) χορδών εντός του $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$, εντούτοις έχει και δύο πολύ σημαντικές διαφορές: περιέχει τον όρο $1/x$ και το x_0 είναι αύξουσα συνάρτηση του σπίν $\mathcal{S}$. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να επιλύσουμε την εξίσωση (5.72) χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της ενότητας (5.1.1), αλλά θα πρέπει να εφαρμόσουμε μια ελαφρώς διαφορετική μέθοδο. Ας θεωρήσουμε το x^* που ορίζεται ως

$$x^* = x_0 \cdot e^{\mathrm{a}_0/x^*} \Rightarrow x^* = \frac{\mathrm{a}_0}{W\left(\mathrm{a}_0/x_0\right)} = x_0 \cdot e^{W(\mathrm{a}_0/x_0)} \tag{5.74}$$

και $W(z)$ είναι η συνάρτηση W του Lambert (βλέπε παράρτημα Γ′). Ουσιαστικά το x^* αποτελεί λύση της εξίσωσης (5.72) σε πρώτη τάξη.[29] Θέτοντας

$$x = x^* \cdot e^{\mathrm{u}} \tag{5.75}$$

[28] Ο συγγραφέας εκφράζει τις ευχαριστίες του προς τον καθηγητή Ι. Μπάκα για την παρατήρηση αυτή.

[29] Με δεδομένο ότι μας ενδιαφέρει η λύση της εξίσωσης (5.71) στην περιοχή $\mathcal{S} \to +\infty$, $x \to 0^+$ και $\mathrm{a}_0 < 0$, $x_0 \to +\infty$, είμαστε υποχρεωμένοι να επιλέξουμε τον W_{-1} κλάδο της συνάρτησης Lambert. Βλέπε επίσης και το σχόλιο κάτω από την εξίσωση (5.97).

με $\mathfrak{u} \to 0$ και εισάγοντάς το στην (5.72), λαμβάνουμε με τη βοήθεια της (5.74):

$$\mathfrak{u} - \frac{\mathrm{a}_0}{x^*} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\mathfrak{u}^k}{k!} - \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n \, (x^*)^n \, e^{n\mathfrak{u}} = 0. \tag{5.76}$$

Μπορούμε να αντιστρέψουμε τη σειρά (5.76) ως προς το υ χρησιμοποιώντας τη γνωστή μέθοδο αντιστροφής σειρών. Αναπτύσσοντας το εκθετικό στην (5.76), λαμβάνουμε

$$\left(1 + \frac{\mathrm{a}_0}{x^*} - \sum_{k=1}^{\infty} k \, \mathrm{a}_k \, (x^*)^k\right) \mathfrak{u} - \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{\mathrm{a}_0}{x^*} + \sum_{k=1}^{\infty} k^n \, \mathrm{a}_k \, (x^*)^k\right] \frac{\mathfrak{u}^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n \, (x^*)^n . \tag{5.77}$$

Η αντίστροφη σειρά είναι μια δυναμοσειρά του x^*

$$\mathfrak{u} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, (x^*) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{a}_m \, (x^*)^m\right)^n , \tag{5.78}$$

όπου το $C_n \, (x^*)$ ικανοποιεί (για την αντιστροφή σειρών, βλέπε [57])

$$\begin{aligned}
C_1 \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{a}_0}{x^*} - \sum_{k=1}^{\infty} k \, \mathrm{a}_k \, (x^*)^k\right) &= 1 \\
C_2 \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{a}_0}{x^*} - \sum_{k=1}^{\infty} k \, \mathrm{a}_k \, (x^*)^k\right)^3 &= \frac{\mathrm{a}_0}{x^*} + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \, \mathrm{a}_k \, (x^*)^k \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.79}$$

Πρακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίστροφη σειρά χρησιμοποιώντας τη Mathematica. Βρίσκουμε:

$$\mathfrak{u} = \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0} (x^*)^2 + \left[\frac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_0} - \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0^2}\right] (x^*)^3 + \left[\frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0^3} + \frac{3\,\mathrm{a}_1^2 - 2\,\mathrm{a}_2}{2\,\mathrm{a}_0^2} + \frac{\mathrm{a}_3}{\mathrm{a}_0}\right] (x^*)^4 + \ldots \tag{5.80}$$

Το x στην εξίσωση (5.75) δίδεται από τη σχέση

$$x = x^* + \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0} (x^*)^3 + \left[\frac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_0} - \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0^2}\right] (x^*)^4 + \left[\frac{\mathrm{a}_3}{\mathrm{a}_0} + \frac{2\,\mathrm{a}_1^2 - \mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_0^2} + \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0^3}\right] (x^*)^5 + \ldots \tag{5.81}$$

ενώ το $1/x$ δίδεται από

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^*} - \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0} x^* - \left[\frac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_0} - \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0^2}\right] (x^*)^2 - \left[\frac{\mathrm{a}_3}{\mathrm{a}_0} + \frac{\mathrm{a}_1^2 - \mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_0^2} + \frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0^3}\right] (x^*)^3 + \ldots \tag{5.82}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε όλους τους συντελεστές a_n αναπτύσσοντας την (5.71). Εν συνεχεία τους αντικαθιστούμε στις (5.81)–(5.82) και λαμβάνουμε τις ακόλουθες σειρές ως προς x και $1/x$:

$$x = x^* + \left(\frac{\mathcal{S}}{16} + \frac{3}{64}\right)(x^*)^3 + \left(\frac{\mathcal{S}}{32} + \frac{23}{1024}\right)(x^*)^4 + \left(\frac{\mathcal{S}^2}{128} + \frac{55\mathcal{S}}{2048} + \frac{349}{24.576}\right)(x^*)^5 + \ldots \tag{5.83}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^*} - \left(\frac{\mathcal{S}}{16} + \frac{3}{64}\right)x^* - \left(\frac{\mathcal{S}}{32} + \frac{23}{1024}\right)(x^*)^2 - \left(\frac{\mathcal{S}^2}{256} + \frac{43\mathcal{S}}{2048} + \frac{295}{24.576}\right)(x^*)^3 + \ldots \tag{5.84}$$

5.2.2 Ανώμαλες Διαστάσεις

Οι σειρές των ανώμαλων διαστάσεων $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{S}$ της κλειστής διπλωμένης χορδής εντός του AdS_3 δίδεται συναρτήσει του $x = x(\mathcal{S})$ από την ακόλουθη έκφραση:

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(f_n \, \ln x + g_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[A_n + f_n \, \ln \frac{x}{x_0}\right], \quad \mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathcal{S} \equiv \frac{\pi S}{\sqrt{\lambda}}, \tag{5.85}$$

όπου,

$$x_0 \equiv \exp\left[\frac{\mathcal{S}/2 - b_0}{c_0} + \frac{c_1}{c_0^2}\right] = 16\, e^{2\mathcal{S}+3/2} \tag{5.86}$$

και επίσης ορίζουμε

$$\begin{aligned} f_n &\equiv -c_n - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} \cdot d_{n-k} \\ g_n &\equiv -b_n - \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} \cdot h_{n-k}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{5.87}$$

Οι μερικοί πρώτοι συντελεστές f_n και g_n είναι:

$$\begin{aligned} &f_0 = -\frac{1}{2}\,, \qquad f_1 = 0\,, \qquad f_2 = \frac{1}{128}\,, \qquad f_3 = \frac{1}{128} \\ &g_0 = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\,, \quad g_1 = -\frac{1}{4}\,, \quad g_2 = -\frac{1}{32}\ln 2 - \frac{3}{32}\,, \quad g_3 = -\frac{1}{32}\ln 2 - \frac{37}{768}. \end{aligned} \tag{5.88}$$

Οι συντελεστές A_n δίδονται από:

$$A_n \equiv g_n + f_n \ln x_0 = g_n + f_n \left(4\ln 2 + 2\mathcal{S} + \frac{3}{2}\right) \tag{5.89}$$

οι τρεις πρώτοι από αυτούς είναι:

$$A_0 = -\mathcal{S} - \frac{5}{4}\,, \quad A_1 = -\frac{1}{4}\,, \quad A_2 = \frac{1}{256}\left(4\mathcal{S} - 21\right)\,, \quad A_3 = \frac{1}{192}\left(3\mathcal{S} - 7\right). \tag{5.90}$$

Θα ήταν επίσης χρήσιμο να γράψουμε τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{S}$ συναρτήσει του x^*. Ας εισάγουμε πρώτα την (5.72) εντός της (5.85):

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} = \frac{2\mathrm{a}_0\, f_0}{x} + 2A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} x^n \left[A_n + \mathrm{a}_0\, f_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} f_{n-k-1}\, \mathrm{a}_{k+1}\right]. \tag{5.91}$$

Εισάγοντας τις σειρές (5.83) και (5.84) εντός της (5.91), οδηγούμαστε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} = \frac{4}{x^*} - \left(2\mathcal{S} + \frac{5}{2}\right) - \frac{9\, x^*}{16} - \left(\frac{\mathcal{S}}{32} + \frac{35}{128}\right)(x^*)^2 - \left(\frac{5\,\mathcal{S}}{128} + \frac{2213}{12.288}\right)(x^*)^3 -$$
$$- \left(\frac{\mathcal{S}^2}{512} + \frac{361\,\mathcal{S}}{8192} + \frac{6665}{49.152}\right)(x^*)^4 - \left(\frac{19\,\mathcal{S}^2}{4096} + \frac{1579\,\mathcal{S}}{32.768} + \frac{433.501}{3.932.160}\right)(x^*)^5 + \ldots \tag{5.92}$$

Για μεγάλα σπίν $\mathcal{S}$, η σειρά (5.71) μπορεί να αντιστραφεί και το $x = x\,(\mathcal{S})$ μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της Mathematica. Η αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x\,(\mathcal{S})$ μπορεί να εισαχθεί στην εξίσωση (5.85) και να δώσει τη σχέση ενέργειας-σπίν για την περίπτωση (I) της χορδής GKP και τις ανώμαλες διαστάσεις των τελεστών $\mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}\,\mathcal{D}_+^S\,\mathcal{Z}\right]$ της $\mathcal{N} = 4$ SYM, σαν συνάρτηση του (μεγάλου) R-φορτίου $\mathcal{S}$. Τα αποτελέσματα αυτού του υπολογισμού για την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x\,(\mathcal{S})$ και τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \gamma\,(\mathcal{S})$, μπορούν να βρεθούν στις εξισώσεις (Δ′.6)–(Δ′.7) του παραρτήματος Δ′. Αμφότερες οι σειρές περιέχουν γενικά τα εξής είδη όρων $(n = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$\begin{gathered} \text{Κυρίαρχοι όροι (L):}\ \frac{\ln^n \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} \\ \text{Επόμενοι όροι (NL):}\ \frac{\ln^n \mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+1}} \\ \text{Μεθεπόμενοι όροι:}\ \frac{\ln^n \mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+2}} \\ \vdots \end{gathered} \tag{5.93}$$

Όπως θα αποδειχθεί, το ανάπτυγμα της αντίστροφης συνάρτησης σπίν $x = x\,(\mathcal{S})$ δεν μπορεί να περιέχει κανέναν από τους κυρίαρχους όρους $\ln^n \mathcal{S}/\mathcal{S}^n$ ενώ το ανάπτυγμα των ανώμαλων διαστάσεων $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{S}$ τους περιέχει όλους. Το ανάπτυγμα μεγάλων σπίν της σχέσης ενέργειας-σπίν λαμβάνει τότε την εξής μορφή (5.5):

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} = \rho_c\, \ln \mathcal{S} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \rho_{(nk)}\, \frac{\ln^k \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} = \rho_c\, \ln \mathcal{S} + \rho_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{(nn)} \frac{\ln^n \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \rho_{(nn-1)} \frac{\ln^{n-1} \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} +$$
$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \rho_{(nn-2)} \frac{\ln^{n-2} \mathcal{S}}{\mathcal{S}^n} + \ldots + \frac{\rho_1}{\mathcal{S}} + \frac{\rho_2}{\mathcal{S}^2} + \frac{\rho_3}{\mathcal{S}^3} + \ldots \tag{5.94}$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η παρουσία του ασυνήθιστου «υπέρ-κυρίαρχου» όρου $f\, \ln \mathcal{S}$. Γράφουμε:

$$E - S = f\, \ln\left(S/\sqrt{\lambda}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} f_{(nk)}\, \frac{\ln^k\left(S/\sqrt{\lambda}\right)}{S^n} = f\, \ln\left(S/\sqrt{\lambda}\right) + f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_{(nn)} \frac{\ln^n\left(S/\sqrt{\lambda}\right)}{S^n} +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} f_{(nn-1)} \frac{\ln^{n-1}\left(S/\sqrt{\lambda}\right)}{S^n} + \sum_{n=3}^{\infty} f_{(nn-2)} \frac{\ln^{n-2}\left(S/\sqrt{\lambda}\right)}{S^n} + \ldots + \frac{f_1}{S} + \frac{f_2}{S^2} + \frac{f_3}{S^3} + \ldots \tag{5.95}$$

όπου

$$\rho_c = \frac{\pi\, f}{\sqrt{\lambda}}, \quad \rho_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\left(f_0 - f\ln\pi\right), \quad \rho_1 = \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\left(f_1 - f_{11}\ln\pi\right)$$

$$\rho_2 = \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)^3\left(f_2 - f_{21}\ln\pi + f_{22}\ln^2\pi\right)$$

$$\rho_3 = \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)^4\left(f_3 - f_{31}\ln\pi + f_{32}\ln^2\pi - f_{33}\ln^3\pi\right)$$

$$\rho_{(nn)} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)^{n+1}\cdot f_{(nn)}, \quad \rho_{(nn-1)} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)^{n+1}\left(f_{(nn-1)} - n\, f_{(nn)}\ln\pi\right)$$

$$\rho_{(nn-2)} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)^{n+1}\left(f_{(nn-2)} - (n-1)\, f_{(nn-1)}\ln\pi + \frac{n\,(n-1)}{2} f_{(nn)}\ln^2\pi\right). \tag{5.96}$$

5.2.3 Κυρίαρχοι Όροι

Για να υπολογίσουμε τους κυρίαρχους ως προς $\mathcal{S}$ όρους της σειράς (5.85), πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη φόρμουλα (5.74):

$$x^* = x_0\cdot e^{W_{-1}(\mathrm{a}_0/x_0)} = \frac{\mathrm{a}_0}{W_{-1}\left(\mathrm{a}_0/x_0\right)} = \frac{-4}{W_{-1}\left[-\frac{1}{4}\,e^{-2\mathcal{S}-3/2}\right]}, \tag{5.97}$$

όπου επιλέξαμε τον W_{-1} κλάδο της συνάρτησης Lambert διότι θα πρέπει $x^* \to 0^+$, καθώς $\mathcal{S}\to+\infty$ και $W_{-1}\to-\infty$ (αντίθετα $W_0 \to 0^-$ για $\mathcal{S}\to+\infty$, οδηγώντας το x^* σε απειρισμό καθώς το $x^*\to+\infty$. Βλέπε σχήμα 31). Σε πρώτη τάξη, η αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x\left(\mathcal{S}\right)$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor (Γ′.4) στον κλάδο W_{-1}. Για το $1/x^*$ παίρνουμε,

$$\frac{1}{x^*} = -\frac{1}{4}\left\{\ln\left|\frac{\mathrm{a}_0}{x_0}\right| - \ln\ln\left|\frac{\mathrm{a}_0}{x_0}\right| + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m!}\left[\begin{array}{c} n+m \\ n+1\end{array}\right]\frac{\left(\ln\ln\left|\mathrm{a}_0/x_0\right|\right)^m}{\left(\ln\left|\mathrm{a}_0/x_0\right|\right)^{n+m}}\right\} =$$

$$= \frac{\mathcal{S}}{2} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}\ln\left[2\mathcal{S} + 2\ln 2 + \frac{3}{2}\right] - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{4\,m!}\left[\begin{array}{c} n+m \\ n+1\end{array}\right]\frac{\left(\ln\left[2\mathcal{S}+2\ln 2+3/2\right]\right)^m}{\left(2\mathcal{S}+2\ln 2+3/2\right)^{n+m}} =$$

$$= \frac{\mathcal{S}}{2} + \frac{\ln\mathcal{S}}{4} + \frac{3}{4}\ln 2 + \frac{3}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n}\left(\frac{\ln 2 + 3/4}{\mathcal{S}}\right)^n - \sum_{n,q=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\frac{(-1)^m}{2^{n+m+2}\,m!}\left[\begin{array}{c} n+m \\ n+1\end{array}\right]\cdot$$

$$\cdot\left(\begin{array}{c} -n-m \\ q\end{array}\right)\left(\begin{array}{c} m \\ p\end{array}\right)\frac{\ln^p\mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+m}}\left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{\ln 2 + 3/4}{\mathcal{S}}\right)^k\right)^{m-p}\left(\frac{\ln 2 + 3/4}{\mathcal{S}}\right)^q, \tag{5.98}$$

όπου οι αριθμοί Stirling πρώτου είδους $\left[\begin{array}{c} n+m \\ n+1\end{array}\right]$ ορίζονται από την εξίσωση (Γ′.5) του παραρτήματος Γ′, και για μεγάλο $\mathcal{S}$ χρησιμοποιήσαμε την ακόλουθη ταυτότητα:

$$\ln\left[2\mathcal{S}+2\ln 2+\frac{3}{2}\right]=\ln\mathcal{S}+\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{\ln 2+3/4}{\mathcal{S}}\right)^{n}. \tag{5.99}$$

Για να υπολογίσουμε το x^*, ας αναπτύξουμε το αντίστροφό του από τη σχέση (5.98). Το αποτέλεσμα είναι,

$$x^*=\frac{2}{\mathcal{S}}\cdot\Bigg\{1+\frac{\ln\mathcal{S}}{2\,\mathcal{S}}+(2\ln 2+1)\,\frac{3}{4\mathcal{S}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\frac{(\ln 2+3/4)^{n}}{\mathcal{S}^{n+1}}-\sum_{n,q=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\frac{(-1)^{m}}{2^{n+m+1}\,m!}\cdot$$
$$\cdot\begin{bmatrix} n+m \\ n+1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -n-m \\ q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}\frac{\ln^{p}\mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+m+1}}\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k}\left(\frac{\ln 2+3/4}{\mathcal{S}}\right)^{k}\right)^{m-p}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{\ln 2+3/4}{\mathcal{S}}\right)^{q}\Bigg\}^{-1}\Rightarrow \tag{5.100}$$

$$x^*=\frac{2}{\mathcal{S}}-\left[\ln\mathcal{S}+\left(3\ln 2+\frac{3}{2}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^2}+\left[\frac{\ln^2\mathcal{S}}{2}+(1+3\ln 2)\ln\mathcal{S}+\left(\frac{9\ln^2 2}{2}+3\ln 2+\frac{3}{8}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^3}-$$
$$-\Big[\frac{\ln^3\mathcal{S}}{4}+\left(\frac{1}{2}+\frac{9\ln 2}{4}\right)\ln^2\mathcal{S}+\left(\frac{27\ln^2 2}{4}+3\ln 2+\frac{1}{16}\right)\ln\mathcal{S}+\Big(\frac{27\ln^3 2}{4}+\frac{9\ln^2 2}{2}+\frac{3\ln 2}{16}-$$
$$-\frac{3}{16}\Big)\Big]\frac{1}{\mathcal{S}^4}+\Big[\frac{\ln^4\mathcal{S}}{8}+\left(\frac{3\ln 2}{2}+\frac{5}{24}\right)\ln^3\mathcal{S}+\left(\frac{27\ln^2 2}{4}+\frac{15\ln 2}{8}-\frac{3}{16}\right)\ln^2\mathcal{S}+\Big(\frac{27\ln^3 2}{2}+$$
$$+\frac{45\ln^2 2}{8}-\frac{9\ln 2}{8}-\frac{13}{32}\Big)\ln\mathcal{S}+\Big(\frac{81\ln^4 2}{8}+\frac{45\ln^3 2}{8}-\frac{27\ln^2 2}{16}-\frac{39\ln 2}{32}-\frac{15}{128}\Big)\Big]\frac{1}{\mathcal{S}^5}+\ldots \tag{5.101}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι η σειρά (5.98) για το $1/x^*$ πέριέχει όλων των ειδών τους μικρούς όρους (ήτοι όρους οι οποίοι $\to 0$ καθώς $\mathcal{S}\to\infty$): κυρίαρχους όρους $\ln^n\mathcal{S}/\mathcal{S}^n$, επόμενους όρους $\ln^n\mathcal{S}/\mathcal{S}^{n+1}$, μεθεπόμενους όρους $\ln^n\mathcal{S}/\mathcal{S}^{n+2}$, κλπ. μέχρι $1/\mathcal{S}^n$ όρους, με $n=1,\,2,\,3\ldots$ Αντίθετα, οι σειρές (5.100)–(5.101) για το x^* δεν περιέχουν κανέναν εκ των κυρίαρχων όρων. Παρομοίως το $(x^*)^2$ δεν θα περιέχει κανέναν κυρίαρχο και επόμενο όρο, το $(x^*)^3$ κανέναν κυρίαρχο, επόμενο και μεθεπόμενο όρο, κ.ο.κ. Για να υπολογίσουμε το $E-S$ σε πρώτη τάξη ως προς $\mathcal{S}$, χρειαζόμαστε μόνο τους δύο πρώτους όρους των (5.92), δηλαδή

$$\mathcal{E}-\mathcal{S}\Big|_{\text{L}+\ldots}=\frac{4}{x^*}-\left(2\,\mathcal{S}+\frac{5}{2}\right), \tag{5.102}$$

καθώς οι υπόλοιποι όροι των (5.92) συνεισφέρουν από την NL τάξη και πέρα. Βρίσκουμε

$$\mathcal{E}-\mathcal{S}\Big|_{\text{L}+\ldots}=\ln\mathcal{S}+(3\ln 2-1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{\ln 2+3/4}{\mathcal{S}}\right)^{n}-\sum_{n,q=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\frac{(-1)^{m}}{2^{n+m}}\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{m!}\begin{bmatrix} n+m \\ n+1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -n-m \\ q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}\frac{\ln^{p}\mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+m}}\left(\frac{\ln 2+3/4}{\mathcal{S}}\right)^{q}\Big[\ln 2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k}\cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\ln 2 + 3/4}{\mathcal{S}}\right)^k \Bigg]^{m-p}. \tag{5.103}$$

Για $p = m$ και $n = q = 0$ μπορούμε να διαβάσουμε όλους τους συντελεστές των κυρίαρχων όρων:

$$\rho_{(mm)} = -\frac{(-1)^m}{2^m\, m!} \cdot \left[\begin{array}{c} m \\ 1 \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} -m \\ 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} m \\ m \end{array} \right) = \frac{(-1)^{m+1}}{2^m} \frac{1}{m}. \tag{5.104}$$

Όπως έχουμε ήδη πεί, τα απότελεσματά μας συμφωνούν με αυτά του [12] (χρησιμοποιούμε $\left[\begin{smallmatrix} m \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = (m-1)!$). Επίσης,

$$\rho_c = 1 \quad \& \quad \rho_0 = 3 \ln 2 - 1. \tag{5.105}$$

5.2.4 Επόμενοι Όροι

Για την εύρεση των επόμενων όρων απαιτούνται οι ακόλουθοι όροι της (5.92),

$$\mathcal{E} - \mathcal{S}\Big|_{\mathrm{L+NL+\ldots}} = \frac{4}{x^*} - \left(2\,\mathcal{S} + \frac{5}{2}\right) - \frac{9\,x^*}{16} - \frac{\mathcal{S}}{32}\,(x^*)^2\,. \tag{5.106}$$

Κρατώντας όλους τους όρους των εξισώσεων (5.98)–(5.101) που συνεισφέρουν σε επόμενη τάξη, παίρνουμε

$$\rho_{(m+1,m)} = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+1}} \left[H_m + \frac{m}{4} + 1 - 3\ln 2\right], \tag{5.107}$$

η οποία συμφωνεί με τα αποτελέσματα του [12] (εδώ χρησιμοποιήσαμε $\left[\begin{smallmatrix} m+1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] = m!\, H_m$). Μπορούμε ακόμη να επιβεβαιώσουμε την τιμή του συντελεστή ρ_1 στην εξίσωση (5.94):

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\,(3 \ln 2 - 1)\,. \tag{5.108}$$

5.2.5 Μεθεπόμενοι Όροι

Σε μεθεπόμενη (NNL) τάξη, οι όροι που συνεισφέρουν στις (5.92) είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - \mathcal{S}\Big|_{\mathrm{L+NL+NNL+\ldots}} = \frac{4}{x^*} - \left(2\,\mathcal{S} + \frac{5}{2}\right) - \frac{9\,x^*}{16} - \left(\frac{\mathcal{S}}{32} + \frac{35}{128}\right)(x^*)^2 - \frac{5\,\mathcal{S}}{128}\,(x^*)^3 - \\ - \frac{\mathcal{S}^2}{512}\,(x^*)^4 + \ldots \end{aligned} \tag{5.109}$$

Μπορούμε να βρούμε όλους τους μεθεπόμενους όρους (με τη βοήθεια της ιδιότητας (Γ′.6) των αριθμών

Stirling):

$$\rho_{(m+2,m)} = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+3}} \cdot (m+1) \cdot \Bigg\{ H_{m+1}^2 - H_{m+1}^{(2)} + \frac{1}{2}(m - 12\ln 2 + 5) \cdot H_{m+1} + \frac{m(m-1)}{24} - \\ - \frac{3}{2}(m+5)\ln 2 + 9\ln^2 2 \Bigg\}. \tag{5.110}$$

Ο συντελεστής ρ_2 των (5.94) είναι:

$$\rho_2 = -\frac{9\ln^2 2}{8} + \frac{27\ln 2}{16} - \frac{5}{16}. \tag{5.111}$$

Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με εκείνα των [71, 80] για τους λίγους πρώτους όρους των σειρών (5.95). Περισσότερα στο παράρτημα Δ′ και τη φόρμουλα (Δ′.7).

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο γράφοντας τις εκφράσεις με τη συνάρτηση W για την αντίστροφη συνάρτηση του σπίν $x = x(\mathcal{J})$ και τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \gamma(\mathcal{J})$. Αντικαθιστώντας το x^* από την (5.97) στις εξισώσεις (5.83) και (5.92) παίρνουμε:

$$x = -\frac{4}{W_{-1}} - \frac{4\,\mathcal{S}+3}{(W_{-1})^3} + \left[8\mathcal{S} + \frac{23}{4}\right]\frac{1}{(W_{-1})^4} - \left[8\,S^2 + \frac{55}{2}\,S + \frac{349}{24}\right]\frac{1}{(W_{-1})^5} + \Bigg[38\,S^2 + \\ + \frac{711\,S}{8} + \frac{3745}{96}\Bigg]\frac{1}{(W_{-1})^6} - \left[20\,S^3 + 176\,S^2 + \frac{4765\,S}{16} + \frac{26.659}{240}\right]\frac{1}{(W_{-1})^7} + \\ + \left[\frac{466\,S^3}{3} + \frac{6077\,S^2}{8} + \frac{48.955\,S}{48} + \frac{2.543.083}{7680}\right]\frac{1}{(W_{-1})^8} - \ldots, \tag{5.112}$$

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} = -W_{-1} - \left(2\mathcal{S} + \frac{5}{2}\right) + \frac{9}{4\,W_{-1}} - \left[\frac{\mathcal{S}}{2} + \frac{35}{8}\right]\frac{1}{(W_{-1})^2} + \left[\frac{5\,\mathcal{S}}{2} + \frac{2213}{192}\right]\frac{1}{(W_{-1})^3} - \\ - \left[\frac{\mathcal{S}^2}{2} + \frac{361\,\mathcal{S}}{32} + \frac{6665}{192}\right]\frac{1}{(W_{-1})^4} + \left[\frac{19\,\mathcal{S}^2}{4} + \frac{1579\,\mathcal{S}}{32} + \frac{433.501}{3840}\right]\frac{1}{(W_{-1})^5} - \\ - \left[\frac{5\,\mathcal{S}^3}{6} + \frac{259\,\mathcal{S}^2}{8} + \frac{81.799\,\mathcal{S}}{384} + \frac{2.963.887}{7680}\right]\frac{1}{(W_{-1})^6} + \Bigg[\frac{34\,\mathcal{S}^3}{3} + \frac{3069\,\mathcal{S}^2}{16} + \\ + \frac{175.481\,\mathcal{S}}{192} + \frac{2.350.780.111}{1.720.320}\Bigg]\frac{1}{(W_{-1})^7} - \ldots, \tag{5.113}$$

όπου $\mathcal{E} \equiv \pi E/\sqrt{\lambda}$, $\mathcal{S} \equiv \pi S/\sqrt{\lambda}$ και το όρισμα της συνάρτησης W είναι $W_{-1}\left(-e^{-2\mathcal{S}-3/2}/4\right)$. Για μια ακόμη φορά οι όροι και των δύο σειρών (5.112) και (5.113) είναι σε φθίνουσα σειρά ως προς τη σημαντικότητά τους, π.χ. σύμφωνα με την (5.102), οι δύο πρώτοι όροι της (5.113) είναι οι κυρίαρχοι συντελεστές, η (5.106) συνεπάγεται ότι οι τέσσερις πρώτοι όροι περιέχουν όλους τους επόμενους συντελεστές, κλπ. Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι οι εξισώσεις (5.112)–(5.113) είναι σωστές, αναπτύσσοντάς τες πρώτα γύρω από το $\mathcal{S} \to +\infty$ με τη βοήθεια του αναπτύγματος (Γ′.4) της συνάρτησης W στον W_{-1} κλάδο της, και μετά συγκρίνοντάς τες με τις σειρές (Δ′.6)–(Δ′.7) που υπολογίζονται με τη βοήθεια της Mathematica.

5.3 Αμοιβαιότητα

Το γεγονός ότι οι τελεστές συστροφής (επίσης γνωστοί και ως ημιπαρτονικοί τελεστές)[30] μπορούν να ταξινομηθούν σύμφωνα με τις αναπαραστάσεις της συγγραμμικής (collinear) υποομάδας $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \subset \mathfrak{so}(4,2)$, οι οποίες μπορούν να επισημανθούν από το σύμμορφο σπίν s

$$s \equiv \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}(S+\Delta) = \mathcal{S} + \frac{1}{2}\gamma(\mathcal{S}), \tag{5.114}$$

όπου

$$\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{S}, \qquad \mathcal{E} \equiv \frac{\pi E}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \mathcal{S} \equiv \frac{\pi S}{\sqrt{\lambda}}, \tag{5.115}$$

σημαίνει ότι οι ανώμαλες διαστάσεις $\gamma(\mathcal{S})$ πρέπει να είναι συνάρτηση του σύμμορφου σπίν s:

$$\gamma(\mathcal{S}) = P(s) = P\left(\mathcal{S} + \frac{1}{2}\gamma(\mathcal{S})\right). \tag{5.116}$$

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε,

$$P(\mathcal{S}) = \gamma\left(\mathcal{S} - \frac{1}{2}P(\mathcal{S})\right). \tag{5.117}$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να αντιστραφεί χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα των Lagrange και Bürmann (5.22), ως ακολούθως [81]:

$$P(\mathcal{S}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{2}\partial_{\mathcal{S}}\right)^{k-1}\gamma^k(\mathcal{S}). \tag{5.118}$$

Η ιδιότητα της αμοιβαιότητας ή αναλλοιώτητας ομοτιμίας (parity) των ανώμαλων διαστάσεων $\gamma(\mathcal{S})$ εκφράζεται από τη συνθήκη όπως για μεγάλες τιμές του σπίν $\mathcal{S}$, η αντίστροφη ανώμαλη διάσταση $P(\mathcal{S})$ να περιέχει μόνο άρτιες αρνητικές δυνάμεις του τετραγωνικού τελεστή Casimir της συγγραμμικής ομάδας, $C^2 = s_0(s_0-1)$:[31]

$$P(\mathcal{S}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \ln C}{C^{2k}}. \tag{5.119}$$

Υπολογίζοντας την $P(\mathcal{S})$ αφού αντικαταστήσουμε τη φόρμουλα (Δ′.7) στην (5.118), βρίσκουμε ότι η $P(\mathcal{S})$ είναι «απλή» ως προς το ότι δεν περιέχει κυρίαρχους λογαρίθμους του $\mathcal{S}$ (σε αντίθεση με το $\gamma(\mathcal{S})$ στην (Δ′.7)) και επιπλέον έχει την ιδιότητα της αμοιβαιότητας [71, 77, 80] διότι περιέχει μόνο άρτιες αρνητικές δυνάμεις του $\mathcal{S}$ και είναι επομένως συμμετρική ως προς το $C = \mathcal{S} \to -\mathcal{S}$:

$$P(\mathcal{S}) = \ln\mathcal{S} + \Big[3\ln 2 - 1\Big] + \left[\frac{\ln\mathcal{S}}{16} + \left(\frac{3\ln 2}{16} + \frac{1}{16}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^2} - \Big[\frac{\ln^2\mathcal{S}}{128} + \left(\frac{3\ln 2}{64} + \frac{7}{1024}\right)\ln\mathcal{S} + $$
$$+ \left(\frac{9\ln^2 2}{128} + \frac{21\ln 2}{1024} + \frac{5}{2048}\right)\Big]\frac{1}{\mathcal{S}^4} + O\left(\frac{1}{\mathcal{S}^6}\right). \tag{5.120}$$

Αν επαναλάβουμε την ανάλυσή μας εισάγοντας τη φόρμουλα (5.94) στην (5.118) και απαιτώντας όπως όλοι οι κυρίαρχοι συντελεστές, καθώς επίσης και όλοι εκείνοι που πολλαπλασιάζουν τις περιττές αρνητικές δυνάμεις του $1/\mathcal{S}$ να μηδενίζονται, λαμβάνουμε ένα σύστημα εξισώσεων μεταξύ των συντελεστών

[30] Ήτοι τελεστές που αποτελούνται από βαθμωτά, gauginos η διανυσματικά πεδία και τις παραγώγους κώνου φωτός αυτών.

[31] Γράφουμε $s_0 \equiv \pi(S+\Delta_0)/2\sqrt{\lambda}$ για το γυμνό σύμμορφο σπίν.

ρ. Λύνοντας αυτό το σύστημα εξισώσεων, οδηγούμαστε στο ακόλουθο σετ εξισώσεων οι οποίες είναι γνωστές ως σχέσεις MVV:[32]

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\,\rho_c\,\rho_0, \quad \rho_{11} = \frac{\rho_c^2}{2}, \quad \rho_{22} = -\frac{\rho_c^3}{8}, \quad \rho_{33} = \frac{\rho_c^4}{24}, \quad \rho_{44} = -\frac{\rho_c^5}{64}, \quad \rho_{55} = \frac{\rho_c^6}{160} \tag{5.121}$$

$$\rho_{32} + \rho_c\,\rho_{21} = \frac{\rho_c^4}{16} - \frac{1}{8}\,\rho_c^3\,\rho_0, \quad \rho_c\rho_2 + \rho_{21}\,(\rho_0 - \rho_c) + \rho_{31} = -\frac{\rho_c^4}{8} + \frac{3}{8}\,\rho_c^3\,\rho_0 - \frac{1}{4}\,\rho_c^2\,\rho_0^2 \tag{5.122}$$

$$\rho_2\left(\rho_0 - \frac{\rho_c}{2}\right) - \frac{1}{2}\,\rho_0\,\rho_{21} + \rho_3 = -\frac{1}{8}\,\rho_c^3\,\rho_0 + \frac{1}{4}\,\rho_c^2\,\rho_0^2 - \frac{1}{12}\,\rho_c\,\rho_0^3 \tag{5.123}$$

$$\rho_c^3\,\rho_2 + \rho_{21}\left(3\rho_c^2\,\rho_0 - \frac{37\,\rho_c^3}{12}\right) - 2\,\rho_c\,\rho_{42} + 2\,\rho_{43}\,(\rho_c - \rho_0) - \rho_{53} = \frac{95}{96}\,\rho_c^5\,\rho_0 - \frac{5}{8}\,\rho_c^4\,\rho_0^2 - \frac{67\rho_c^6}{192} \tag{5.124}$$

$$\vdots$$

Μπορούμε ακόμη να τεστάρουμε και την ιδέα της *κληρονομικότητας* (inheritance), ήτοι να επιβεβαιώσουμε κατά πόσον οι χαμηλές τάξεις της διαταρακτικής θεωρίας μπορούν να επηρεάσουν ή ακόμη και να ελέγξουν τις υψηλότερες τάξεις στη θεωρία διαταραχών των χορδών. Η ιδέα της κληρονομικότητας εμφανίστηκε αρχικά στα πλαίσια της QCD (για μία ανασκόπηση βλέπε [84]), όπου παρατηρήθηκε ότι οι χαμηλότερες τάξεις στη θεωρία διαταραχών δύνανται να μεταδώσουν τη δομή τους στις υψηλότερες τάξεις. Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι οι κβαντικές διορθώσεις που υπολογίστηκαν στο [71] επαληθεύουν τις δύο πρώτες από τις παραπάνω σχέσεις MVV μέχρι τον ένα βρόχο. Για τις υπόλοιπες σχέσεις MVV, η κληρονομικότητα αναμένεται (και έχει πράγματι αποδειχθεί) να σπάει. Αυτό συμβαίνει λόγω του φαινομένου του wrapping που αρχίζει να εγκαθιδρύεται στην κρίσιμη τάξη βρόχου και παραμένει σε ισχυρή σύζευξη. Τα φαινόμενα wrapping είναι υπεύθυνα για το σπάσιμο τόσο της «αμοιβαιότητας» όσο και της «απλότητας» στα αναπτύγματα μεγάλου σπίν των ανώμαλων διαστάσεων των τελεστών συστροφής 2 της $\mathcal{N} = 4$ SYM σε ισχυρή σύζευξη [80].

Για τις χορδές GKP στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$, υπάρχει ένας μετασχηματισμός που επιτρέπει να εκφράσουμε την αντίστοιχη σχέση διασποράς σε μορφή που θυμίζει τη σχέση διασποράς της κλειστής διπλωμένης χορδής GKP στον AdS_3 και επιτρέπει τη σύγκριση μεταξύ τους. Ο μετασχηματισμός

$$\mathcal{S} \equiv \frac{1}{16}\,e^{\mathcal{J}+2} \Leftrightarrow \mathcal{J} = \ln\mathcal{S} + 4\ln 2 - 2, \tag{5.125}$$

οδηγεί στο ακόλουθο σετ όρων στη σχέση ενέργειας-σπίν των κλειστών διπλωμένων χορδών εντός του $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$:

$$\begin{gathered} \text{Κυρίαρχοι όροι (L): } \frac{\ln^n\mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+1}} \\ \text{Επόμενοι όροι (NL): } \frac{\ln^n\mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+2}} \\ \text{Μεθεπόμενοι όροι: } \frac{\ln^n\mathcal{S}}{\mathcal{S}^{n+3}} \\ \vdots \end{gathered} \tag{5.126}$$

[32] Η αμοιβαιότητα των Gribov-Lipatov [82] συνεπάγεται ορισμένες σχέσεις μεταξύ των συντελεστών των αναπτυγμάτων μεγάλου σπίν των ανώμαλων διαστάσεων, οι οποίες είναι γνωστές ως σχέσεις των Moch-Vermaseren-Vogt (MVV) [62]. Για περισσότερες πληροφορίες επί της έννοιας της αμοιβαιότητας στα πλαίσια της QCD βλέπε [81, 83, 84]. Για τους άλλους τελεστές συστροφής της $\mathcal{N} = 4$ SYM, βλέπε [85]. Για την αμοιβαιότητα στα πλαίσια της $\mathcal{N} = 6$ super Chern-Simons (ABJM) θεωρίας, βλέπε [86].

Σε αντιδιαστολή με την περίπτωση του AdS, όλοι οι όροι $\ln^n \mathcal{S}/\mathcal{S}^n$ είναι απόντες από το ανάπτυγμα μεγάλου σπίν των ανώμαλων διαστάσεων:

$$\gamma = 2 - \frac{1}{2\mathcal{S}} + \left[\frac{\ln \mathcal{S}}{16} + \left(\frac{\ln 2}{4} - \frac{5}{32}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^2} - \left[\frac{\ln^2 \mathcal{S}}{64} + \left(\frac{\ln 2}{8} - \frac{9}{128}\right)\ln \mathcal{S} + \left(\frac{\ln^2 2}{4} - \frac{9 \ln 2}{32} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{3}{32}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^3} + \left[\frac{\ln^3 \mathcal{S}}{192} + \left(\frac{\ln 2}{16} - \frac{17}{512}\right)\ln^2 \mathcal{S} + \left(\frac{\ln^2 2}{4} - \frac{17 \ln 2}{64} + \frac{163}{2048}\right)\ln \mathcal{S} + \left(\frac{\ln^3 2}{3} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{17 \ln^2 2}{32} + \frac{163 \ln 2}{512} - \frac{1735}{24.576}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^4} - O\left(\frac{1}{\mathcal{S}^5}\right). \tag{5.127}$$

Έχοντας εκφράσει τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{J}$ ως προς τη μεταβλητή $\mathcal{S} = e^{\mathcal{J}+2}/16$, είναι πολύ δελεαστικό να θέσουμε και να απαντήσουμε ερωτήσεις οι οποίες ανακύπτουν στην περίπτωση των τελεστών συστροφής. Αν υπολογίσουμε την $P(\mathcal{S})$ αντικαθιστώντας τη σχέση (5.127) στην (5.118), βρίσκουμε ότι η $P(\mathcal{S})$ είναι απλή ως προς το ότι περιέχει μόνο επόμενους λογαρίθμους του $\mathcal{S}$ (όχι όμως και απλούστερο από το $\gamma(\mathcal{S})$, καθότι η (5.127) δεν περιέχει κυρίαρχους λογάριθμους), και δεν είναι αναλλοίωτο ως προς της αμοιβαιότητα/ομοτιμία, αφού τόσο οι άρτιες όσο και οι περιττές αρνητικές δυνάμεις του $\mathcal{S}$ συνεισφέρουν (συνεπώς δεν υπάρχει συμμετρία ως προς το $C = \mathcal{S} \to -\mathcal{S}$):

$$P(\mathcal{S}) = 2 - \frac{1}{2\mathcal{S}} + \left[\frac{\ln \mathcal{S}}{16} + \left(\frac{\ln 2}{4} - \frac{21}{32}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^2} - \left[\frac{\ln^2 \mathcal{S}}{64} + \left(\frac{\ln 2}{8} - \frac{25}{128}\right)\ln \mathcal{S} + \left(\frac{\ln^2 2}{4} - \frac{25 \ln 2}{32} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{27}{32}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^3} + \left[\frac{\ln^3 \mathcal{S}}{192} + \left(\frac{\ln 2}{16} - \frac{41}{512}\right)\ln^2 \mathcal{S} + \left(\frac{\ln^2 2}{4} - \frac{41 \ln 2}{64} + \frac{947}{2048}\right)\ln \mathcal{S} + \left(\frac{\ln^3 2}{3} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{41 \ln^2 2}{32} + \frac{947 \ln 2}{512} - \frac{13.255}{24.576}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^4} + O\left(\frac{1}{\mathcal{S}^5}\right). \tag{5.128}$$

6 Γιγάντια Μαγνόνια και Απλές Ακίδες Απείρου Μεγέθους

Η έννοια του μαγνονίου προκύπτει στον $\mathfrak{su}(2)$ τομέα της επίπεδης $\mathcal{N}=4$ SYM, θεωρώντας όλους τους αναλλοίωτους υπό μετασχηματισμούς βαθμίδας τελεστές μονού ίχνους του τομέα και το φάσμα των διαστάσεων κλίμακας αυτών. Το Bethe ansatz χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των διαστάσεων κλίμακας όλων των τελεστών σε ένα βρόχο της θεωρίας διαταραχών ως προς α'. Με το ασυμπτωτικό Bethe ansatz (ABA) των Beisert, Dippel και Staudacher (BDS), η πρόβλεψη των ενεργειών των μαγνονίων σε όλους τους βρόχους κατέστη εφικτή για τους τελεστές απείρου μεγέθους. Για τις καταστάσεις με $M=1$ μαγνόνια

$$\mathcal{O}_M=\sum_{m=1}^{J+1}e^{imp}\left|\mathcal{Z}^{m-1}\mathcal{X}\mathcal{Z}^{J-m+1}\right\rangle, \quad p\in\mathbb{R} \tag{6.1}$$

$$\tag{6.2}$$

και για άπειρο μέγεθος ($J=\infty$),[33] το ασυμπτωτικό Bethe ansatz δίνει:

$$\Delta-J=\sqrt{1+\frac{\lambda}{\pi^2}\sin^2\frac{p}{2}}, \quad J=\infty, \text{ για κάθε } \lambda. \tag{6.3}$$

Η σχέση (6.3) αποτελεί μια μη διαταρακτική πρόβλεψη για το φάσμα ενός μαγνονίου σε άπειρο μέγεθος η οποία ισχύει για όλες τις τάξεις βρόχων, σε ασθενή και ισχυρή σύζευξη. Τα όρια ασθενούς και ισχυρής σύζευξης είναι:

$$\Delta-J=1+\frac{\lambda}{2\pi^2}\sin^2\frac{p}{2}-\frac{\lambda^2}{8\pi^4}\sin^4\frac{p}{2}+\frac{\lambda^3}{16\pi^6}\sin^6\frac{p}{2}-\ldots, \qquad \lambda\to 0 \text{ (ασθενής σύζευξη)} \tag{6.4}$$

$$\Delta-J=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\sin\frac{p}{2}+0+\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\csc\frac{p}{2}-\frac{\pi^3}{8\lambda^{3/2}}\csc^3\frac{p}{2}+\ldots, \qquad \lambda\to\infty \text{ (ισχυρή σύζευξη)}. \tag{6.5}$$

Στην πραγματικότητα, οι τελεστές με ένα μαγνόνιο (6.1) δεν αποτελούν φυσικές καταστάσεις της $\mathcal{N}=4$ SYM αφού η κυκλικότητα του ίχνους συνεπάγεται ότι η ολική τους ορμή p θα πρέπει να είναι μηδέν. Όπως έδειξε ο Beisert στο [87], προκειμένου να φιλοξενήσουμε καταστάσεις μη μηδενικής ορμής $p\neq 0$ (όπως η (6.1)) στην $\mathcal{N}=4$ SYM θεωρία, η αντίστοιχη άλγεβρα συμμετρίας $\mathfrak{su}(2|2)\oplus\mathfrak{su}(2|2)\subset\mathfrak{psu}(2,2|4)$ θα πρέπει να επεκταθεί με δύο κεντρικά φορτία. Για να λάβουμε καλά ορισμένες καταστάσεις της θεωρίας βαθμίδας, είτε η ορμή κάθε μαγνονίου θα πρέπει να μηδενίζεται, είτε θα πρέπει να σχηματίσουμε τελεστές με δύο ή περισσότερα μαγνόνια και μηδενική συνολική ορμή.

Οι καταστάσεις της θεωρίας χορδών που είναι δυϊκές στα μαγνόνια της $\mathcal{N}=4$ SYM με άπειρο μέγεθος ($J=\infty$) είναι τα «γιγάντια μαγνόνια» (GMs), που βρέθηκαν το 2006 από τους Hofman και Maldacena (HM) [50]. Τα γιγάντια μαγνόνια είναι ανοικτές χορδές ενός σπίν που περιστρέφονται ως στερεά σώματα εντός του $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2\subset\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$. Αποτελούν τις στοιχειώδεις διεγέρσεις της θεωρίας χορδών τύπου IIB στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$, κάτι σαν τις θεμελιώδεις δομικές μονάδες όλων των κλειστών καταστάσεων χορδών και πολύ-σολιτονικών λύσεων της θεωρίας. Παρά το γεγονός ότι η τόσο η διατηρούμενη ενέργεια όσο και το σπίν των γιγάντιων μαγνονίων απείρου μεγέθους αποκλίνουν ($E,J=\infty$), η διαφορά τους παραμένει πεπερασμένη ούτως ώστε η σχέση ενέργειας-ορμής ενός γιγάντιου μαγνονίου με ορμή/γωνιακή έκταση

[33] Η ακόλουθη σύμβαση θα εφαρμοστεί από εδώ και στο εξής: $E,J,p=\infty/v,\omega=1$ θα δηλώνει άπειρο μέγεθος (που λαμβάνουμε υπολογίζοντας το όριο $\lim_{J,p\to\infty/v,\omega\to1}$), ενώ $E,J,p\to\infty/v,\omega\to 1$ θα δηλώνει μεγάλο αλλά ωστόσο πεπερασμένο μέγεθος (ήτοι προτού ληφθεί το όριο $\lim_{J,p\to\infty/v,\omega\to1}$).

$p = \Delta\varphi$ να είναι:

$$E - J = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right|, \quad J = \infty, \ \lambda \to \infty. \tag{6.6}$$

Καθότι οι ανοικτές χορδές απουσιάζουν από το φάσμα των θεωριών χορδών τύπου IIB, αντιμετωπίζουμε κι εδώ το ίδιο πρόβλημα που είχαμε με τα μαγνόνια της θεωρίας βαθμίδας των οποίων η ορμή δεν μηδενιζόταν. Όπως και με τα μαγνόνια, προκειμένου να φιλοξενήσουμε τα γιγάντια μαγνόνια στη θεωρία χορδών, η άλγεβρα συμμετρίας του αντίστοιχου σίγμα μοντέλου (2.13) θα πρέπει να επεκταθεί με δύο επιπλέον κεντρικά φορτία. Φυσικές καταστάσεις χορδών μπορούν μόνο να κατασκευαστούν από δύο ή περισσότερα γιγάντια μαγνόνια μηδενικής συνολικής ορμής.

Η χορδή (II) των GKP εντός του $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ που μελετήσαμε εκτενώς στις §4.2–§5.1 αποτελεί μια τέτοια κλειστή κατάσταση μηδενικής συνολικής ορμής. GKP χορδές απείρου μεγέθους στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ μπορούν να σχηματιστούν με την υπέρθεση δύο γιγάντιων μαγνονίων HM που έχουν μέγιστη γωνιακή έκταση $\Delta\varphi = \pi$ και στροφορμή ίση προς $J/2$ το καθένα. Είναι δυϊκές προς τους τελεστές 2 μαγνονίων $\mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}^J\mathcal{X}^2\right]$ και η σχέση διασποράς τους σε άπειρο μέγεθος είναι:

$$E - J = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}, \quad J = \infty, \ \lambda \to \infty. \tag{6.7}$$

Μια δεύτερη κλάση λύσεων στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ είναι εκείνη των απλών ακίδων (single spikes, SSs), χορδές ενός σπίν με μία ακίδα (spike), που περιστρέφονται επί της δισδιάστατης σφαίρας όπως ακριβώς τα γιγάντια μαγνόνια [88, 89]. Σε τεχνικό επίπεδο, οι απλές ακίδες είναι πολύ στενά συνδεδεμένες με τα γιγάντια μαγνόνια. Στη σύμμορφη βαθμίδα, το ansatz για τις απλές ακίδες προκύπτει από το γιγάντιο μαγνόνιο των HM ανταλλάσσοντας τις δύο συντεταγμένες κοσμικού φύλλου στη δισδιάστατη σφαίρα, ήτοι $\tau \leftrightarrow \sigma$ και παράλληλα αφήνοντας τη χρονική χωροχρονική συντεταγμένη αναλλοίωτη και ίση με $t = \tau$. Η εργασία [90] ισχυρίζεται ότι ο μετασχηματισμός $\tau \leftrightarrow \sigma$ μας πηγαίνει από τις χορδές μεγάλου μεγέθους στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ στις χορδές μεγάλης περιέλιξης (winding) και από τον ολομορφικό τομέα της $\mathcal{N}=4$ SYM στον μη ολομορφικό της τομέα.

Τα διατηρούμενα φορτία της ορμής και της στροφορμής για τις απλές ακίδες απείρου μεγέθους αποκλίνουν ως $E, p = \infty$, ενώ η διαφορά τους παραμένει πεπερασμένη. Η σχέση διασποράς τους είναι:

$$E - T\Delta\varphi = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\arcsin\left(\frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad p = \infty, \ \lambda \to \infty, \tag{6.8}$$

όπου $\Delta\varphi = p$ είναι η ορμή/γωνιακή έκταση της απλής ακίδας. Η σχέση διασποράς του γιγάντιου μαγνονίου (6.6) μπορεί να εξαχθεί από την (6.8) κάνοντας τον μετασχηματισμό $\pi E/\sqrt{\lambda} - \Delta\varphi/2 \mapsto p/2$ και $J \mapsto E - J$.

Δεν θα έχουμε πολλά να πούμε για τους τελεστές που είναι δυϊκοί στις απλές ακίδες. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στις εργασίες [91, 92, 90, 93] για περισσότερες πληροφορίες. Όπως είδαμε, τα γιγάντια μαγνόνια είναι δυϊκά στις καταστάσεις ενός μαγνονίου του $\mathfrak{su}(2)$ τομέα της $\mathcal{N}=4$ SYM, που είναι οι στοιχειώδεις διεγέρσεις πάνω από τη σιδηρομαγνητική βασική κατάσταση $\mathrm{Tr}\mathcal{Z}^J$ της $\mathrm{XXX}_{1/2}$ αλυσίδας σπίν του Heisenberg. Όπως πρόκειται να δούμε με περισσότερες λεπτομέρειες παρακάτω, οι δυϊκές καταστάσεις της θεωρίας χορδών για τους BPS τελεστές $\mathrm{Tr}\mathcal{Z}^J$, είναι σημειακές χορδές που περιστρέφονται γύρω από τον ισημερινό της δισδιάστατης σφαίρας στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ με άπειρη στροφορμή J. Ανάλογη είναι και η διατύπωση στην περίπτωση των απλών ακίδων: οι απλές ακίδες στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ είναι στοιχειώδεις διεγέρσεις πάνω από την αντισιδηρομαγνητική βασική κατάσταση $\mathrm{Tr}\mathbb{S}^{L/2}$ μιας $\mathfrak{so}(6)$ αλυσίδας σπίν της $\mathcal{N}=4$ SYM, όπου $\mathbb{S}$ είναι οι τελεστές $\mathbb{S} \sim \mathcal{X}\overline{\mathcal{X}} + \mathcal{Y}\overline{\mathcal{Y}} + \mathcal{Z}\overline{\mathcal{Z}}$ της $\mathcal{N}=4$ SYM και $L \equiv J + M$. Το αντισιδηρομαγνητικό κενό είναι με τη σειρά του δυϊκό προς μία χορδή που θα ονομάσουμε «στεφάνη» ("hoop"), χορδή που ηρεμεί τυλιγμένη γύρω από τον ισημερινό της S^2. Ο μετασχηματισμός $\tau \leftrightarrow \sigma$ μπορεί ξανά να χρησιμοποιηθεί για να μεταβούμε από τη μία λύση στην άλλη.

Σε αντίθεση με τη σιδηρομαγνητική βασική κατάσταση $\text{Tr}\mathcal{Z}^J$, που έχει τον ελάχιστο αριθμό μαγνονίων και καταλαμβάνει τον «πυθμένα» του φάσματος της $\mathcal{N}=4$ SYM, οι τελεστές $\text{Tr}\mathbb{S}^{L/2}$ καταλαμβάνουν την κορυφή του φάσματος καθώς ο αριθμός μαγνονίων τους είναι συγκρίσιμος με το μήκος του τελεστή. Οι χορδές που είναι δυϊκές στην (αντι-)σιδηρομαγνητική βασική κατάσταση (τη στεφάνη και τη σημειακή χορδή αντίστοιχα) αναμένεται να είναι ασταθείς. Οι ασταθείς απλές ακίδες και οι στεφάνες μπορούν να σταθεροποιηθούν με πολλούς τρόπους, π.χ. προσθέτοντας επιπλέον στροφορμές [94].

Η αστάθεια/ευστάθεια των γιγάντιων μαγνονίων (ευσταθή) και των απλών ακίδων (ασταθείς) μπορεί ακόμη να συναχθεί και από την ευσταθή/ασταθή συμπεριφορά της προβολής Pohlmeyer αυτών. Όπως είδαμε στην §3.2, κάθε χορδή στον $\mathbb{R}\times\text{S}^2$ μπορεί να απεικονισθεί σε μια λύση της εξίσωσης sine-Gordon. Αποδεικνύεται ότι τα γιγάντια μαγνόνια HM είναι δυϊκά προς το ευσταθές σολιτόνιο της εξίσωσης sine-Gordon, ενώ οι απλές ακίδες άπειρης ορμής είναι δυϊκές προς μια ασταθή λύση της εξίσωσης sG.

Η εικόνα Pohlmeyer των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων μπορεί ακόμη να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό των πινάκων σκέδασής τους. Χάρη στην παραγοντοποίηση του τομέα $\mathfrak{su}(2)$, μπορούμε να λάβουμε υπόψη μας μόνο τη σκέδαση μεταξύ δύο σωματιδίων. Για τα γιγάντια μαγνόνια ο S-πίνακας που υπολογίζεται από την αναγωγή Pohlmeyer συμπίπτει με το όριο ισχυρή σύζευξης του μαγνονικού S-πίνακα. Αυτό αποτελεί μία ακόμη απόδειξη ότι τα μαγνόνια και τα γιγάντια μαγνόνια είναι δυϊκά κάτω από την αντιστοιχία AdS/CFT [50]. Η σκέδαση των απλών ακίδων με άπειρη ορμή μελετήθηκε στις εργασίες [95] και η αντίστοιχη μετατόπιση φάσης βρέθηκε ίση (ως προς τους μη λογαριθμικούς όρους) με εκείνη των μαγνονίων και των γιγάντιων μαγνονίων. Ο Okamura [93] ερμήνευσε αυτό το αποτέλεσμα θεωρώντας τη σκέδαση μεταξύ απλών ακίδων ως παραγοντοποιημένη σκέδαση μεταξύ απείρου το πλήθος γιγάντιων μαγνονίων. Στη εργασία [2] δείχθηκε πως αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει μέσω της αναγωγής Pohlmeyer.

Ας καταστρώσουμε τώρα το φορμαλισμό που θα μας επιτρέψει να μελετήσουμε τα γιγάντια μαγνόνια και τις απλές ακίδες. Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο γενικό ansatz μιας χορδής στον $\mathbb{R}\times\text{S}^2\subset\text{AdS}_5\times\text{S}^5$:

$$\Big\{t=t\left(\tau,\sigma\right),\,\rho=\theta=\phi_1=\phi_2=0\Big\}\times\Big\{\bar{\theta}_1=\theta\left(\tau,\sigma\right),\,\bar{\phi}_1=\phi\left(\tau,\sigma\right),\,\bar{\theta}_2=\bar{\phi}_2=\bar{\phi}_3=0\Big\}, \tag{6.9}$$

και την αλλαγή μεταβλητής

$$z\left(\tau,\sigma\right)=R\,\sin\theta\left(\tau,\sigma\right), \tag{6.10}$$

έτσι ώστε $z\in[-R,R]$ και $\phi\in[0,2\pi)$. Οι συντεταγμένες εμβάπτισης (3.1) της χορδής γράφονται:

$$Y_{05}=Y_0+i\,Y_5=R\,e^{i\,t(\tau,\sigma)} \quad \& \quad X_{12}=X_1+iX_2=\sqrt{R^2-z^2\left(\tau,\sigma\right)}\cdot e^{i\,\phi(\tau,\sigma)} \tag{6.11}$$

$$Y_{12}=Y_{34}=0 \qquad\qquad X_{34}=X_3=z\left(\tau,\sigma\right),\quad X_4=X_{56}=0. \tag{6.12}$$

Η σύμμορφη βαθμίδα ($\gamma_{ab}=\eta_{ab}$) της δράσης Polyakov για τη χορδή δίνεται από

$$S_P=\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}\int d\tau d\sigma\bigg\{-\left(\dot{t}^2-t'^2\right)+\frac{\dot{z}^2-z'^{\,2}}{R^2-z^2}+\frac{1}{R^2}\left(R^2-z^2\right)\left(\dot{\phi}^2-\phi'^{\,2}\right)\bigg\}. \tag{6.13}$$

Στη στατική βαθμίδα $t=\tau$, λαμβάνεται το ακόλουθο σετ από συνδέσμους Virasoro (3.11)–(3.12):

$$\dot{X}^i\dot{X}^i+\acute{X}^i\acute{X}^i=\frac{R^2}{R^2-z^2}\left(\dot{z}^2+z'^{\,2}\right)+\left(R^2-z^2\right)\left(\dot{\phi}^2+\phi'^{\,2}\right)=R^2 \tag{6.14}$$

$$\dot{X}^i \acute{X}^i = \frac{R^2\, \dot{z} z'}{R^2 - z^2} + \left(R^2 - z^2\right) \dot{\phi}\phi' = 0. \tag{6.15}$$

Σύμφωνα με τα όσα είπαμε στην §3.2, το κλασικό σίγμα μοντέλο για τις χορδές στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ μπορεί να απεικονιστεί στην εξίσωση sine-Gordon μέσω της αναγωγής Pohlmeyer. Αν ορίσουμε το πεδίο ψ ως

$$\dot{X}^i \dot{X}^i - \acute{X}^i \acute{X}^i = \frac{R^2}{R^2 - z^2}\left(\dot{z}^2 - z'^{\,2}\right) + \left(R^2 - z^2\right)\left(\dot{\phi}^2 - \phi'^{\,2}\right) = R^2 \cos 2\psi, \tag{6.16}$$

τότε το ψ θα πρέπει να ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση sine-Gordon (sG):

$$\ddot{\psi} - \psi'' + \frac{1}{2}\sin 2\psi = 0. \tag{6.17}$$

Επιβάλλουμε επίσης και τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες στην κίνηση της χορδής εντός του $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$:

$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \varphi\left(r,\tau\right) - \varphi\left(-r,\tau\right)\,, \quad \Delta z = z\left(r,\tau\right) - z\left(-r,\tau\right) = 0, \tag{6.18}$$

όπου p είναι η διατηρούμενη στροφορμή και $\pm r$ είναι τα άκρα της ανοιχτής χορδής επί του κοσμικού φύλλου, ήτοι $\sigma \in [-r, r]$. Τα διατηρούμενα φορτία της χορδής δίδονται από:

$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \int_{-r}^{+r} \varphi'\, d\sigma \tag{6.19}$$

$$E = \left|\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right| = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\int_{-r}^{+r} \dot{t}\, d\sigma = \frac{r\sqrt{\lambda}}{\pi} \tag{6.20}$$

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi R^2}\int_{-r}^{+r} \left(R^2 - z^2\right)\dot{\phi}\, d\sigma. \tag{6.21}$$

Η παρούσα ενότητα οργανώνεται ως εξής. Στην §6.1 παρουσιάζουμε τα απείρου μεγέθους γιγάντια μαγνόνια των Hofman και Maldacena. Στην §6.2 παρουσιάζεται η απλή ακίδα με άπειρο μέγεθος/ορμή (εντός του $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$). Στην §6.3 μελετάμε τη σκέδαση και τις δέσμιες καταστάσεις των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων απείρου μεγέθους.

6.1 Γιγάντιο Μαγνόνιο Hofman-Maldacena (HM)

Το γιγάντιο μαγνόνιο των Hofman και Maldacena (με άπειρο μέγεθος) λαμβάνεται αν θέσουμε

$$\overline{\theta}_1 = \theta\left(\sigma - \upsilon\tau\right) \quad \& \quad \overline{\phi}_1 = \tau + \varphi\left(\sigma - \upsilon\tau\right) \tag{6.22}$$

στο ansatz (6.9), οπότε βρίσκουμε (στη στατική βαθμίδα $t = \tau$):

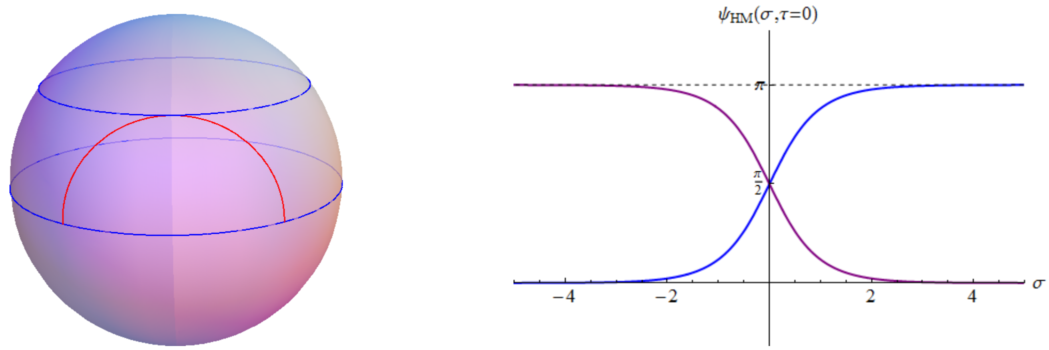
$$\Big\{t = \tau,\, \rho = \theta = \phi_1 = \phi_2 = 0\Big\} \times \Big\{\overline{\theta}_1 = \theta\left(\sigma - \upsilon\tau\right), \overline{\phi}_1 = \tau + \varphi\left(\sigma - \upsilon\tau\right), \overline{\theta}_2 = \overline{\phi}_2 = \overline{\phi}_3 = 0\Big\}, \tag{6.23}$$

όπου υ είναι η ταχύτητα του γιγάντιου μαγνονίου. Εισάγοντας,

$$z = z\left(\sigma - \upsilon\tau\right) \quad \& \quad \phi = \tau + \varphi\left(\sigma - \upsilon\tau\right) \tag{6.24}$$

στους συνδέσμους Virasoro (6.14)–(6.15), παίρνουμε:

$$\varphi' = \frac{\upsilon}{1 - \upsilon^2}\cdot\frac{z^2}{R^2 - z^2}\,, \quad \upsilon \neq 1 \tag{6.25}$$



Σχήμα 12: Ένα γιγάντιο μαγνόνιο Hofman-Maldacena με $v = 0.8$ (αριστερά) και η αναγωγή Pohlmeyer (6.31) αυτού (δεξιά).

$$z'^{\,2} = \frac{z^2\left(\zeta_v^2 - z^2\right)}{R^2\left(1-v^2\right)^2}\,, \quad \zeta_v^2 \equiv R^2\left(1-v^2\right). \tag{6.26}$$

Οι εξισώσεις (6.25)–(6.26) έχουν την ακόλουθη λύση:

$$z\left(\tau,\sigma\right) = R\sin\theta\left(\tau,\sigma\right) = \frac{R}{\gamma}\,\text{sech}\Big[\gamma\left(\sigma - v\tau\right)\Big], \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{6.27}$$

$$\phi\left(\tau,\sigma\right) = \tau + \arctan\left[\frac{1}{\gamma\,v}\tanh\gamma\left(\sigma - v\tau\right)\right]. \tag{6.28}$$

Το διάγραμμα ενός γιγάντιου μαγνονίου HM (6.27)–(6.28) με $v = 0.8$ μπορεί να βρεθεί στα δεξιά του σχήματος 12. Οι δύο άκρες του γιγάντιου μαγνονίου ακουμπούν στον ισημερινό και κινούνται με την ταχύτητα του φωτός, ενώ η χορδή περιστρέφεται στερεά επί της δισδιάστατης σφαίρας.

Όπως έχουμε ήδη εξηγήσει, τόσο η διατηρούμενη ενέργεια όσο και η στροφορμή (6.20)–(6.21) του γιγάντιου μαγνονίου αποκλίνουν, ενώ η διαφορά τους παραμένει σταθερή:

$$\left.\begin{aligned}
&p = 2\arcsin\sqrt{1-v^2} \Rightarrow v = \cos p/2\\
&\mathcal{E} \equiv \pi E/\sqrt{\lambda} = \sqrt{1-v^2}\cdot\mathbb{K}\left(1\right) = \infty\\
&\mathcal{J} \equiv \pi J/\sqrt{\lambda} = \sqrt{1-v^2}\cdot\Big[\mathbb{K}\left(1\right) - 1\Big] = \infty
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{E} - \mathcal{J} = \sqrt{1-v^2} = \sin\frac{p}{2}. \tag{6.29}$$

Το γεγονός ότι στο δενδροειδές επίπεδο η σχέση διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων απείρου μεγέθους (6.29) είναι η ίδια με το όριο ισχυρής σύζευξης (6.5) της αντίστοιχης σχέσης διασποράς των τελεστών ενός μαγνονίου (6.1) της $\mathcal{N} = 4$ SYM, συνεπάγεται ότι τα μαγνόνια και τα γιγάντια μαγνόνια θα πρέπει να αποτελούν δυϊκές καταστάσεις της AdS/CFT. Πιο κάτω θα παρουσιάσουμε περισσότερα στοιχεία για αυτή την δυαδικότητα, υπολογίζοντας τον S-πίνακα των γιγάντιων μαγνονίων και δείχνοντας ότι αυτός συμπίπτει με το όριο ισχυρής σύζευξης του S-πίνακα των μαγνονίων. Για να το κάνουμε αυτό, θα πρέπει να γνωρίζουμε την αναγωγή Pohlmeyer των γιγάντιων μαγνονίων.

Για να προσδιορίσουμε τη λύση της εξίσωσης sine-Gordon που αντιστοιχεί στην αναγωγή Pohlmeyer του γιγάντιου μαγνονίου των HM (6.27)–(6.28), εισάγουμε το ansatz (6.23) και τους δύο συνδέσμους Virasoro (6.25)–(6.26) στην εξίσωση (6.16). Βρίσκουμε τότε

$$\sin^2\psi = \frac{z^2}{\zeta_v^2} = \frac{z^2}{R^2\left(1-v^2\right)}, \tag{6.30}$$

η οποία έχει την ακόλουθη λύση:

$$\psi\left(\tau,\sigma\right)=2\arctan e^{\pm\gamma(\sigma-\upsilon\tau)}=\arcsin\operatorname{sech}\left[\gamma\left(\sigma-\upsilon\tau\right)\right] \tag{6.31}$$

και αντιστοιχεί στη λύση σολιτονίου/αντισολιτονίου της εξίσωσης sG (βλέπε π.χ. [96]). Το διάγραμμα της (6.31) μπορεί να βρεθεί στα δεξιά του σχήματος 12. Στην ιδιάζουσα περίπτωση $\upsilon=1$, οι δύο σύνδεσμοι (6.25)–(6.26) γράφονται

$$z=0 \quad \& \quad \varphi'\left(1-\varphi'\right)=0, \tag{6.32}$$

οδηγώντας στις ακόλουθες δύο λύσεις:

$$z=0 \quad \& \quad \phi=\tau+c \quad ή \quad \phi=\sigma+c. \tag{6.33}$$

Η πρώτη αντιπροσωπεύει μία σημειακή χορδή που περιστρέφεται στον ισημερινό της δισδιάστατης σφαίρας και είναι δυϊκή στον BPS τελεστή $\text{Tr}\mathcal{Z}^J$ του τομέα $\mathfrak{su}\left(2\right)$ της $\mathcal{N}=4$ SYM. Η δεύτερη είναι η «στεφάνη», μία στάσιμη χορδή που είναι τυλιγμένη γύρω από τον ισημερινό της δισδιάστατης σφαίρας και είναι δυϊκή στους τελεστές $\text{Tr}\mathbb{S}^{L/2}$ της $\mathcal{N}=4$ SYM, όπου $\mathbb{S}$ είναι οι τελεστές $\mathbb{S}\sim\mathcal{X}\overline{\mathcal{X}}+\mathcal{Y}\overline{\mathcal{Y}}+\mathcal{Z}\overline{\mathcal{Z}}$. Είναι σχετικά απλό να υπολογίσουμε τα διατηρούμενα φορτία και τη σχέση διασποράς τόσο της σημειακής χορδής όσο και της χορδής hoop («στεφάνη»):

$$\mathcal{E}=\mathcal{J},\ p=0 \quad (\text{Σημειακή Χορδή}) \quad \& \quad \mathcal{E}=\frac{p}{2},\ \mathcal{J}=0 \quad (\text{Στεφάνη}). \tag{6.34}$$

Οι αντίστοιχες αναγωγές Pohlmeyer είναι επίσης απλό να ληφθούν από τις σχέσεις (6.16)–(6.33) και δίνουν, $\psi=0$ για τη σημειακή χορδή και $\psi=\pi/2$ για τη στεφάνη.

6.2 Απλές Ακίδες Άπειρης Ορμής

Για άπειρη ορμή/περιέλιξη, οι απλές ακίδες (single spikes) λαμβάνονται θέτοντας

$$\overline{\theta}_1=\theta\left(\sigma-\omega\tau\right) \quad \& \quad \overline{\phi}_1=\omega\tau+\varphi\left(\sigma-\omega\tau\right) \tag{6.35}$$

στην (6.9), η οποία οδηγεί (στατική βαθμίδα, $t=\tau$):

$$\Big\{t=\tau,\ \rho=\theta=\phi_1=\phi_2=0\Big\}\times\Big\{\overline{\theta}_1=\theta\left(\sigma-\omega\tau\right),\overline{\phi}_1=\omega\tau+\varphi\left(\sigma-\omega\tau\right),\overline{\theta}_2=\overline{\phi}_2=\overline{\phi}_3=0\Big\} \tag{6.36}$$

όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα της απλής ακίδας. Αν θέσουμε

$$z=z\left(\sigma-\omega\tau\right) \quad \& \quad \phi=\omega\tau+\varphi\left(\sigma-\omega\tau\right) \tag{6.37}$$

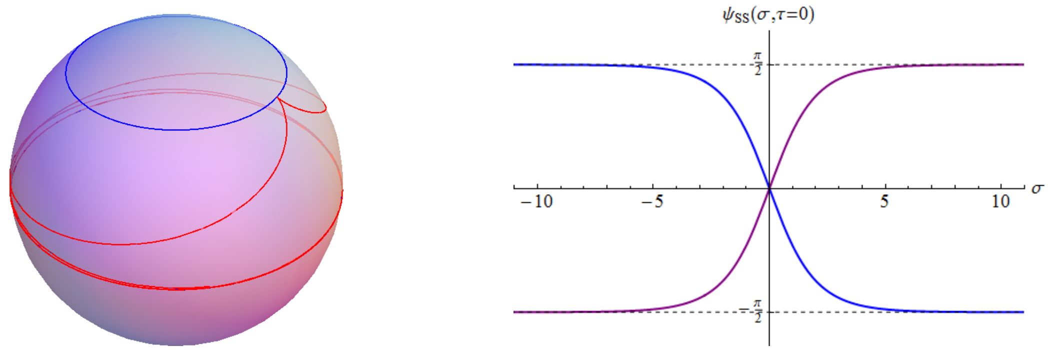
στις εξισώσεις των συνδέσμων (6.14)–(6.15), λαμβάνουμε:

$$\varphi'=\frac{\omega^2}{1-\omega^2}\cdot\frac{z^2-\zeta_\omega^2}{R^2-z^2}, \quad \omega\neq1 \tag{6.38}$$

$$z'^{\,2}=\frac{\omega^2}{R^2\left(1-\omega^2\right)^2}\cdot z^2\left(\zeta_\omega^2-z^2\right), \quad \zeta_\omega^2\equiv R^2\left[1-\frac{1}{\omega^2}\right]. \tag{6.39}$$

Για $\omega=1$, παίρνουμε τις εξισώσεις (6.32)–(6.33) για τη σημειακή χορδή ή τη στεφάνη. Για $\omega\neq1$, οι εξισώσεις (6.38)–(6.39) έχουν την ακόλουθη λύση:

$$z\left(\tau,\sigma\right)=R\sin\theta\left(\tau,\sigma\right)=R\sqrt{1-\frac{1}{\omega^2}}\cdot\operatorname{sech}\left(\frac{\sigma-\omega\tau}{\sqrt{\omega^2-1}}\right) \tag{6.40}$$



Σχήμα 13: Απλή ακίδα απείρου μεγέθους με $\omega = 1.6$ (αριστερά) και η εικόνα Pohlmeyer (6.44) αυτής (δεξιά).

$$\phi\,(\tau,\sigma) = \sigma - \arctan\left[\sqrt{\omega^2-1}\tanh\left(\frac{\sigma-\omega\tau}{\sqrt{\omega^2-1}}\right)\right]. \tag{6.41}$$

Το διάγραμμα μιας απλής ακίδας με άπειρη ορμή (6.40)–(6.41) και $\omega = 1.6$ έχει σχεδιαστεί στα αριστερά του σχήματος 13. Η απλή ακίδα έχει τυλιχθεί γύρω από τον ισημερινό της δισδιάστατης σφαίρας και περιστρέφεται στερεά γύρω της.

Η διατηρούμενη ορμή και ενέργεια (6.19)–(6.20) των απλών ακίδων άπειρης ορμής αποκλίνουν ενώ η διαφορά τους παραμένει πεπερασμένη ($\mathcal{E} \equiv \pi E/\sqrt{\lambda}$, $\mathcal{J} \equiv \pi J/\sqrt{\lambda}$):

$$\left.\begin{aligned} & p = 2\left[\sqrt{\omega^2-1}\cdot\mathbb{K}\,(1) - \arcsin\sqrt{1-1/\omega^2}\right] = \infty \\ & \mathcal{E} = \sqrt{\omega^2-1}\cdot\mathbb{K}\,(1) = \infty \\ & \mathcal{J} = \sqrt{1-1/\omega^2} \leq 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{E} - \frac{p}{2} = \arcsin\sqrt{1-\frac{1}{\omega^2}} = \arcsin\mathcal{J}. \tag{6.42}$$

Για να μελετήσουμε τη σκέδαση μεταξύ απλών ακίδων θα πρέπει να γνωρίζουμε την αναγωγή Pohlmeyer αυτών. Αν εισαγάγουμε το ansatz (6.36) και τους συνδέσμους Virasoro (6.38)–(6.39) στην (6.16), βρίσκουμε

$$\sin^2\psi = 1 - \frac{z^2}{\zeta_\omega^2}. \tag{6.43}$$

Επομένως η αναγωγή Pohlmeyer για την απλή ακίδα είναι:

$$\psi\,(\tau,\sigma) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan e^{\pm(\sigma-\omega\tau)/\sqrt{\omega^2-1}} = \arcsin\tanh\left[\frac{\sigma-\omega\tau}{\sqrt{\omega^2-1}}\right] \tag{6.44}$$

και αντιστοιχεί σε μια ασταθή λύση της εξίσωσης sine-Gordon. Το διάγραμμα της (6.44) για μία απλή ακίδα απείρου μεγέθους με $\omega = 1.6$, μπορεί να βρεθεί στα δεξιά του σχήματος 13.

Όπως αναφέραμε ήδη στη εισαγωγή αυτής της ενότητας, υπάρχει ένας μετασχηματισμός που επιτρέπει να μεταβούμε από τα γιγάντια μαγνόνια απείρου μεγέθους στις αντίστοιχες απλές ακίδες. Η συμμετρία $\tau \leftrightarrow \sigma$ («δισδιάστατη δυαδικότητα») [90],

$$\tau \leftrightarrow \sigma\,,\; v \leftrightarrow \frac{1}{\omega}\,,\; \psi \leftrightarrow \left[\frac{\pi}{2} - \psi\right] \quad \Leftrightarrow \quad \text{Γιγάντια Μαγνόνια} \leftrightarrow \text{Απλές Ακίδες}. \tag{6.45}$$

μετασχηματίζει τις λύσεις των γιγάντιων μαγνονίων (6.27)–(6.28) και την αναγωγή Pohlmeyer αυτών (6.31) σε εκείνες των απλών ακίδων, (6.40)–(6.41) και (6.44). Ο μετασχηματισμός $\tau \leftrightarrow \sigma$ μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να μεταβούμε από τη σημειακή χορδή στη στεφάνη (6.33). Όπως πρόκειται να δούμε παρακάτω, η δισδιάστατη δυαδικότητα (6.45) ισχύει και για τα γιγάντια μαγνόνια και για τις απλές ακίδες πεπερασμένου μεγέθους.

Προκειμένου να μεταβούμε από τη σχέση διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων σε εκείνη των απλών ακίδων, θα πρέπει να εφαρμόσουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό:

$$\mathcal{E} - \frac{p}{2} \mapsto \frac{p}{2} \quad \& \quad \mathcal{J} \mapsto \mathcal{E} - \mathcal{J} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Απλές Ακίδες} \mapsto \text{Γιγάντια Μαγνόνια}. \tag{6.46}$$

Ο μετασχηματισμός (6.46) απεικονίζει τη σχέση ενέργειας-ορμής (6.42) στην (6.29). Η σχέση (6.46) ισχύει επίσης και για τις σχέσεις διασποράς της σημειακής χορδής και της στεφάνης (6.34).

6.3 Δέσμιες Καταστάσεις & Σκέδαση

6.3.1 Σκέδαση

Οι εικόνες sine-Gordon των γιγάντιων μαγνονίων (απείρου μεγέθους) και των απλών ακίδων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουμε τους S-πίνακές τους και να μελετήσουμε τις δέσμιες καταστάσεις τους. Ας ξεκινήσουμε θεωρώντας τη σκέδαση μεταξύ γιγάντιων μαγνονίων.

Ακολουθώντας τους Hofman και Maldacena [50], μπορούμε να μελετήσουμε τις αναγωγές Pohlmeyer των γιγάντιων μαγνονίων οι οποίες συμπίπτουν με τις λύσεις σολιτονίου/αντισολιτονίου της εξίσωσης sine-Gordon (6.31). Είναι κάπως περισσότερο βολικό να θεωρήσουμε τη λύση σολιτονίου-αντισολιτονίου, παρότι το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί από οποιαδήποτε εκ των υπολειπόμενων λύσεων σκέδασης 2 σολιτονίων της sG, ήτοι τη λύση σολιτονίου-αντισολιτονίου και τη λύση αντισολιτονίου-αντισολιτονίου. Η λύση σολιτονίου-αντισολιτονίου της εξίσωσης sG (6.17) είναι (βλέπε π.χ. [96]):

$$\tan\frac{\psi_{\text{s-a}}}{2} = \frac{\sinh\left(v\gamma\tau\right)}{v\cosh\gamma\sigma} = \frac{1}{v}\cdot\frac{e^{v\gamma\tau} - e^{-v\gamma\tau}}{e^{\gamma\sigma} + e^{-\gamma\sigma}}. \tag{6.47}$$

Η λύση (6.47) περιγράφει δύο σολιτόνια που βρίσκονται αρχικά στις θέσεις $\sigma = \pm\infty$ όταν $\tau = -\infty$, μετά αρχίζουν να πλησιάζουν το ένα το άλλο, αλληλεπιδρούν και καταλήγουν στην αντίθετη πλευρά $\sigma = \mp\infty$, όταν $\tau = +\infty$. Η αναγωγή Pohlmeyer $\psi_{\text{s-a}}$, όπως επίσης και η αντίστοιχη πυκνότητα ενέργειας $dE_{\text{s-a}}/d\sigma$ για τη σκέδαση δύο γιγάντιων μαγνονίων με $v = 0.5$, έχουν σχεδιαστεί στα αριστερά διαγράμματα των σχημάτων 14–15 αντίστοιχα.

Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε τη χρονική καθυστέρηση δύο σολιτονίων στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας τους καθώς σκεδάζονται. Συγκρίνοντας τις τιμές της (6.47) στα $\sigma = \pm\infty$, $\tau = \pm\infty$, βρίσκουμε

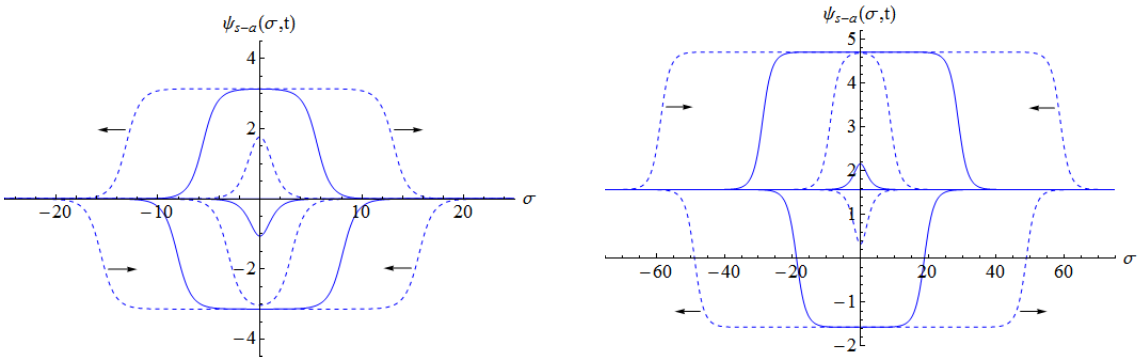
$$\Delta T_{\text{cm}} = \frac{2\sqrt{1-v^2}}{v}\cdot\ln v, \tag{6.48}$$

όπου $0 \le v \le 1$ είναι η ταχύτητα του σολιτονίου στο σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας. Η εξίσωση (6.48) μπορεί να μετασχηματισθεί στο σύστημα αναφοράς όπου τα δύο σολιτόνια έχουν αυθαίρετες ταχύτητες v_1 και v_2. Το αποτέλεσμα είναι:

$$\Delta T_{12} = \frac{2}{v_1\gamma_1}\cdot\ln v = \tan\frac{p_1}{2}\cdot\ln\left[\frac{1-\cos\frac{p_1-p_2}{2}}{1-\cos\frac{p_1+p_2}{2}}\right], \qquad \begin{array}{l} v_i = \tanh\hat{\theta}_i = \cos p_i/2 \\ \gamma_i = \cosh\hat{\theta}_i = \csc p_i/2 \end{array}, \tag{6.49}$$

όπου $\hat{\theta}_i$ είναι η ωκύτητα (rapidity) του σολιτονίου $i = 1, 2$ και $v = \tanh(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2/2)$. Η μέθοδος για τον υπολογισμό της μετατόπισης φάσης στην κβαντική θεωρία πεδίου γίνεται σύμφωνα με την εργασία [97] των Jackiw και Woo:

$$\Delta T_{12} = \frac{\partial\delta_{12}}{\partial\epsilon_1}, \tag{6.50}$$



Σχήμα 14: Λύση sine-Gordon για τη σκέδαση σολιτονίου-αντισολιτονίου που αντιστοιχεί σε δύο γιγάντια μαγνόνια με $v = 0.5$ (αριστερά) και δύο απλές ακίδες με $\omega = 2$ (δεξιά).

όπου $\epsilon_1 = \sin p/2$ είναι η ενέργεια ενός εκ των σολιτονίων. Εισάγοντας την (6.49) στην (6.50), βρίσκουμε:

$$\delta_{12} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\left\{\left(\cos\frac{p_2}{2} - \cos\frac{p_1}{2}\right)\ln\left[\frac{1-\cos\frac{p_1-p_2}{2}}{1-\cos\frac{p_1+p_2}{2}}\right] - p_1\sin\frac{p_1}{2}\right\}. \tag{6.51}$$

Ο τελευταίος όρος της (6.51) εξαρτάται από τη βαθμίδα του κοσμικού φύλλου που έχουμε επιλέξει και τον ορισμό της χωρικής συντεταγμένης σ. Αν επιλέγαμε μια βαθμίδα για την οποία $dJ/d\sigma =$ σταθ., αντί μίας για την οποία $dE/d\sigma =$ σταθ., θα μπορούσαμε να φροντίσουμε ώστε ο τελευταίος όρος της (6.51) να απαλειφθεί και η μετατόπιση φάσης να γίνει, για $\sin p_{1,2}/2 > 0$:

$$\delta_{12} = \delta\left(p_1, p_2\right) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\left(\cos\frac{p_1}{2} - \cos\frac{p_2}{2}\right)\ln\left[\frac{\sin^2\frac{p_1-p_2}{4}}{\sin^2\frac{p_1+p_2}{4}}\right]. \tag{6.52}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι η μετατόπιση φάσης (6.52) ισούται με την αντίστοιχη διαφορά της dressing φάσης δύο μαγνονίων σε ισχυρή σύζευξη,

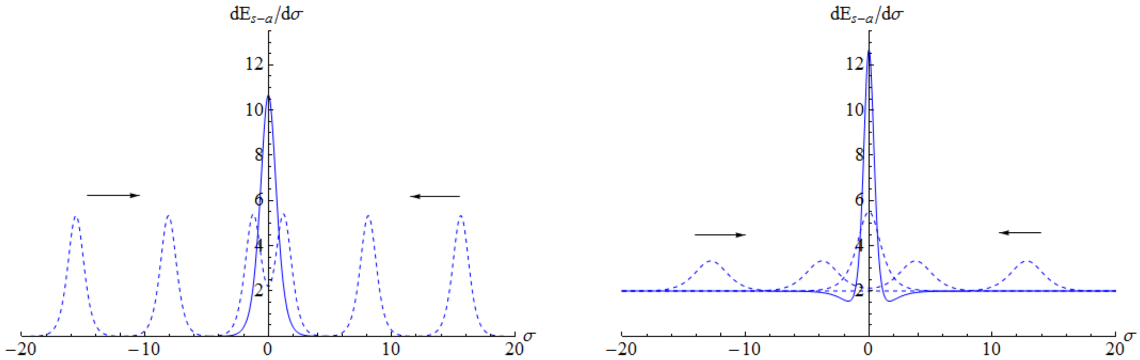
$$\sigma^2_{12(\mathrm{AFS})} = e^{i\delta_{12}} \tag{6.53}$$

που είναι γνωστή και ως φάση AFS. Δεν έχουμε το χρόνο για να παρουσιάσουμε την απόδειξη της εξίσωσης (6.52) από τη φάση των AFS εδώ, έτσι παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στην εργασία [98] για τις λεπτομέρειες.

Ένας άλλος τρόπος για να υπολογίσουμε τη μετατόπιση φάσης του γιγάντιου μαγνονίου (6.51)–(6.52) είναι χρησιμοποιώντας τη συγκεκριμένη λύση του σίγμα μοντέλου των χορδών επί του $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ που περιγράφει τη σκέδαση μεταξύ δύο γιγάντιων μαγνονίων. Αυτό διεκπεραιώθηκε στην εργασία [99], όπου η λύση για τη σκέδαση δύο γιγάντιων μαγνονίων κατασκευάστηκε με βάση την αποκαλούμενη μέθοδο «ένδυσης» ("dressing"), η οποία ξεκινά από τη σημειακή χορδή (6.33) στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ και διαδοχικά κατασκευάζει όλο και πιο περίπλοκες χορδές εντός του $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$. Με παρόμοιο τρόπο μπορεί κανείς να «ντύσει» τη στεφάνη (6.33) και να βρει τη λύση για τη σκέδαση μεταξύ δύο απλών ακίδων, από την οποία η μετατόπιση φάσης της απλής ακίδας μπορεί να υπολογιστεί. Αυτό έγινε στην εργασία [95] και το αποτέλεσμα είναι:

$$\delta\left(q_1, q_2\right) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\left\{\left(\cos\frac{q_1}{2} - \cos\frac{q_2}{2}\right)\ln\left[\frac{\sin^2\frac{q_1-q_2}{4}}{\sin^2\frac{q_1+q_2}{4}}\right] - q_1\sin\frac{q_1}{2}\right\}, \tag{6.54}$$

όπου το q ορίζεται ως $\mathcal{J} = \left(1 - 1/\omega^2\right)^{1/2} \equiv \sin q/2$, ενώ το ω και το $\mathcal{J}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα και η διατηρούμενη στροφορμή της ακίδας αντίστοιχα. Για $p \leftrightarrow q$, η (6.54) εμφανώς συμφωνεί με τη



Σχήμα 15: Πυκνότητα ενέργειας της σκέδασης σολιτονίου-αντισολιτονίου που αντιστοιχεί σε δύο γιγάντια μαγνόνια με $v = 0.5$ (αριστερά) και δύο απλές ακίδες με $\omega = 2$ (δεξιά).

μετατόπιση φάσης του γιγάντιου μαγνονίου (6.52) που υπολογίσαμε πιο πάνω, μέχρι τον μη λογαριθμικό όρο $q \sin q/2$ που έχει αντίθετο πρόσημο. Μια ποιοτική εξήγηση για τη σύμπτωση των λογαριθμικών όρων των (6.51)–(6.54), δόθηκε από τον Okamura στην εργασία [93], όπου η σκέδαση μεταξύ δύο απλών ακίδων ειδώθηκε ως παραγοντοποιημένη σκέδαση μεταξύ απείρου πλήθους γιγάντιων μαγνονίων.

Μια απλούστερη εξαγωγή της μετατόπισης φάσης της απλής ακίδας δόθηκε στην εργασία [2] χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\tau \leftrightarrow \sigma$ (6.45).[34] Σε γενικές γραμμές ο μετασχηματισμός $\tau \leftrightarrow \sigma$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετασχηματίσουμε τις λύσεις της εξίσωσης sG που αντιστοιχούν στα γιγάντια μαγνόνια, στις λύσεις της εξίσωσης sG που αντιστοιχούν στις απλές ακίδες. Εν συνεχεία, η μετατόπιση φάσης των απλών ακίδων μπορεί να υπολογισθεί από την εικόνα Pohlmeyer της λύσης για τη σκέδαση των απλών ακίδων αλά Hofman-Maldacena. Να σημειωθεί ότι τόσο οι λογαριθμικοί όσο και οι μη λογαριθμικοί όροι της φόρμουλας για τη μετατόπιση φάσης [2] συμφωνούν με τη μετατόπιση φάσης (6.51) για το γιγάντιο μαγνόνιο.

Ας δούμε τώρα πως δουλεύει η συνταγή της εργασίας [2]. Αυτή τη φορά μας συμφέρει να αρχίσουμε από τη λύση για τη σκέδαση σολιτονίου-σολιτονίου της εξίσωσης sG:

$$\tan \frac{\psi_{\text{s-s}}}{2} = \frac{v \sinh \gamma\sigma}{\cosh v\gamma\tau}. \tag{6.55}$$

Αυτή η λύση της εξίσωσης sG έχει τοπολογικό φορτίο[35] $Q = +2$ και προκύπτει από την αναγωγή Pohlmeyer δύο γιγάντιων μαγνονίων που σκεδάζονται στο σύστημα του κέντρου μάζας τους. Όταν μετασχηματισθεί κατά $\tau \leftrightarrow \sigma$ σύμφωνα με την (6.45), η μετασχηματισμένη λύση

$$\tan \frac{\psi_{\text{s-a}}}{2} = \frac{\omega \cosh \sigma/\sqrt{\omega^2-1} - \sinh \omega\tau/\sqrt{\omega^2-1}}{\omega \cosh \sigma/\sqrt{\omega^2-1} + \sinh \omega\tau/\sqrt{\omega^2-1}}, \tag{6.56}$$

ικανοποιεί την εξίσωση sine-Gordon (6.17) και έχει τοπολογικό φορτίο ίσο προς $Q = 0$, που σημαίνει ότι αντιστοιχεί στη σκέδαση μεταξύ δύο λύσεων που φέρουν αντίθετα τοπολογικά φορτία. Η εξίσωση (6.56) αποτελεί την αναγωγή Pohlmeyer μιας λύσης της θεωρίας χορδών που περιγράφει τη σκέδαση μεταξύ δύο απλών ακίδων στο σύστημα του κέντρου μάζας τους. Στο δεξιό μέρος των σχημάτων 14–15, έχουμε σχεδιάσει την κυματοσυνάρτηση της εξίσωσης sG (6.56) καθώς επίσης και την πυκνότητα ενέργειας αυτής που αντιστοιχεί στη σκέδαση μεταξύ δύο απλών ακίδων με $\omega = 2$. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τις λύσεις της εξίσωσης sG που περιγράφουν τη σκέδαση μεταξύ δύο απλών ακίδων με τα ίδια τοπολογικά φορτία (και συνολικό φορτίο $Q = \pm 2$).

[34] Οι συγγραφείς του [2] ακολούθησαν την υπόδειξη που υπάρχει στην υποσημείωση 2 της αναφοράς [95].

[35] Το τοπολογικό φορτίο Q μιας λύσης της sG ορίζεται ως $Q = 1/\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_\sigma \psi \, d\sigma$.

Έχοντας βρει την αναγωγή Pohlmeyer για τη σκέδαση μεταξύ δύο απλών ακίδων (6.56), μπορούμε να υπολογίσουμε και τη αντίστοιχη μετατόπιση φάσης τους αλά Hofman και Maldacena. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με εκείνο που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις λύσεις για τις οποίες $Q = \pm 2$. Σε ένα σύστημα αναφοράς όπου οι ταχύτητες των δύο λύσεων είναι $v_1 = 1/\omega_1$ και $v_2 = 1/\omega_2$, η καθυστέρηση φάσης βρίσκεται να είναι:

$$\Delta T_{12} = \frac{1}{\gamma_1} \ln v = \sin \frac{q_1}{2} \cdot \ln \left[\frac{1 - \cos \frac{q_1 - q_2}{2}}{1 - \cos \frac{q_1 + q_2}{2}} \right], \quad v = \tanh \left[\frac{\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2}{2} \right], \tag{6.57}$$

όπου $\cosh \hat{\theta}_i \equiv \gamma_i = (1 - v_i^2)^{-1/2} = \csc q_i/2$ για $i = 1, 2$. Η μετατόπιση φάσης για $\sin q_i/2 > 0$ ανακτάται χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα,

$$\Delta T_{12} = \frac{\partial \delta_{12}}{\partial \varepsilon_1}, \quad \varepsilon_i \equiv \mathcal{E}_i - \frac{p_i}{2} = \arcsin \mathcal{J}_i = \frac{q_i}{2}, \quad i = 1, 2. \tag{6.58}$$

Βρίσκουμε:

$$\delta \left(q_1, q_2 \right) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \left\{ \left(\cos \frac{q_2}{2} - \cos \frac{q_1}{2} \right) \ln \left[\frac{\sin^2 \frac{q_1 - q_2}{4}}{\sin^2 \frac{q_1 + q_2}{4}} \right] - q_1 \sin \frac{q_1}{2} \right\}. \tag{6.59}$$

6.3.2 Δέσμιες Καταστάσεις

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με δύο παραδείγματα του μετασχηματισμού $\sigma \leftrightarrow \tau$ για τις δέσμιες καταστάσεις των απλών ακίδων. Είναι προφανές ότι κάθε λύση της εξίσωσης sG με N σολιτόνια μπορεί να μετασχηματισθεί κατά $\sigma \leftrightarrow \tau$ και να γεννήσει νέες λύσεις με απλές ακίδες. Ένα παράδειγμα αποτελεί η λύση breather (Q = 0),

$$\tan \frac{\psi_b}{2} = \frac{\sin a \gamma_a \tau}{a \, \cosh \gamma_a \sigma}, \quad \gamma_a \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \tag{6.60}$$

η οποία παίρνει την ακόλουθη μορφή κάτω από το μετασχηματισμό $\tau \leftrightarrow \sigma$:

$$\tan \frac{\psi_b}{2} = \frac{\cosh \omega \gamma_\omega \tau - \omega \sin \gamma_\omega \sigma}{\cosh \omega \gamma_\omega \tau + \omega \sin \gamma_\omega \sigma}. \tag{6.61}$$

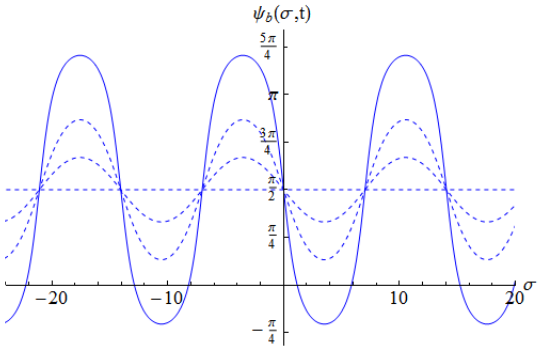
Η (6.61) ικανοποιεί την εξίσωση sine-Gordon (6.17). Για $\omega = 2$ η κυματοσυνάρτησή της έχει σχεδιαστεί στο δεξιό διάγραμμα του σχήματος 16 ενώ το αριστερό διάγραμμα του ίδιου σχήματος απεικονίζει τη γραφική παράσταση της πυκνότητας ενέργειας. Αρχικά η λύση είναι σταθερή και ίση προς $\psi = \pi/2$, μετά το πλάτος της και η ενέργειά της αρχίζουν να αυξάνονται μεταξύ των χρονικών στιγμών $\tau = -\tau_0$ και $\tau = 0$ μέχρι να πάρουν τη μορφή των κυματιστών περιοδικών γραμμών του σχήματος 16, με ακρότατα στις θέσεις $\sigma = k\pi/2\gamma_\omega$. Εν συνεχεία και οι δύο κυματοσυναρτήσεις αρχίζουν να ξαναφθίνουν και λαμβάνουν τη σταθερή αρχική τιμή τους $\psi = \pi/2$, όταν $\tau = \tau_0$.

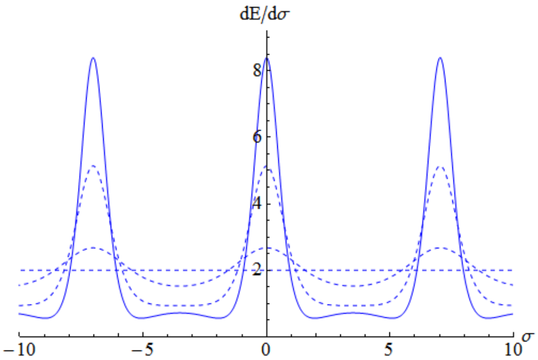
Μια ακόμη σταθερή λύση της sG με 3 σολιτόνια είναι η λεγόμενη λύση "wobble" που περιέχει ένα breather και ένα σολιτόνιο (ή αντισολιτόνιο) [100, 101]:

$$\tan \frac{\psi_w}{2} = \frac{\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \sin a\tau + \frac{e^\sigma}{2} \left(e^{-\sqrt{1-a^2}\sigma} + r_{\rm a}^2 e^{\sqrt{1-a^2}\sigma} \right)}{\cosh \left(\sqrt{1-a^2}\, \sigma \right) + \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} r_{\rm a}\, e^\sigma \sin a\tau}, \quad r_{\rm a} \equiv \frac{1 - \sqrt{1-a^2}}{1 + \sqrt{1-a^2}}. \tag{6.62}$$

Με το μετασχηματισμό $\tau \leftrightarrow \sigma$ η (6.62) γράφεται:

$$\tan \frac{\psi_w}{2} = \frac{\sqrt{\omega^2 - 1} \left(r_\omega e^\tau - 1 \right) \sin \frac{\sigma}{\omega} + \frac{1}{2} \left[\left(1 - e^\tau \right) e^{-\frac{\sqrt{\omega^2-1}}{\omega} \cdot \tau} + \left(1 - r_\omega^2 \, e^\tau \right) e^{\frac{\sqrt{\omega^2-1}}{\omega} \cdot \tau} \right]}{\sqrt{\omega^2 - 1} \left(r_\omega e^\tau + 1 \right) \sin \frac{\sigma}{\omega} + \frac{1}{2} \left[\left(1 + e^\tau \right) e^{-\frac{\sqrt{\omega^2-1}}{\omega} \cdot \tau} + \left(1 + r_\omega^2 \, e^\tau \right) e^{\frac{\sqrt{\omega^2-1}}{\omega} \cdot \tau} \right]}, \tag{6.63}$$





Σχήμα 16: Κυματοσυνάρτηση sine-Gordon (αριστερά) και πυκνότητα ενέργειας (δεξιά) για τη λύση breather των απλών ακίδων (6.61), με $\omega = 2$.

όπου

$$r_\omega \equiv \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - 1}}{\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}}. \tag{6.64}$$

Η λύση (6.63) εμφανίζει και αυτή τις χαρακτηριστικές «εκλάμψεις» των breather (6.61).

7 Μαγνόνια και Απλές Ακίδες Πεπερασμένου Μεγέθους

Οι γενικεύσεις των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων (single spikes) σε πεπερασμένο μέγεθος λαμβάνονται αν εισάγουμε,

$$\theta = \theta\left(\sigma - v\omega\tau\right)\,, \quad \varphi \equiv \phi - \omega\,\tau = \varphi\left(\sigma - v\omega\tau\right) \tag{7.1}$$

στο ansatz (6.9), έτσι ώστε στη στατική βαθμίδα $t = \tau$, η (6.9) να γράφεται:

$$\Big\{t = \tau,\, \rho = \theta = \phi_1 = \phi_2 = 0\Big\} \times \Big\{\bar{\theta}_1 = \theta\left(\sigma - v\omega\tau\right), \bar{\phi}_1 = \omega\,\tau + \varphi\left(\sigma - v\omega\tau\right), \bar{\theta}_2 = \bar{\phi}_2 = \bar{\phi}_3 = 0\Big\} \tag{7.2}$$

Τα γιγάντια μαγνόνια και οι απλές ακίδες πεπερασμένου μεγέθους είναι ανοικτές χορδές εντός του $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ που περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα ω και ταυτόχρονα μετατοπίζονται με φασική ταχύτητα $v_p = v \cdot \omega$. Αν θέσουμε,

$$z = z\left(\sigma - v\omega\tau\right)\,, \quad \varphi \equiv \phi - \omega\,\tau = \varphi\left(\sigma - v\omega\tau\right) \tag{7.3}$$

στις εξισώσεις των συνδέσμων (6.14)–(6.15) και την αναγωγή Pohlmeyer (6.16), λαμβάνουμε:

$$\varphi' = \frac{v\,\omega^2}{1 - v^2\omega^2} \cdot \frac{z^2 - \zeta_\omega^2}{R^2 - z^2}\,, \quad \zeta_\omega^2 \equiv R^2\left[1 - \frac{1}{\omega^2}\right]\,, \quad v \cdot \omega \neq 1 \tag{7.4}$$

$$z'^{\,2} = \frac{\omega^2}{R^2\left(1 - v^2\omega^2\right)^2} \cdot \left(z^2 - \zeta_\omega^2\right)\left(\zeta_v^2 - z^2\right)\,, \quad \zeta_v^2 \equiv R^2\left(1 - v^2\right) \tag{7.5}$$

$$\sin^2\psi = \frac{z^2 - \zeta_\omega^2}{\zeta_v^2 - \zeta_\omega^2} \quad \text{(Αναγωγή Pohlmeyer).} \tag{7.6}$$

Για $v \cdot \omega = 1$ οδηγούμαστε στην τετριμμένη λύση $z = \zeta_v = \zeta_\omega$. Αυτή η λύση είναι δυνατή μόνο εφόσον $z = 0$ και $v = \omega = 1$, που είναι απλά η σημειακή χορδή και η δυϊκή της υπό τον μετασχηματισμό $\sigma \leftrightarrow \tau$ στεφάνη (6.33). Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (7.4) και (7.5), λαμβάνουμε:

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{R^2 - z^2}{R\,v\,\omega}\sqrt{\frac{\zeta_v^2 - z^2}{z^2 - \zeta_\omega^2}}. \tag{7.7}$$

Είναι σχετικά απλό να εξαγάγουμε τα όρια απείρου μεγέθους των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων από το ansatz πεπερασμένου μεγέθους (7.2) και τις εξισώσεις (7.4)–(7.6). Το γιγάντιο μαγνόνιο των Hofman-Maldacena (απείρου μεγέθους) (6.25)–(6.26) και η αναγωγή Pohlmeyer αυτού (6.30) λαμβάνονται για $\omega = 1$ και για $|v| \leq 1$, ενώ για $v = 1$ και $\omega \geq 1$ λαμβάνουμε τις απλές ακίδες απείρου μεγέθους (ή άπειρης ορμής) (6.38)–(6.39) και την αναγωγή Pohlmeyer αυτών (6.43).

Ανάλογα με τις σχετικές τιμές της γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας της ανοικτής χορδής v και ω, βρίσκουμε τέσσερις περιοχές λύσεως των συνδέσμων (7.4)–(7.5) και της αναγωγής Pohlmeyer (7.6):

1. Γιγάντιο μαγνόνιο, στοιχειώδης περιοχή: $0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$.

2. Γιγάντιο μαγνόνιο, διπλή περιοχή: $0 \leq |v| \leq 1 \leq 1/\omega$.

3. Απλή ακίδα, στοιχειώδης περιοχή: $0 \leq 1/\omega < |v| \leq 1$.

4. Απλή ακίδα, διπλή περιοχή: $0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$.

	$\omega \leq 1$	$\omega \geq 1$	
$v\omega \leq 1$	GM Διπλή (7.2)	GM Στοιχειώδης (7.1)	–
$v\omega \geq 1$	–	SS Στοιχειώδης (7.3)	SS Διπλή (7.4)
	$v \leq 1$		$v \geq 1$

Πίνακας 1: Στοιχειώδεις και διπλές περιοχές των γιγάντιων μαγνονίων (GM) και των απλών ακίδων (SS).

Βλέπε επίσης και τον πίνακα 1. Η επιλογή των ονομασιών «στοιχειώδης» και «διπλή» πρόκειται να δικαιολογηθεί παρακάτω, όπου καθεμιά από τις προηγούμενες περιοχές θα μελετηθεί λεπτομερώς. Στην επόμενη §8, θα μελετήσουμε τις κλασικές σχέσεις διασποράς αυτών των λύσεων.

7.1 Γιγάντιο Μαγνόνιο: Στοιχειώδης Περιοχή, $0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$

Σε αυτή την περίπτωση η ανοικτή χορδή είναι ένα τόξο στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ (γιγάντιο μαγνόνιο) που εκτείνεται μεταξύ των παραλλήλων ζ_ω και ζ_v:

$$0 \leq \zeta_\omega^2 = z_{\text{min}}^2 \leq z^2 \leq z_{\text{max}}^2 = \zeta_v^2 \leq R^2. \tag{7.8}$$

Η διατηρούμενη ορμή/γωνιακή έκταση των γιγάντιων μαγνονίων πεπερασμένου μεγέθους στη στοιχειώδη περιοχή είναι:

$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \int_{-r}^{+r} \varphi' \, d\sigma = \frac{2}{\sqrt{1-v^2}} \left[\frac{1}{v\omega}\, \mathbf{\Pi}\left(\left[1 - \frac{1}{v^2}\right]\eta; \eta\right) - v\omega\, \mathbb{K}(\eta)\right], \tag{7.9}$$

όπου

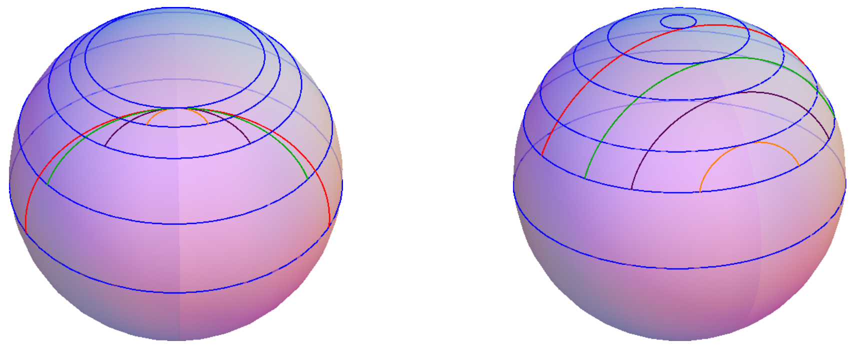
$$\eta \equiv 1 - \frac{z_{\text{min}}^2}{z_{\text{max}}^2} = \frac{1 - v^2\omega^2}{\omega^2\left(1 - v^2\right)} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{\eta + v^2\left(1 - \eta\right)}}. \tag{7.10}$$

Τα διατηρούμενα φορτία της ενέργειας και της στροφορμής βρίσκονται να είναι:

$$E = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-r}^{+r} \dot{t} \, d\sigma = \frac{r\sqrt{\lambda}}{\pi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi\omega} \cdot \frac{1 - v^2\omega^2}{\sqrt{1-v^2}}\, \mathbb{K}(\eta)\,, \quad r = \frac{1 - v^2\omega^2}{\omega\sqrt{1-v^2}}\, \mathbb{K}(\eta) \tag{7.11}$$

$$J = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi R^2} \int_{-r}^{+r} \left(R^2 - z^2\right) \dot{\phi} \, d\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \sqrt{1-v^2} \Big(\mathbb{K}(\eta) - \mathbb{E}(\eta)\Big). \tag{7.12}$$

Όπως εξηγήσαμε, το απείρου μεγέθους (Hofman-Maldacena) γιγάντιο μαγνόνιο ανακτάται στο όριο $\omega = 1$ όπου $J = \infty$. Προκειμένου να λάβουμε την εκδοχή πεπερασμένου μεγέθους της κλειστής διπλωμένης χορδής GKP εντός του $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ που μελετήσαμε στην §4.2, πρέπει να υπερθέσουμε δύο στοιχειώδη γιγάντια μαγνόνια με ταχύτητες $v = 0$, μέγιστη ορμή $p = \pi$ και στροφορμή $J/2$. Οι σύνδεσμοι Virasoro (7.4)–(7.5) των γιγάντιων μαγνονίων στη στοιχειώδη περιοχή, έχουν τις ακόλουθες λύσεις:



Σχήμα 17: Διαγράμματα γιγάντιων μαγνονίων πεπερασμένου μεγέθους με $\omega > 1$ (στοιχειώδης περιοχή), για $v =$ σταθ. (αριστερά) και $\omega =$ σταθ. (δεξιά).

$$z\left(\tau,\sigma\right) = R\sqrt{1-v^2}\cdot\mathrm{dn}\left(\frac{\sigma-v\omega\tau}{\omega\,\eta\,\sqrt{1-v^2}},\eta\right), \quad n\cdot r \leq \sigma - v\omega\tau \leq (n+1)\cdot r \tag{7.13}$$

$$\varphi\left(z\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1-v^2}}\left\{\frac{1}{v\omega}\mathbf{\Pi}\left(\left[1-\frac{1}{v^2}\right]\eta, \arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\sqrt{1-\frac{z^2}{z_{\max}^2}}\right]\middle|\,\eta\right) - \right.$$
$$\left. - v\omega\,\mathbb{F}\left(\arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\sqrt{1-\frac{z^2}{z_{\max}^2}}\right],\eta\right)\right\} + \left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\cdot p, \quad z_{\min}\leq z\leq z_{\max}, \tag{7.14}$$

όπου $\lfloor y \rfloor$ είναι η ακέραια τιμή του y. Στο σχήμα 17 έχουμε ζωγραφίσει διάφορα στιγμιότυπα των στοιχειωδών γιγάντιων μαγνονίων, σχεδιάζοντας την (7.14) επί μιας σφαίρας για διάφορες τιμές των ταχυτήτων v και ω, και για τις τιμές $-r \leq \sigma \leq r$, $\tau = 0$. Με την Mathematica μπορούμε επίσης να αποδώσουμε κίνηση στο στοιχειώδες γιγάντιο μαγνόνιο και να επαληθεύσουμε ότι εκτελεί μια «σκωληκοειδή περιστροφή» επί της δισδιάστατης σφαίρας, όπως ακριβώς περιγράφουν οι Arutyunov, Frolov και Zamaklar στην εργασία τους [102]. Το στοιχειώδες γιγάντιο μαγνόνιο αντιστοιχεί σε μια ελικοειδή χορδή τύπου (i) με ένα σπίν, σύμφωνα με την ορολογία των Okamura και Suzuki [103].

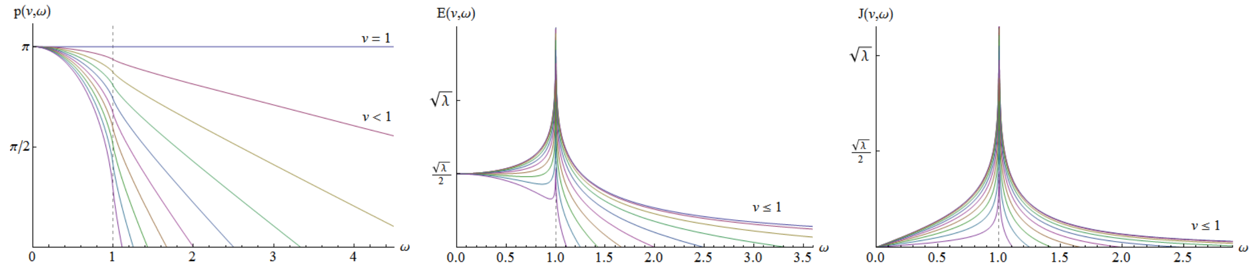
Λύνοντας την εξίσωση (7.6), λαμβάνουμε την ακόλουθη αναγωγή Pohlmeyer των γιγάντιων μαγνονίων πεπερασμένου μεγέθους στη στοιχειώδη περιοχή:

$$\psi\left(\tau,\sigma\right) = \frac{\pi}{2} + \mathrm{am}\left(\frac{\sigma-v\omega\tau}{\omega\,\eta\,\sqrt{1-v^2}},\eta\right). \tag{7.15}$$

Αυτή η λύση περιγράφει μια ημιπεριοδική σειρά από σολιτόνια της εξίσωσης sine-Gordon που είναι γνωστή ως αλυσίδα/συρμός σολιτονίων (βλέπε επίσης και [104]). Η περίοδος της αλυσίδας/συρμού των σολιτονίων δίδεται από

$$\psi\left(\tau,\sigma\right) = \psi\left(\sigma+L,\tau\right) + n\pi\,, \quad L = 2\sqrt{\eta\left(1-v^2\omega^2\right)}\cdot\mathbb{K}\left(\eta\right), \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{7.16}$$

Λόγω του ότι κάθε περίοδος από τον συρμό των σολιτονίων περιέχει ακριβώς ένα σολιτόνιο, η παραμετρική περιοχή $0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$ αποκαλέστηκε «στοιχειώδης» από τους Klose και McLoughlin στην εργασία [104]. Η δισδιάστατη απεικόνιση της (7.15) για $v = 0.1$ και $\omega = 1.01$, ως προς τις μεταβλητές του κοσμικού φύλλου σ και τ μπορεί να βρεθεί στο δεξιό διάγραμμα του σχήματος 22. Η ευστάθεια της λύσης της εξίσωσης sine-Gordon (7.15) έχει επίσης μελετηθεί στην εργασία [105], σύμφωνα με την οποία η (7.15) αντιστοιχεί σε ένα γραμμικά ευσταθές περιστροφικό κύμα που κινείται με ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός (ήτοι $v \cdot \omega < 1$).



Σχήμα 18: Ορμή, ενέργεια, σπίν των γιγάντιων μαγνονίων πεπερασμένου μεγέθους, ως προς τη γωνιακή ταχύτητα ω.

7.2 Γιγάντιο Μαγνόνιο: Διπλή Περιοχή, $0 \leq |v| \leq 1 \leq 1/\omega$

Σε αυτή την περίπτωση η ανοικτή χορδή είναι ένα τόξο επί της δισδιάστατης σφαίρας που ακουμπά στον ισημερινό και εκτείνεται μέχρι τον παράλληλο ζ_v:

$$\zeta_\omega^2 = -z_{\text{min}}^2 \leq 0 \leq z^2 \leq z_{\text{max}}^2 = \zeta_v^2 \leq R^2. \tag{7.17}$$

Στη διπλή περιοχή, η διατηρούμενη ενέργεια/γωνιακή έκταση του γιγάντιου μαγνονίου πεπερασμένου μεγέθους βρίσκεται ίση με

$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \int_{-r}^{+r} \varphi'\, d\sigma = \frac{2\omega}{\sqrt{1-v^2\omega^2}} \left[\frac{1}{v\omega}\,\mathbf{\Pi}\left(1-\frac{1}{v^2};\frac{1}{\eta}\right) - v\omega\,\mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right)\right], \tag{7.18}$$

όπου

$$\eta \equiv 1 + \frac{z_{\text{min}}^2}{z_{\text{max}}^2} = \frac{1-v^2\omega^2}{\omega^2\left(1-v^2\right)} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{\eta + v^2\left(1-\eta\right)}}. \tag{7.19}$$

Η διατηρούμενη ενέργεια και η στροφορμή του γιγάντιου μαγνονίου στη διπλή περιοχή δίδονται από:

$$E = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\int_{-r}^{+r} \dot{t}\, d\sigma = \frac{r\sqrt{\lambda}}{\pi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\cdot\sqrt{1-v^2\omega^2}\,\mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right), \quad r = \sqrt{1-v^2\omega^2}\,\mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right) \tag{7.20}$$

$$J = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi R^2}\int_{-r}^{+r}\left(R^2 - z^2\right)\dot{\phi}\, d\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{1-v^2\omega^2}}{\omega}\left[\mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right) - \mathbb{E}\left(\frac{1}{\eta}\right)\right]. \tag{7.21}$$

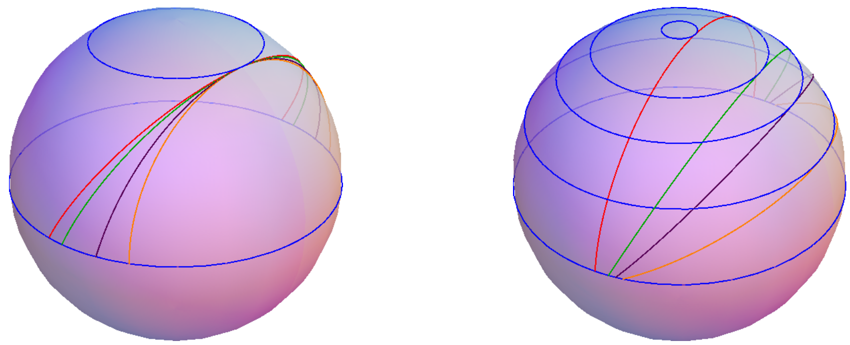
Στη διπλή περιοχή, οι σύνδεσμοι Virasoro (7.4)–(7.5) έχουν την ακόλουθη λύση:

$$z\left(\tau,\sigma\right) = R\sqrt{1-v^2}\cdot \text{cn}\left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\sqrt{1-v^2\omega^2}},\frac{1}{\eta}\right), \quad 2\,n\cdot r \leq \sigma - v\omega\tau \leq 2\left(n+1\right)\cdot r \tag{7.22}$$

$$\varphi\left(z\right) = \frac{\left(-1\right)^n\omega}{\sqrt{1-v^2\omega^2}}\left\{\frac{1}{v\omega}\,\mathbf{\Pi}\left(1-\frac{1}{v^2},\arccos\left[\frac{z}{z_{\text{max}}}\right]\Bigg|\,\frac{1}{\eta}\right) - \right.$$

$$\left. - v\omega\,\mathbb{F}\left(\arccos\left[\frac{z}{z_{\text{max}}}\right],\frac{1}{\eta}\right)\right\} + 2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\cdot p\,, \quad -z_{\text{max}} \leq z \leq z_{\text{max}}. \tag{7.23}$$

Το γιγάντιο μαγνόνιο των HM (6.27)–(6.28) μπορεί να ανακτηθεί από τις σχέσεις (7.22)–(7.23) στο



Σχήμα 19: Διαγράμματα των γιγάντιων μαγνονίων πεπερασμένου μεγέθους με $\omega < 1$ (διπλή περιοχή), για $v =$ σταθ. (αριστερά) και $\omega =$ σταθ. (δεξιά).

όριο $\omega = 1$. Η κυκλική χορδή των GKP στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ που μελετήσαμε στην §4.2, σχηματίζεται από δύο διπλά γιγάντια μαγνόνια με ταχύτητες $v = 0$, μέγιστη ορμή $p = \pi$ και στροφορμή $J/2$. Τα σχήματα των γιγάντιων μαγνονίων στη διπλή περιοχή για διάφορες τιμές των ταχυτήτων τους v και ω, μπορούν να βρεθούν στο σχήμα 19. Η κίνηση των γιγάντιων μαγνονίων στη διπλή περιοχή είναι ένας συνδυασμός περιστροφής και μετατόπισης: το GM είναι αρχικά εφαπτόμενο στον παράλληλο $z = z_{\max}$ του βορείου ημισφαιρίου, μετά αρχίζει σταδιακά να κινείται προς τον παράλληλο $z = -z_{\max}$ του νοτίου ημισφαιρίου, πριν αρχίσει να κινείται και πάλι προς την αρχική του θέση. Στη συνέχεια η κίνηση επαναλαμβάνεται. Τα γιγάντια μαγνόνια στη διπλή περιοχή έχουν επίσης ταξινομηθεί από τους Okamura και Suzuki [103] ως ελικοειδείς χορδές τύπου (ii) με ένα σπίν. Το σχήμα 18 περιέχει τα διαγράμματα της ορμής, της ενέργειας και του σπίν, τόσο στη στοιχειώδη περιοχή ($\omega \geq 1$) όσο και στη διπλή περιοχή ($\omega \leq 1$) των γιγάντιων μαγνονίων συναρτήσει των γωνιακών τους ταχύτητων ω και για διάφορες τιμές των γραμμικών τους ταχυτήτων v.

Η αναγωγή Pohlmeyer (7.6) για τη χορδή (7.22)–(7.23) εντός του $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$, είναι μια περιοδική σειρά από σολιτόνια και αντισολιτόνια της εξίσωσης sine-Gordon που είναι γνωστή ως αλυσίδα/συρμός σολιτονίου-αντισολιτονίου:

$$\psi\left(\tau, \sigma\right) = \arccos\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\,\mathrm{sn}\left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\sqrt{1 - v^2\omega^2}}, \frac{1}{\eta}\right)\right]. \tag{7.24}$$

Η σχέση (7.24) είναι σχεδιασμένη στο δεύτερο γράφημα του σχήματος 22 για $v = 0.4$ και $\omega = 0.3$. Η ημιπερίοδος του συρμού των σολιτονίων-αντισολιτονίων είναι

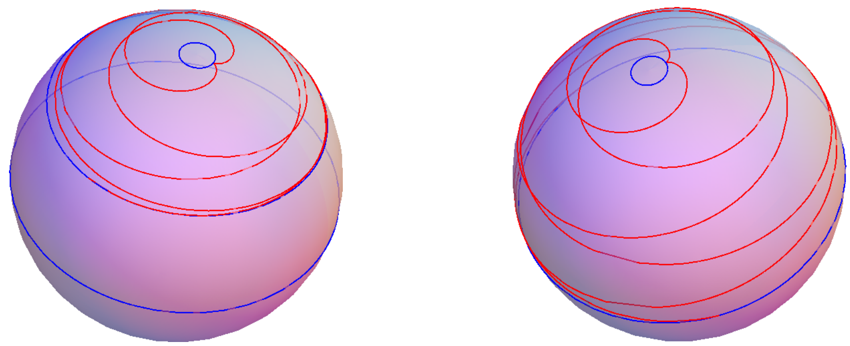
$$\psi\left(\tau, \sigma\right) = -\psi\left(\sigma + L, \tau\right) + n\pi\,, \quad L = 2\sqrt{1 - v^2\omega^2} \cdot \mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{7.25}$$

Κάθε περίοδος L της αλυσίδας των σολιτονίων-αντισολιτονίων περιέχει ακριβώς δύο σολιτόνια (ένα σολιτόνιο και ένα αντισολιτόνιο), και γι'αυτό το λόγο η παραμετρική περιοχή $0 \leq |v| \leq 1 \leq 1/\omega$ αποκαλείται «διπλή» περιοχή από τους Klose και McLoughlin στην [104], σύμβαση την οποία ακολουθούμε κι εμείς εδώ. Σύμφωνα με την εργασία [105], η λύση sG (7.24) αποτελεί ένα φασματικά ασταθές κύμα λίκνισης με ταχύτητα μικρότερη από εκείνη του φωτός ($v \cdot \omega < 1$).

7.3 Απλή Ακίδα: Στοιχειώδης Περιοχή, $0 \leq 1/\omega < |v| \leq 1$

Σε αυτή την περίπτωση η χορδή εκτείνεται μεταξύ των παραλλήλων ζ_v και ζ_ω, αλλά είναι πολλαπλά τυλιγμένη γύρω από τη δισδιάστατη σφαίρα και έχει μία ακίδα (spike) αντί να είναι τοξοειδής:

$$0 \leq \zeta_v^2 = z_{\min}^2 \leq z^2 \leq z_{\max}^2 = \zeta_\omega^2 \leq R^2. \tag{7.26}$$



Σχήμα 20: Διαγράμματα απλών ακίδων πεπερασμένου μεγέθους ($v \cdot \omega > 1$) στη στοιχειώδη (αριστερά) και τη διπλή περιοχή (δεξιά).

Η διατηρούμενη ορμή της απλής ακίδας πεπερασμένου μεγέθους στην στοιχειώδη της περιοχή βρίσκεται ότι είναι:

$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \int_{-r}^{+r} \varphi' \, d\sigma = \frac{2v\omega}{\sqrt{1-1/\omega^2}} \Big[\mathbb{K}(\eta) - \mathbf{\Pi}\left(1-v^2\omega^2;\eta\right)\Big], \tag{7.27}$$

όπου

$$\eta \equiv 1 - \frac{z_{\text{min}}^2}{z_{\text{max}}^2} = \frac{v^2\omega^2-1}{\omega^2-1} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{1-\eta}{v^2-\eta}}. \tag{7.28}$$

Τα διατηρούμενα φορτία της ενέργειας και της στροφορμής των απλών ακίδων στη στοιχειώδη τους περιοχή είναι:

$$E = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-r}^{+r} \dot{t} \, d\sigma = \frac{r\sqrt{\lambda}}{\pi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \frac{v^2\omega^2-1}{\sqrt{\omega^2-1}} \mathbb{K}(\eta) \,, \quad r = \frac{v^2\omega^2-1}{\sqrt{\omega^2-1}} \mathbb{K}(\eta) \tag{7.29}$$

$$J = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi R^2} \int_{-r}^{+r} \left(R^2 - z^2\right) \dot{\phi} \, d\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{\omega^2}} \left[\mathbb{E}(\eta) - \frac{1-v^2}{1-1/\omega^2} \mathbb{K}(\eta)\right]. \tag{7.30}$$

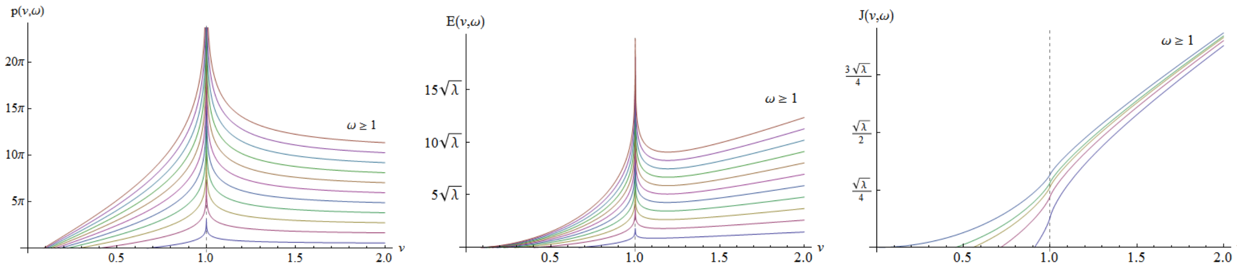
Οι εξισώσεις των συνδέσμων (7.4)–(7.5) δέχονται τις ακόλουθες λύσεις:

$$z(\tau,\sigma) = R\sqrt{1-\frac{1}{\omega^2}} \cdot \text{dn}\left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\eta\sqrt{\omega^2-1}}, \eta\right) \tag{7.31}$$

$$\varphi(z) = \frac{(-1)^n \, v\omega}{\sqrt{1-1/\omega^2}} \left\{\mathbb{F}\left(\arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\sqrt{1-\frac{z^2}{z_{\text{max}}^2}}\right], \eta\right) - \right.$$

$$\left. -\mathbf{\Pi}\left(1-v^2\omega^2, \arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\sqrt{1-\frac{z^2}{z_{\text{max}}^2}}\right] \Bigg| \eta\right)\right\} + \left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor \cdot p \,, \quad z_{\text{min}} \le z \le z_{\text{max}}. \tag{7.32}$$

Αν σχεδιάσουμε το γράφημα της εξίσωσης (7.32) πάνω σε μια σφαίρα με τη Mathematica, λαμβάνουμε



Σχήμα 21: Ορμή, ενέργεια, σπίν των απλών ακίδων πεπερασμένου μεγέθους συναρτήσει της γραμμικής τους ταχύτητας v.

τα σχέδια των απλών ακίδων στη στοιχειώδη τους περιοχή—π.χ. εκείνο στα αριστερά του σχήματος 20. Η κίνηση των απλών ακίδων στη στοιχειώδη περιοχή θυμίζει πολύ την κίνηση των γιγάντιων μαγνονίων στη στοιχειώδη περιοχή, την οποία περιγράψαμε στην §7.1. Όπως ήδη αναφέραμε, για $v = 1$ η παρούσα λύση πεπερασμένης ορμής προσεγγίζει την απλή ακίδα απείρου μεγέθους που μελετήσαμε στην §6.2.

Η αναγωγή Pohlmeyer της λύσης (7.31)–(7.32) δίδεται από την ακόλουθη κυματοσυνάρτηση:

$$\psi\left(\tau,\sigma\right) = \mathrm{am}\left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\eta\sqrt{\omega^2-1}}, \eta\right). \tag{7.33}$$

Για μία ακόμη φορά, η (7.33) αντιπροσωπεύει μία αλυσίδα/συρμό από σολιτόνια, σε αναλογία με την αλυσίδα/συρμό από σολιτόνια (7.15) που αντιστοιχεί στην αναγωγή Pohlmeyer των γιγάντιων μαγνονίων. Η αλυσίδα περιέχει ακριβώς ένα σολιτόνιο ανά περίοδο, και γι'αυτό αποκαλούμε αυτή την παραμετρική περιοχή «στοιχειώδη». Η (7.33) έχει σχεδιαστεί για $v = 0.9$ και $\omega = 2$ στο σχήμα 22. Η περίοδος της αλυσίδας των σολιτονίων (7.33) είναι

$$\psi\left(\tau,\sigma\right) = \psi\left(\sigma + L,\tau\right) + n\pi\,, \quad L = 2\sqrt{\eta\left(v^2\omega^2-1\right)}\cdot\mathbb{K}\left(\eta\right)\,, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{7.34}$$

Σύμφωνα με την εργασία [105], η αναγωγή (7.33) αντιστοιχεί σε ένα φασματικά ασταθές περιστροφικό κύμα ταχύτητας μεγαλύτερης του φωτός ($v\cdot\omega > 1$).

7.4 Απλή Ακίδα: Διπλή Περιοχή, $0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$

Για $0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$, η λύση (7.2) περιγράφει μία ακιδωτή ανοιχτή χορδή πολλαπλώς τυλιγμένη γύρω από τη δισδιάστατη σφαίρα, εκτεινόμενη μεταξύ του ισημερινού και του παραλλήλου ζ_ω:

$$\zeta_v^2 = -z_{\text{min}}^2 \leq 0 \leq z^2 \leq z_{\text{max}}^2 = \zeta_\omega^2 \leq R^2. \tag{7.35}$$

Η διατηρούμενη ορμή της απλής ακίδας στη διπλή της περιοχή είναι:

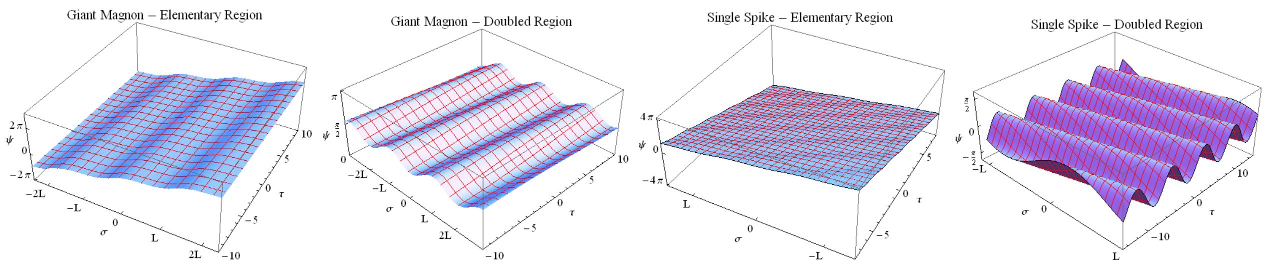
$$p \equiv \Delta\phi = \Delta\varphi = \int_{-r}^{+r}\varphi'\,d\sigma = \frac{2v\omega^2}{\sqrt{v^2\omega^2-1}}\left[\mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right) - \mathbf{\Pi}\left(1-\omega^2;\frac{1}{\eta}\right)\right], \tag{7.36}$$

όπου

$$\eta \equiv 1 + \frac{z_{\text{min}}^2}{z_{\text{max}}^2} = \frac{v^2\omega^2-1}{\omega^2-1} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{1-\eta}{v^2-\eta}}. \tag{7.37}$$

Η διατηρούμενη ενέργεια και η στροφορμή στη διπλή περιοχή των απλών ακίδων είναι:

$$E = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\int_{-r}^{+r}\dot{t}\,d\sigma = \frac{r\sqrt{\lambda}}{\pi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\cdot\sqrt{v^2\omega^2-1}\,\mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right)\,, \quad r = \sqrt{v^2\omega^2-1}\,\mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right) \tag{7.38}$$



Σχήμα 22: Αναγωγές Pohlmeyer των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων. Η αναγωγή Pohlmeyer των στοιχειωδών γιγάντιων μαγνονίων (7.15) (πρώτο γράφημα) έχει σχεδιαστεί για $v = 0.1$ και $\omega = 1.01$. Η κυματοσυνάρτηση (7.24) των διπλών γιγάντιων μαγνονίων (δεύτερο γράφημα) έχει σχεδιαστεί για $v = 0.4$ και $\omega = 0.3$. Η αναγωγή Pohlmeyer για τις στοιχειώδεις απλές ακίδες (7.33) (τρίτο γράφημα) έχει $v = 0.9$ και $\omega = 2$. Η κυματοσυνάρτηση sG των «διπλών» απλών ακίδων (7.42) (τέταρτο γράφημα) έχει $v = 1.4$ και $\omega = 3$.

$$J = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi R^2}\int_{-r}^{+r}\left(R^2 - z^2\right)\dot{\phi}\, d\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{v^2\omega^2-1}}{\omega}\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{\eta}\right), \tag{7.39}$$

Σε αυτή την περίπτωση, οι σύνδεσμοι Virasoro (7.4)–(7.5) λύνονται από τις σχέσεις:

$$z\left(\tau,\sigma\right) = R\sqrt{1-\frac{1}{\omega^2}}\cdot\text{cn}\left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\sqrt{v^2\omega^2-1}}, \frac{1}{\eta}\right) \tag{7.40}$$

$$\varphi\left(z\right) = \frac{\left(-1\right)^n\, v\omega^2}{\sqrt{v^2\omega^2-1}}\left\{\mathbb{F}\left(\arccos\left[\frac{z}{z_{\text{max}}}\right], \frac{1}{\eta}\right) - \boldsymbol{\Pi}\left(1-\omega^2, \arccos\left[\frac{z}{z_{\text{max}}}\right]\middle|\,\frac{1}{\eta}\right)\right\} + 2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\cdot p\,,$$
$$-z_{\text{max}} \leq z \leq z_{\text{max}}. \tag{7.41}$$

Βλέπε το δεξιό γράφημα του σχήματος 20 για ένα σχέδιο της απλής ακίδας στη διπλή της περιοχή. Η χορδή αρχίζει να ξετυλίγεται από το βόρειο πόλο και να τυλίγεται σταδιακά γύρω από το νότιο πόλο. Στη συνέχεια η κίνηση αντιστρέφεται και επαναλαμβάνεται. Για $v = 1$ η λύση πεπερασμένης ορμής (7.40)–(7.41) πλησιάζει την απλή ακίδα άπειρης ορμής (6.40)–(6.41) που μελετήθηκε στην §6.2. Τα διαγράμματα της ορμής, ενέργειας και σπίν τόσο στη στοιχειώδη ($v \leq 1$) όσο και στη διπλή περιοχή ($v \geq 1$) των απλών ακίδων ως συναρτήσεις της γραμμικής τους ταχύτητας v και για διάφορες τιμές της γωνιακής τους ταχύτητας ω, μπορούν να βρεθούν στο σχήμα 21.

Η αναγωγή Pohlmeyer είναι ξανά μία αλυσίδα/συρμός από σολιτόνια-αντισολιτόνια, παρόμοια με την αλυσίδα από σολιτόνια-αντισολιτόνια των γιγάντιων μαγνονίων στην διπλή τους περιοχή (7.24):

$$\psi\left(\tau,\sigma\right) = \arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\,\text{sn}\left(\frac{\sigma - v\omega\tau}{\sqrt{v^2\omega^2-1}}, \frac{1}{\eta}\right)\right]. \tag{7.42}$$

Κάθε περίοδος της αλυσίδας (7.42) περιέχει ακριβώς δύο σολιτόνια, και γι'αυτό η παραμετρική περιοχή $0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$ αποκαλείται «διπλή», σε συμφωνία με ό,τι ειπώθηκε προηγουμένως. Η ημιπεριοδική λύση της εξίσωσης sG (7.42) έχει σχεδιαστεί για $v = 1.4$ και $\omega = 3$, στο σχήμα 22. Η ημιπερίοδος της αλυσίδας σολιτονίων-αντισολιτονίων είναι:

$$\psi\left(\tau,\sigma\right) = -\psi\left(\sigma + L,\tau\right) + n\pi\,, \quad L = 2\sqrt{v^2\omega^2-1}\cdot\mathbb{K}\left(\frac{1}{\eta}\right), \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{7.43}$$

Η (7.42) αντιστοιχεί σε ένα (φασματικά) ασταθές κύμα λίκνισης με ταχύτητα μεγαλύτερη εκείνη του φωτός ($v \cdot \omega > 1$) [105].

7.5 Συμμετρίες

Πριν κλείσουμε αυτή την ενότητα και περάσουμε στον υπολογισμό των σχέσεων διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων, ας πούμε και λίγα λόγια για τις διάφορες συμμετρίες. Η συμμετρία $\tau \leftrightarrow \sigma$ ή «δισδιάστατη δυαδικότητα» (6.45) που χρησιμοποιήθηκε για το μετασχηματισμό μεταξύ γιγάντιων μαγνονίων και απλών ακίδων απείρου μεγέθους, εφαρμόζεται επίσης και σε πεπερασμένο μέγεθος:

$$\tau \leftrightarrow \sigma \,, \, v \leftrightarrow \frac{1}{\omega} \,, \, \psi \leftrightarrow \left[\frac{\pi}{2} - \psi\right] \quad \Leftrightarrow \quad \text{Γιγάντια Μαγνόνια} \leftrightarrow \text{Απλές Ακίδες.} \tag{7.44}$$

Η (7.44) απεικονίζει τα γιγάντια μαγνόνια της στοιχειώδους περιοχής στις απλές ακίδες της στοιχειώδους περιοχής και τα γιγάντια μαγνόνια της διπλής περιοχής στις απλές ακίδες της διπλής περιοχής. Η δισδιάστατη δυαδικότητα (7.44) δρα στα ansätze (εξαιρουμένης της χρονικής συντεταγμένης $t = \tau$, που δεν επηρεάζεται), τις παραμετρικές περιοχές των ταχυτήτων v και ω, τις λύσεις (z και ϕ) και τις αναγωγές Pohlmeyer ψ των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων. Τα διατηρούμενα φορτία p, J, E δεν μετασχηματίζονται σωστά υπό τον μετασχηματισμό $\tau \leftrightarrow \sigma$.

Υπάρχει και ένας δεύτερος μετασχηματισμός μεταξύ των διαφόρων παραμετρικών περιοχών των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων (που συνοψίζονται στον πίνακα 1) και είναι άξιος λόγου. Η αντικατάσταση $\eta \leftrightarrow -\eta$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να συσχετίσουμε τις στοιχειώδεις περιοχές των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων, μετασχηματίζοντας τη λύση και την αναγωγή Pohlmeyer z, φ, ψ των στοιχειωδών GMs και SSs και αντιστρέφοντας τα πρόσημα των αντίστοιχων διατηρούμενων φορτίων τους p, J, E.

Οι στοιχειώδεις περιοχές των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων μπορούν επίσης να συσχετιστούν με τις αντίστοιχες διπλές περιοχές με το μετασχηματισμό $\eta \leftrightarrow 1/\eta$. Ξανά, ενώ οι λύσεις z, φ, ψ απεικονίζονται από τη στοιχειώδη στη διπλή περιοχή των γιγάντιων μαγνονίων, τα αντίστοιχα διατηρούμενα φορτία p, J, E δε μετασχηματίζονται σωστά κάτω από αυτόν το μετασχηματισμό. Από την άλλη μεριά, δεν είναι γνωστό πως να συσχετίσουμε τις διπλές περιοχές των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων με ανάλογο μετασχηματισμό. Κανείς εκ των μετασχηματισμών που συζητήσαμε παραπάνω, δε φαίνεται να επηρεάζει τις σχέσεις διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων τις οποίες θα συζητήσουμε στα επόμενα.

8 Σχέσεις Διασποράς Μαγνονίων και Απλών Ακίδων

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις κλασικές σχέσεις διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων πεπερασμένου μεγέθους, τόσο στη στοιχειώδη όσο και τη διπλή περιοχή τους. Τα γιγάντια μαγνόνια είναι δυϊκά ως προς τη αντιστοιχία AdS/CFT, προς τους τελεστές ενός μαγνονίου που εμφανίζονται στον τομέα $\mathfrak{su}(2)$ της $\mathcal{N}=4$ SYM. Είναι ανοικτές μποζονικές χορδές ενός σπίν που περιστρέφονται εντός του $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2\subset\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$, και η κλασική ενέργειά τους είναι ίση με τις διαστάσεις κλίμακας των τελεστών ενός μαγνονίου της $\mathcal{N}=4$ SYM θεωρίας σε ισχυρή σύζευξη. Ο S-πίνακας των γιγάντιων μαγνονίων (όπως υπολογίζεται από την αναγωγή Pohlmeyer) συμφωνεί με τον S-πίνακα των μαγνονίων σε ισχυρή σύζευξη (που δίνεται από τη φάση των AFS), και μας επιτρέπει να τα θεωρούμε ως δυϊκά, στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT.

Όπως έχουμε ήδη εξηγήσει, τα μαγνόνια και τα γιγάντια μαγνόνια δεν μπορεί να αποτελούν μέρος του φάσματος της AdS/CFT. Τα πρώτα έχουν μη μηδενική ορμή παραβιάζοντας τη συνθήκη κυκλικότητας του ίχνους και τα δεύτερα είναι ανοιχτές χορδές που δεν μπορούν να ανήκουν σε μια θεωρία χορδών τύπου IIB. Ωστόσο τα (γιγάντια) μαγνόνια είναι ένα απαραίτητο εργαλείο για τη μελέτη του φάσματος της AdS/CFT, διότι αποτελούν τις θεμελιώδεις δομικές μονάδες, εκ των οποίων όλες οι καταστάσεις της θεωρίας μπορούν να κατασκευαστούν. Αυτό είναι σε πλήρη αναλογία με την εξίσωση sine-Gordon για την οποία είναι γνωστό ότι όλες οι λύσεις της μπορούν να κατασκευαστούν από ένα μικρό μόνο αριθμό θεμελιωδών διεγέρσεων. Μάλιστα, τα σολιτόνια της εξίσωσης sine-Gordon είναι δυϊκά ως προς την αναγωγή Pohlmeyer, με τα γιγάντια μαγνόνια.

Ο λόγος που είμαστε αναγκασμένοι να μελετήσουμε τη σχέση διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων, είναι ότι η αντίστοιχη σχέση από τη μεριά της θεωρίας βαθμίδας είναι έγκυρη μόνο ασυμπτωτικά. Πράγματι, το ασυμπτωτικό Bethe ansatz (ABA) παύει να ισχύει όταν η τάξη βρόχου γίνεται ίση με το μήκος του τελεστή που μελετάμε. Για συστήματα απείρου μεγέθους το ABA παραμένει σε ισχύ για άπειρους βρόχους, δηλαδή σε όλη τη διαδρομή μέχρι την ισχυρή σύζευξη όπου αναλαμβάνει δράση η περιγραφή της θεωρίας χορδών. Όπως θα δούμε παρακάτω, όλα τα δεδομένα που έχουμε από την πλευρά της θεωρίας των χορδών συμφωνούν με το ABA σε άπειρο μέγεθος. Πέρα από την κρίσιμη τάξη βρόχου σε πεπερασμένο μέγεθος, πρέπει να υπολογίσουμε διορθώσεις wrapping για τις ανώμαλες διαστάσεις του μαγνονίου από την ασθενώς συζευγμένη πλευρά της θεωρίας βαθμίδας, και κλασικές ή κβαντικές διορθώσεις (ήτοι διορθώσεις α' ή διορθώσεις καμπυλότητας) από την πλευρά της θεωρίας χορδών, όπου η σταθερά σύζευξης της θεωρίας βαθμίδας είναι ισχυρή.

Η διόρθωση του φάσματος και από τις δύο πλευρές της αντιστοιχίας AdS/CFT μας μετακινεί προς την αντίθετη πλευρά, δηλαδή καθώς συμπεριλαμβάνουμε διορθώσεις θεωρίας βαθμίδας στις διαστάσεις κλίμακας ενός τελεστή πλησιάζουμε το αποτέλεσμα της θεωρίας χορδών και προσθέτοντας διορθώσεις α' (ή διορθώσεις βρόχου) στις ενέργειες των χορδών πλησιάζουμε το αποτέλεσμα της θεωρίας βαθμίδας. Με άλλα λόγια η δενδροειδής προσέγγιση της θεωρίας βαθμίδας είναι ισοδύναμη με άπειρους βρόχους από τη μεριά της θεωρίας χορδών, και η δενδροειδής προσέγγιση της θεωρίας χορδών αντιστοιχεί σε άπειρους βρόχους της θεωρίας βαθμίδας. Οι δύο περιγραφές οφείλουν να συναντιούνται κάπου στο μέσο του φάσματος της αντιστοιχίας AdS/CFT.

Με βάση τα όσα είπαμε παραπάνω, για τους τελεστές που έχουν μεγάλο αλλά όχι άπειρο μέγεθος $J\to\infty$, το ABA θα αρχίσει να λαμβάνει διορθώσεις wrapping μετά από τη μεγάλη αλλά πεπερασμένη κρίσιμη τάξη βρόχου $L\sim J\to\infty$. Τότε όμως η σύζευξη θα είναι σχεδόν ισχυρή και η περιγραφή της θεωρίας χορδών θα βρίσκεται λίγο πάνω από τη δενδροειδή προσέγγιση ή το κλασσικό επίπεδο. Αυτή ακριβώς είναι η περιοχή που μας ενδιαφέρει σε πεπερασμένο μέγεθος. Θα πρέπει να είναι ήδη σαφές ότι, με δεδομένο ότι η θεωρία των χορδών είναι λίγο πάνω από το δενδροειδές επίπεδο και η θεωρία βαθμίδας για τα καλά πάνω από την κρίσιμη τάξη βρόχου, οι διορθώσεις wrapping θα είναι γενικά παρούσες στο φάσμα της θεωρίας χορδών, ακόμα και στο κλασσικό επίπεδο. Αυτές οι κλασικές και κβαντικές διορθώσεις του ABA (6.3) είναι γνωστές ως διορθώσεις πεπερασμένου μεγέθους και, όπως θα δούμε, έχουν τη μορφή εκθετικά φθινόντων όρων.

Στην παρούσα διατριβή, οι απλές ακίδες θεωρούνται ως μια αναλυτική συνέχιση των γιγάντιων μαγνονίων. Οι απλές ακίδες είναι χορδές ενός σπίν εντός του $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$, που έχουν τυλιχθεί πολλές φορές γύρω από τη δισδιάστατη σφαίρα και έχουν μια ακίδα στο κέντρο τους. Όπως είδαμε στην ενότητα (7.5), οι απλές ακίδες μπορούν απλά να ληφθούν από τα γιγάντια μαγνόνια με ένα μετασχηματισμό $\sigma\leftrightarrow\tau$ και την απεικόνιση $\eta\leftrightarrow-\eta$. Οι σχέσεις διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων μπορούν επίσης να συσχετισθούν με την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής. Σε γενικές γραμμές, θα πρέπει να αναμένεται ότι αυτά που είπαμε παραπάνω για τα γιγάντια μαγνόνια, να είναι επίσης εφαρμόσιμα και για τις απλές ακίδες.

Πριν ξεκινήσουμε την έρευνά μας για τις σχέσεις διασποράς του γιγάντιου μαγνονίου/απλής ακίδας, ας επαναλάβουμε εν συντομία τα επιχειρήματά μας σχετικά με το γιατί πιστεύουμε ότι ο αναλυτικός υπολογισμός του επίπεδου φάσματος της AdS/CFT έχει ενδιαφέρον. Πρώτα απ'όλα, μας φαίνεται ότι το πεδίο εφαρμογής της αντιστοιχίας AdS/CFT περιορίζεται σημαντικά, αν δεν ξέρουμε πώς να υπολογίσουμε όλο το φάσμα της. Δεύτερον, στις περισσότερες περιπτώσεις όπου μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά το φάσμα της AdS/CFT, επαληθεύουμε επίσης ταυτόχρονα πλήρως και αδιαμφισβήτητα, το ταίριασμά του και από τις δύο πλευρές της αντιστοιχίας. Ταίριασμα των φασμάτων σημαίνει ότι μπορούμε επίσης να ολοκληρώσουμε το λεξικό της AdS/CFT απεικονίζοντας κάθε τελεστή της επίπεδης $\mathcal{N}=4$ SYM, στη δυϊκή του κατάσταση ελεύθερης χορδής στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$. Τρίτον, με το πλήρες αναλυτικό φάσμα της AdS/CFT στη διάθεσή μας, αποκτά πολύ ενδιαφέρον η αναζήτηση κλειστών φορμουλών, τόσο σε ασθενή όσο και σε ισχυρή σύζευξη.

Όπως και στην περίπτωση των χορδών GKP, η μέθοδος για τον υπολογισμό του φάσματος της AdS/CFT στην περίπτωση των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων, δεν εξαρτάται από την ολοκληρωσιμότητα. Εκτός αυτού, έχουμε επικεντρωθεί σε μια περιοχή όπου οι μέθοδοι που βασίζονται στην ολοκληρωσιμότητα (π.χ. το θερμοδυναμικό Bethe ansatz (TBA), το Y-σύστημα ή η κβαντική φασματική καμπύλη) δεν έχουν ακόμη καταφέρει να παράγουν ιδιαίτερα θεαματικά αποτελέσματα. Όλοι οι υπολογισμοί της εργασίας [2] που πρόκειται αναπτύξουμε παρακάτω δεν έχουν ληφθεί στο παρελθόν με οποιαδήποτε άλλη μέθοδο, ούτε δύνανται να προκύψουν με τη βοήθεια ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή. Το να αναπτύξουμε μια φασματική μέθοδο που δε λαμβάνει υπόψη της την ιδιότητα της ολοκληρωσιμότητας έχει το πιθανό μειονέκτημα ότι είναι ίσως λίγο πιο περίπλοκη από ό,τι χρειάζεται, δεδομένου ότι αγνοεί μια πολύ σημαντική απλουστευτική υπόθεση (δηλαδή ότι το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο), αλλά έχει επίσης και το πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοσθεί κάθε φορά που η ολοκληρωσιμότητα γίνεται πολύ δυσχερής για να είναι χρήσιμη, ή ακόμη ακόμη απουσιάζει (π.χ. στη μη επίπεδη AdS/CFT, την QCD, ή τις p-βράνες). Ως εκ τούτου, μας προσφέρεται η ευκαιρία να υπολογίσουμε τα φάσματα σε κάποια γενικότερα πλαίσια. Θα δούμε επίσης ότι μπορούμε να κάνουμε μεγάλη πρόοδο ως προς την εξεύρεση κλειστών φορμουλών στο φάσμα της AdS/CFT.

Ας θεωρήσουμε για μία ακόμη φορά τις καταστάσεις της $\mathcal{N}=4$ SYM με $M=1$ μαγνόνια:

$$\mathcal{O}_M=\sum_{m=1}^{J+1}e^{imp}\left|\mathcal{Z}^{m-1}\mathcal{X}\mathcal{Z}^{J-m+1}\right\rangle,\quad p\in\mathbb{R},\quad \lambda,\mathcal{J}\to\infty. \tag{8.1}$$

Η γενική μορφή της σχέσης διασποράς για καταστάσεις μαγνονίων πεπερασμένου μεγέθους (8.1) σε ισχυρή σύζευξη, ή ισοδύναμα για γιγάντια μαγνόνια πεπερασμένου μεγέθους είναι:

$$\epsilon\left(p\right)=\epsilon_\infty+\underbrace{\sqrt{\lambda}\,\delta\epsilon_{\mathrm{cl}}+\delta\epsilon_{\text{1-loop}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\delta\epsilon_{\text{2-loop}}+\ldots}_{\text{διορθώσεις πεπερασμένου μεγέθους}},\qquad J,\lambda\to\infty, \tag{8.2}$$

όπου $\epsilon\left(p\right)\equiv E-J$ και ϵ_∞ είναι η σχέση των BDS (6.3) για 1 μαγνόνιο σε όλες τις τάξεις βρόχων:

$$\lim_{J\to\infty} \epsilon\left(p\right) = \epsilon_\infty \equiv \sqrt{1+\frac{\lambda}{\pi^2}\sin^2\frac{p}{2}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\sin\frac{p}{2} + 0 + \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\csc\frac{p}{2} - \frac{\pi^3}{8\lambda^{3/2}}\csc^3\frac{p}{2} + \ldots, \quad \lambda\to\infty \qquad (8.3)$$

Σε πεπερασμένο μέγεθος, η ϵ_∞ δέχεται κλασσικές και κβαντικές διορθώσεις $\delta\epsilon_{\text{cl}}$ και $\delta\epsilon_{n\text{-loop}}$. Γενικεύοντας το ansatz (6.23) των Hofman-Maldacena σε πεπερασμένο μέγεθος, οι Arutyunov, Frolov και Zamaklar (AFZ) [102] εξήγαγαν τους λίγους πρώτους όρους του κλασικού αναπτύγματος σε πεπερασμένο μέγεθος $\delta\epsilon_{\text{cl}}$:

$$\delta\epsilon_{\text{cl}} = -\frac{4}{\pi}\sin\frac{p}{2}\left\{\sin^2\frac{p}{2}\,e^{-\mathcal{L}} + \left[8\mathcal{J}^2\cos^2\frac{p}{2} + 4\sin\frac{p}{2}\left(3\cos p + 2\right)\mathcal{J} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sin^2\frac{p}{2}\left(6\cos p + 7\right)\right]e^{-2\mathcal{L}} + \ldots\right\}, \quad \mathcal{J} \equiv \frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathcal{L} \equiv 2\mathcal{J}\csc\frac{p}{2} + 2. \qquad (8.4)$$

Έχει επίσης αποδειχθεί από τους Astolfi, Forini, Grignani και Semenoff στην [106] ότι το φάσμα των γιγάντιων μαγνονίων πεπερασμένου μεγέθους στην ομοιόμορφη βαθμίδα του κώνου φωτός (uniform light-cone gauge) είναι εντελώς ανεξάρτητο από τον παράγοντα βαθμίδας. Πολλοί περισσότεροι όροι της (8.4) μπορούν να υπολογιστούν με τη Mathematica—βλέπε τα παραρτήματα Γ′.3–Δ′.2. Η γενική μορφή των κλασικών διορθώσεων πεπερασμένου μεγέθους $\delta\epsilon_{\text{cl}}$ είναι η ακόλουθη:

$$\delta\epsilon_{\text{cl}} = \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{2n-2}\mathcal{A}_{nm}\left(p\right)\mathcal{J}^{2n-m-2}e^{-2n\left(\mathcal{J}\csc\frac{p}{2}+1\right)} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{J}^{-m-2}\left\{\sum_{n=\lfloor\frac{m}{2}+1\rfloor}^{\infty}\mathcal{A}_{nm}\left(p\right)\mathcal{J}^{2n}e^{-2n\left(\mathcal{J}\csc\frac{p}{2}+1\right)}\right\}, \qquad (8.5)$$

όπου όλοι οι συντελεστές των αρνητικών δυνάμεων του $\mathcal{J}$ είναι μηδέν (π.χ. $\mathcal{A}_{11} = \mathcal{A}_{12} = \ldots = 0$, κλπ.). Η φόρμουλα των AFZ (8.4) περιέχει τους όρους $\mathcal{A}_{10}$, $\mathcal{A}_{20}$, $\mathcal{A}_{21}$, $\mathcal{A}_{22}$ της (8.5). Οι Klose και McLoughlin [104] βρήκαν τους όρους $\mathcal{A}_{10}$–$\mathcal{A}_{60}$:

$$\delta\epsilon_{\text{cl}} = -\frac{4}{\pi}\sin^3\frac{p}{2}\,e^{-\mathcal{L}}\left[1+2\,\mathcal{L}^2\cos^2\frac{p}{2}\,e^{-\mathcal{L}} + 8\,\mathcal{L}^4\cos^4\frac{p}{2}\,e^{-2\mathcal{L}} + \frac{128}{3}\,\mathcal{L}^6\cos^6\frac{p}{2}\,e^{-3\mathcal{L}} + \right.$$
$$\left. + \frac{800}{3}\,\mathcal{L}^8\cos^8\frac{p}{2}\,e^{-4\mathcal{L}} + \frac{9216}{5}\,\mathcal{L}^{10}\cos^{10}\frac{p}{2}\,e^{-5\mathcal{L}} + \ldots\right], \qquad (8.6)$$

Ο κυρίαρχος όρος $\mathcal{A}_{10}$ των (8.4)–(8.5) έχει βρεθεί επίσης με τη μέθοδο της αλγεβρικής καμπύλης στην [107] και από τη φόρμουλα των Lüscher-Klassen-Melzer (LKM) [108] σε ισχυρή σύζευξη, στις εργασίες [109, 110, 111].

Στην [2] υπολογίστηκαν όλοι οι συντελεστές $\mathcal{A}_{n0}$, $\mathcal{A}_{n1}$, $\mathcal{A}_{n2}$ της (8.5). Στις §8.1–§8.4 πρόκειται να επανέλθουμε σε αυτή την εργασία. Αλλά πρώτα ας συνοψίσουμε τα αποτελέσματα. Σε πρώτη τάξη, το κλασικό κομμάτι $\delta\epsilon_{\text{cl}}$ της σχέσης διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων και οι ανώμαλες διαστάσεις κλίμακας των τελεστών (8.1) σε ισχυρή σύζευξη, τόσο στη στοιχειώδη όσο και τη διπλή περιοχή, μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει της συνάρτησης W του Lambert ως ακολούθως:

$$\delta\epsilon_{\rm cl} =\frac{1}{4\pi\mathcal{J}^2}\tan^2\frac{p}{2}\sin^3\frac{p}{2}\left[W+\frac{W^2}{2}\right]-\frac{1}{16\pi\mathcal{J}^3}\tan^4\frac{p}{2}\sin^2\frac{p}{2}\left[(3\cos p+2)\,W^2+\frac{1}{6}\,(5\cos p+11)\,W^3\right]$$

$$-\frac{1}{512\pi\mathcal{J}^4}\tan^6\frac{p}{2}\sin\frac{p}{2}\Bigg\{(7\cos p-3)^2\,\frac{W^2}{1+W}-\frac{1}{2}\,(25\cos 2p-188\cos p-13)\,W^2-\frac{1}{2}(47\cos 2p$$

$$+196\cos p-19)W^3-\frac{1}{3}\,(13\cos 2p+90\cos p+137)\,W^4\Bigg\}+\ldots, \tag{8.7}$$

όπου το όρισμα της συνάρτησης W του Lambert είναι $W\left(\pm 16\mathcal{J}^2\cot^2(p/2)\,e^{-\mathcal{L}}\right)$, στον κύριο κλάδο και επίσης $\mathcal{L}\equiv 2\mathcal{J}\csc p/2+2$. Το πρόσημο μείον εντός του ορίσματος της συνάρτησης W αναφέρεται στη στοιχειώδη περιοχή των γιγάντιων μαγνονίων $(0\leq|v|<1/\omega\leq 1)$ και το πρόσημο συν αναφέρεται στη διπλή τους περιοχή $(0\leq|v|\leq 1\leq 1/\omega)$. Οι κυρίαρχοι, επόμενοι και μεθεπόμενοι συντελεστές της (8.5) $(\mathcal{A}_{n0},\,\mathcal{A}_{n1},\,\mathcal{A}_{n2})$ μπορούν να βρεθούν αν αναπτύξουμε τη συνάρτηση W του Lambert στη σχέση (8.7) γύρω από το $\mathcal{J}\to\infty$, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor (Γ′.3). Το αποτέλεσμα είναι:

- κυρίαρχοι όροι: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_{n0}\,(p)\;\mathcal{J}^{2n-2}\,e^{-n\,\mathcal{L}}=\frac{1}{4\mathcal{J}^2}\tan^2\frac{p}{2}\sin^3\frac{p}{2}\left[W+\frac{W^2}{2}\right],$

- επόμενοι όροι: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\mathcal{A}_{n1}\,(p)\;\mathcal{J}^{2n-3}\,e^{-n\,\mathcal{L}}=-\frac{1}{16\mathcal{J}^3}\tan^4\frac{p}{2}\sin^2\frac{p}{2}\left[(3\cos p+2)\,W^2+\frac{1}{6}\,(5\cos p+11)\,W^3\right],$

- μεθεπόμενοι όροι: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\mathcal{A}_{n2}\,(p)\;\mathcal{J}^{2n-4}\,e^{-n\,\mathcal{L}}=-\frac{1}{512\mathcal{J}^4}\tan^6\frac{p}{2}\sin\frac{p}{2}\Bigg\{(7\cos p-3)^2\,\frac{W^2}{1+W}-$

$$-\frac{1}{2}\,(25\cos 2p-188\cos p-13)\,W^2-\frac{1}{2}\,(47\cos 2p+196\cos p-19)\,W^3-\frac{1}{3}\,(13\cos 2p+90\cos p+137)\,W^4\Bigg\},$$

Οι συντελεστές $\mathcal{A}_{n0}$, $\mathcal{A}_{n1}$, $\mathcal{A}_{n2}$ συμφωνούν πλήρως με τα αποτελέσματα των AFZ (8.4), τη φόρμουλα των Klose-McLoughlin (8.6), όπως επίσης και τις σχέσεις (Δ′.12)–(Δ′.13) που υπολογίστηκαν με τη Mathematica.

Με βάση τα όσα είπαμε ως τώρα είναι εμφανές ότι η φόρμουλα ABA των BDS (8.3) δύναται να επιβεβαιωθεί σε ισχυρή σύζευξη από την κλασική (δενδροειδή) φόρμουλα των Hofman και Maldacena (6.6). Διαταράσσοντας το IIB μοντέλο χορδών στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$, έχει δειχθεί στην [112] ότι η διόρθωση ενός βρόχου για άπειρο όγκο συστήματος μηδενίζεται:

$$\delta\epsilon_{\text{1-loop}}=0,\quad J=0,\ \lambda\to\infty, \tag{8.8}$$

η οποία επίσης συμφωνεί με τη φόρμουλα των BDS (8.3) στη τάξη του ενός βρόχου. Σε πεπερασμένο όγκο ο υπολογισμός των διορθώσεων α' επιτυγχάνεται είτε με τη μέθοδο της αλγεβρικής καμπύλης [111] είτε υπολογίζοντας τους όρους F και μ του Lüscher [110]. Η γενική μορφή της κβαντικής διόρθωσης σε ένα βρόχο και πεπερασμένο όγκο είναι:

$$\delta\epsilon_{\text{1-loop}}=a_{1,0}\,e^{-2D}+\sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}a_{n,m}e^{-2nD-m\mathcal{L}},\quad D\equiv\mathcal{J}+\sin\frac{p}{2}. \tag{8.9}$$

Ο υπολογισμός των όρων $a_{n,0}$ και $a_{1,m}$ της (8.9) προχωρά σύμφωνα με τις οδηγίες που μπορεί να βρει κανείς στις εργασίες [111, 113]. Ο κυρίαρχος όρος $a_{1,0}$ δίνεται από:

$$a_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{8\sin^2 p/4}{(\sin p/2 - 1)} \left[1 - \frac{7 + 4\sin p - 4\cos p + \sin p/2}{16\,(\sin p/2 - 1)} \cdot \frac{1}{D} + O\left(\frac{1}{D^2}\right)\right]. \tag{8.10}$$

Ο κυρίαρχος όρος σε πεπερασμένο μέγεθος στη σχέση διασποράς των απλών ακίδων υπολογίστηκε στην εργασία [114]:

$$E - T\Delta\varphi = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\left[\frac{q}{2} + 4\sin^2\frac{q}{2}\tan\frac{q}{2}\cdot e^{-(q+\Delta\varphi)\cdot\cot\frac{q}{2}}\right], \quad q \equiv 2\arcsin\left(\frac{\pi J}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \Delta\phi, \lambda \to \infty. \tag{8.11}$$

Στο παράρτημα Δ΄.2 πολλοί περισσότεροι όροι της (8.11) υπολογίστηκαν με τη Mathematica. Ο κώδικας μπορεί να βρεθεί στο παράρτημα Γ΄.3. Η δομή των κλασικών διορθώσεων πεπερασμένου μεγέθους στη σχέση διασποράς των απλών ακίδων σε πεπερασμένο όγκο είναι πολύ παρόμοια με εκείνη των γιγάντιων μαγνονίων (8.5), ωστόσο τα $\Delta\phi = p$ και $\mathcal{J}$ έχουν ανταλλάξει ρόλους:

$$\mathcal{E} - \frac{p}{2}\bigg|_{\text{clas}} = \frac{q}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{2n-2} \hat{\mathcal{A}}_{nm}(q)\, p^{2n-m-2} e^{-n(q+p)\cot\frac{q}{2}}, \tag{8.12}$$

όπου ξανά όλες οι αρνητικές δυνάμεις της ορμής p απουσιάζουν από την (8.12) (π.χ. $\hat{\mathcal{A}}_{11} = \hat{\mathcal{A}}_{12} = \ldots = 0$, κλπ.). Όλοι οι συντελεστές $\hat{\mathcal{A}}_{n0}$, $\hat{\mathcal{A}}_{n1}$, $\hat{\mathcal{A}}_{n2}$ στη (8.12) υπολογίστηκαν στην εργασία [2]. Θα ασχοληθούμε με την εργασία [2] στις §8.1–§8.4 πιο κάτω. Προς το παρόν ας διατυπώσουμε απλά τα αποτελέσματα για τις απλές ακίδες. Οι κυρίαρχοι, επόμενοι και μεθεπόμενοι συντελεστές ($\hat{\mathcal{A}}_{n0}$, $\hat{\mathcal{A}}_{n1}$, $\hat{\mathcal{A}}_{n2}$) της (8.12), στο κλασσικό τμήμα της σχέσης διασποράς των στοιχειωδών απλών ακίδων ($0 \le 1/\omega < |v| \le 1$) μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια της συνάρτησης W του Lambert ως ακολούθως:

- κυρίαρχοι όροι: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mathcal{A}}_{n0}(q)\; p^{2n-2}\, e^{-n\,\mathcal{R}} = -\frac{1}{p^2}\sin^4\frac{q}{2}\,\tan\frac{q}{2}\left[W + \frac{W^2}{2}\right].$

- επόμενοι όροι: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \hat{\mathcal{A}}_{n1}(q)\; p^{2n-3}\, e^{-n\,\mathcal{R}} = \frac{1}{p^3}\sin^6\frac{q}{2}\left\{\left[\left(\sec^2\frac{q}{2} + 2q\csc q - \frac{1}{2}\right)\right]W^2 + \left[5 + 3\sec^2\frac{q}{2}\right]\frac{W^3}{6}\right\}.$

- μεθεπόμενοι όροι: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \hat{\mathcal{A}}_{n2}(q)\; p^{2n-4}\, e^{-n\,\mathcal{R}} = \frac{1}{64\,p^4}\sin^4\frac{q}{2}\tan^3\frac{q}{2}\Bigg\{2\left(5 + 7\cos q - 8q\cot\frac{q}{2}\right)^2\frac{W^2}{1+W} - \Big(96\cdot$

$$\cdot q^2\cot^2\frac{q}{2} - 52q\csc^4\frac{q}{2}\sin^3 q + 45\cos 2q + 148\cos q + 79\Big)W^2 - \Big(16q\,(11 + 5\cos q)\cot\frac{q}{2} - 37\cos 2q - 172\cos q - 79\Big)W^3$$

$$- (11\cos 2q + 64\cos q + 85)\,W^4\Bigg\},$$

όπου το όρισμα της συνάρτησης Lambert ισούται με $W\left(4p^2\csc^2(q/2)\,e^{-\mathcal{R}}\right)$, στον κύριο κλάδο W_0, $\mathcal{R} \equiv (p+q)\cot q/2$ και $\sin q/2 \equiv \mathcal{J}$. Στη διπλή περιοχή των απλών ακίδων ($0 \le 1/\omega \le 1 \le |v|$) το όρισμα της συνάρτησης Lambert γράφεται $W\left(-4p^2\csc^2(q/2)\,e^{-\mathcal{R}}\right)$, και οι αντίστοιχοι συντελεστές των κυρίαρχων και επόμενων σειρών $\hat{\mathcal{A}}_{n0}$, $\hat{\mathcal{A}}_{n1}$ είναι οι ίδιοι με εκείνους στη στοιχειώδη περιοχή. Η μεθεπόμενη σειρά $\hat{\mathcal{A}}_{n2}$ στη διπλή περιοχή δίνεται από:

- μεθεπόμενοι όροι: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \hat{\mathcal{A}}_{n2}(q)\; p^{2n-4}\, e^{-n\,\mathcal{R}} = \frac{1}{64\,p^4}\sin^4\frac{q}{2}\tan^3\frac{q}{2}\Bigg\{2\left(5 + 7\cos q - 8q\cot\frac{q}{2}\right)^2\frac{W^2}{1+W} - \Big(96\cdot$

$$\cdot q^2 \cot^2 \frac{q}{2} - 52 q \csc^4 \frac{q}{2} \sin^3 q + 45 \cos 2q + 276 \cos q - 256 \csc^2 \frac{q}{2} + 463\Big) W^2 - \Big(16q(11 + 5\cos q) \cot \frac{q}{2} - 37 \cos 2q -$$

$$-172 \cos q - 79\Big) W^3 - (11 \cos 2q + 64 \cos q + 85)\, W^4 \Bigg\}.$$

Οι όροι με κόκκινο χρώμα απουσιάζουν από την αντίστοιχη φόρμουλα στη στοιχειώδη περιοχή. Οι συντελεστές $\hat{\mathcal{A}}_{n0}$, $\hat{\mathcal{A}}_{n1}$, $\hat{\mathcal{A}}_{n2}$ μπορούν να υπολογιστούν από το ανάπτυγμα Taylor (Γ′.3) της συνάρτησης W του Lambert. Είναι σε πλήρη συμφωνία με τη φόρμουλα των Ahn-Bozhilov (8.11) και τα αποτελέσματα (Δ′.14)–(Δ′.15) του παραρτήματος Δ′.2 που υπολογίστηκαν με τη Mathematica.

Ας δούμε ακόμη και τη μέθοδο με τη οποία εξάγονται οι κλασσικοί συντελεστές στη στοιχειώδη και τη διπλή περιοχή των γιγάντιων μαγνονίων. Σε αντίθεση με τις χορδές GKP όπου ξεκινούσαμε από το 2×2 σύστημα εξισώσεων (5.16)–(5.17), στη περίπτωση των γιγάντιων μαγνονίων/απλών ακίδων ξεκινάμε με ένα 3×3 σύστημα:

$$\mathcal{E} = d\,(a, x) \ln x + h\,(a, x) \tag{8.13}$$

$$\mathcal{J} = c\,(a, x) \ln x + b\,(a, x) \tag{8.14}$$

$$p = f\,(a, x) \ln x + g\,(a, x)\,, \tag{8.15}$$

όπου για τα στοιχειώδη γιγάντια μαγνόνια ισχύει $x = 1 - \eta$, ο ορισμός του η δίνεται στην εξίσωση (7.10) και $v \equiv \cos a$. Με $d\,(a, x)$, $h\,(a, x)$, $c\,(a, x)$, $b\,(a, x)$, $f\,(a, x)$, $g\,(a, x)$ συμβολίζονται οι συντελεστές των σειρών (7.11), (7.12) και (7.9), εκπεφρασμένοι συναρτήσει των μεταβλητών x και a. Το σύστημα (8.13)–(8.15) μπορεί να λυθεί ως εξής. Πρώτα απαλείφουμε το λογάριθμο από τις εξισώσεις (8.14)–(8.15), παίρνοντας μια εξίσωση $p = p\,(\mathcal{J}, a, x)$ της γραμμικής ορμής συναρτήσει της διατηρούμενης στροφορμής $\mathcal{J}$ και των παραμέτρων a και x. Έπειτα το $p\,(\mathcal{J}, a, x)$ αναπτύσσεται σε διπλή σειρά ως προς τις μεταβλητές a και x και αντιστρέφεται ως προς το $a = a\,(x, p, \mathcal{J})$. Το $a\,(x, p, \mathcal{J})$ εισάγεται στις εξισώσεις (8.13)–(8.14), οδηγώντας σε ένα σύστημα όπως το (5.16)–(5.17):

$$\mathcal{E} = d\,(x, p, \mathcal{J}) \ln x + h\,(x, p, \mathcal{J}) \tag{8.16}$$

$$\mathcal{J} = c\,(x, p, \mathcal{J}) \ln x + b\,(x, p, \mathcal{J})\,. \tag{8.17}$$

Η μέθοδος της §5 μπορεί τώρα να εφαρμοσθεί προκειμένου να απαλειφθεί η μεταβλητή x από το σύστημα (8.16)–(8.17) και να ληφθεί η σχέση διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων $\gamma \equiv \mathcal{E} - \mathcal{J} = \gamma\,(p, \mathcal{J})$ ως προς τις ορμές p και $\mathcal{J}$.

Ο αλγόριθμος είναι ακριβώς ο ίδιος για τα γιγάντια μαγνόνια στη διπλή περιοχή, εκτός του ότι τα $\widetilde{x} = 1 - 1/\eta$ και η ορίζονται μέσω της εξίσωσης (7.19), ενώ τα $d\,(a, \widetilde{x})$, $h\,(a, \widetilde{x})$, $c\,(a, \widetilde{x})$, $b\,(a, \widetilde{x})$, $f\,(a, \widetilde{x})$, $g\,(a, \widetilde{x})$ προκύπτουν από τις σειρές (7.20), (7.21) και (7.18).

Για την περίπτωση των απλών ακίδων με μεγάλη ορμή, θέτουμε $a \equiv \arccos 1/\omega$ και απαλείφουμε το λογάριθμο από τις εξισώσεις (8.14)–(8.15). Έτσι οδηγούμαστε σε μια έκφραση $\mathcal{J} = \mathcal{J}\,(a, x, p)$ για τη στροφορμή η οποία στη συνέχεια αντιστρέφεται ως προς το $a = a\,(x, p, \mathcal{J})$ και εισάγεται στις εξισώσεις (8.13), (8.15). Το 2×2 σύστημα που προκύπτει

$$\mathcal{E} = d\,(x, p, \mathcal{J}) \ln x + h\,(x, p, \mathcal{J}) \tag{8.18}$$

$$p = f\,(x, p, \mathcal{J}) \ln x + g\,(x, p, \mathcal{J})\,, \tag{8.19}$$

μπορεί να λυθεί όπως το αντίστοιχο σύστημα για τις χορδές GKP (5.16)–(5.17) στην §5. Για τις απλές ακίδες στη στοιχειώδη περιοχή, ισχύει $x = 1 - \eta$, όπου το η ορίζεται στην εξίσωση (7.28) και $1/\omega \equiv \cos a$. Οι συντελεστές $d\,(a, x)$, $h\,(a, x)$, $c\,(a, x)$, $b\,(a, x)$, $f\,(a, x)$, $g\,(a, x)$ ορίζονται από τις σειρές (7.29), (7.30) και (7.27). Οι απλές ακίδες στη διπλή περιοχή έχουν $\widetilde{x} = 1 - 1/\eta$ και το η ορίζεται στη εξίσωση (7.37).

Ο συντελεστές $d\left(a,\widetilde{x}\right)$, $h\left(a,\widetilde{x}\right)$, $c\left(a,\widetilde{x}\right)$, $b\left(a,\widetilde{x}\right)$, $f\left(a,\widetilde{x}\right)$, $g\left(a,\widetilde{x}\right)$ ορίζονται από τις σειρές (7.38), (7.39) και (7.36).

Αυτή ενότητα έχει οργανωθεί ως εξής. Στην §8.1 πρόκειται να εφαρμόσουμε τον παραπάνω αλγόριθμο στην περίπτωση των στοιχειωδών γιγάντιων μαγνονίων ($0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$) και στην §8.2 θα εφαρμοσθεί στα διπλά γιγάντια μαγνόνια ($0 \leq |v| \leq 1 \leq 1/\omega$). Στις §8.3–§8.4, θα ασχοληθούμε με τις στοιχειώδεις ($0 \leq 1/\omega < |v| \leq 1$) και τις «διπλές» ($0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$) απλές ακίδες αντίστοιχα.

8.1 Γιγάντιο Μαγνόνιο, Στοιχειώδης Περιοχή: $0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$

Ας ξεκινήσουμε με τα στοιχειώδη γιγάντια μαγνόνια για τα οποία,

$$0 \leq |v| \leq 1/\omega \leq 1. \tag{8.20}$$

Όπως έχουμε ήδη πει, τα γιγάντια μαγνόνια στη στοιχειώδη περιοχή είναι τοξοειδείς ανοικτές χορδές στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ που εκτείνονται μεταξύ των παραλλήλων ζ_ω και ζ_v:

$$0 \leq R^2 \left[1 - \frac{1}{\omega^2}\right] \equiv \zeta_\omega = z_{\text{min}}^2 \leq z^2 \leq z_{\text{max}}^2 = \zeta_v \equiv R^2\left(1 - v^2\right) \leq R^2. \tag{8.21}$$

αν ορίσουμε τη μεταβλητή x ως

$$x \equiv 1 - \eta = \frac{z_{\text{min}}^2}{z_{\text{max}}^2} = \frac{\omega^2 - 1}{\omega^2\left(1 - v^2\right)}, \tag{8.22}$$

λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\pi\, E}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{1 - v^2}}{\sqrt{1 - x\left(1 - v^2\right)}}\,\left(1 - x\right) \cdot \mathbb{K}\left(1 - x\right) \tag{8.23}$$

$$\mathcal{J} \equiv \frac{\pi\, J}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{1 - v^2}\,\big(\mathbb{K}\left(1 - x\right) - \mathbb{E}\left(1 - x\right)\big) \tag{8.24}$$

$$\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{J} = \sqrt{1 - v^2}\,\left\{\mathbb{E}\left(1 - x\right) - \left(1 - \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x\left(1 - v^2\right)}}\right)\mathbb{K}\left(1 - x\right)\right\} \tag{8.25}$$

$$p = \frac{1}{v}\frac{1}{\sqrt{1 - x\left(1 - v^2\right)} \cdot \mathbb{K}\left(x\right)}\left\{\pi v\sqrt{1 - x\left(1 - v^2\right)} \cdot \mathbb{F}\left(\arcsin\sqrt{1 - v^2}, x\right) + 2\left(1 - x\right)\sqrt{1 - v^2} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left[\mathbb{K}\left(x\right) - \mathbf{\Pi}\left(\frac{x\, v^2}{1 - x\left(1 - v^2\right)}; x\right)\right] \cdot \mathbb{K}\left(1 - x\right)\right\}, \tag{8.26}$$

όπου η (8.26) προκύπτει από την ορμή των γιγάντιων μαγνονίων (7.9) και τη σχέση (Ε΄.14) των πλήρων ελλειπτικών ολοκληρωμάτων του τρίτου είδους. Ας δούμε τώρα πως ο αλγόριθμος που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε τη σχέση διασποράς των στοιχειωδών γιγάντιων μαγνονίων $\mathcal{E} = \mathcal{E}\left(p, \mathcal{J}\right)$, για μεγάλη αλλά πεπερασμένη στροφορμή $J \to \infty$ και $x \to 0^+$.

8.1.1 Αντίστροφη Ορμή

Πρώτα θα πρέπει να εκφράσουμε την ταχύτητα v των γιγάντιων μαγνονίων συναρτήσει των ορμών p και $\mathcal{J}$. Οι σχέσεις (8.23)–(8.26) έχουν μια λογαριθμική ιδιομορφία στη θέση $x \to 0^+$ την οποία κληρονομούν από τις ακόλουθες δύο ελλειπτικές συναρτήσεις:

$$\mathbb{K}\left(1-x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(d_n\ln x+h_n\right) \tag{8.27}$$

$$\mathbb{K}\left(1-x\right)-\mathbb{E}\left(1-x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(c_n\ln x+b_n\right). \tag{8.28}$$

Οι συντελεστές των σειρών (8.27) και (8.28) είναι οι ακόλουθοι:

$$d_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2, \qquad h_n=-4\,d_n\cdot\left(\ln 2+H_n-H_{2n}\right)$$

$$c_n=-\frac{d_n}{2n-1}, \qquad b_n=-4\,c_n\cdot\left[\ln 2+H_n-H_{2n}+\frac{1}{2\left(2n-1\right)}\right], \tag{8.29}$$

όπου $n=0\,,1\,,2\,,\ldots$ Αν απαλείψουμε τους λογάριθμους από τις εξισώσεις (8.24), (8.26), οδηγούμαστε στην

$$p=\frac{\pi\cdot\mathbb{F}\left(a,x\right)}{\mathbb{K}\left(x\right)}+\frac{2\left(1-x\right)\tan a}{\mathbb{K}\left(x\right)\sqrt{1-x\sin^2 a}}\cdot\left[\mathbb{K}\left(x\right)-\mathbf{\Pi}\left(\frac{x\,\cos^2 a}{1-x\sin^2 a};x\right)\right]\cdot\left\{\sum_{n=0}^{\infty}h_nx^n+\frac{\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n}{\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\mathcal{J}\csc a-\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)\right\}, \tag{8.30}$$

όπου $v=\cos a$ $(\arccos 1/\omega\leq a\leq\pi/2)$. Η εξίσωση (8.30) για το $p=p\left(\mathcal{J},a,x\right)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε διπλή σειρά γύρω από το $x=0$ και το $a=p/2$ και στη συνέχεια να αντιστραφεί ως προς τη μεταβλητή a με τη Mathematica. Βλέπε την εξίσωση (Δ΄.10), στο παράρτημα Δ΄.2. Κατόπιν μπορούμε να εισάγουμε το $a\left(x,p,\mathcal{J}\right)$ στις εξισώσεις (8.24)–(8.25) και να εφαρμόσουμε τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε στην περίπτωση των χορδών GKP, προκειμένου να αντιστρέψουμε την εξίσωση (8.24) υπολογίζοντας την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x=x\left(p,\mathcal{J}\right)$. Αν αντικαταστήσουμε το $x\left(p,\mathcal{J}\right)$ που βρήκαμε στη σχέση των ανώμαλων διαστάσεων (8.25), λαμβάνουμε τη σχέση διασποράς των στοιχειωδών γιγάντιων μαγνονίων συναρτήσει της συνάρτησης W.

8.1.2 Αντίστροφη Συνάρτηση Σπίν

Όπως είπαμε ήδη, η ταχύτητα $v=\cos a\left(x,p,\mathcal{J}\right)$ που βρήκαμε στην προηγούμενη υποενότητα θα πρέπει να εισαχθεί στην εξίσωση (8.24) για το σπίν του γιγάντιου μαγνονίου και η προκύπτουσα σειρά για τη στροφορμή $\mathcal{J}=\mathcal{J}\left(x,p\right)$ θα πρέπει να αντιστραφεί ως προς την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x=x\left(p,\mathcal{J}\right)$. Αντικαθιστώντας το $x\left(p,\mathcal{J}\right)$ στη σχέση των $\gamma=\gamma\left(x,p\right)$ που δίδεται στην εξίσωση (8.25), βρίσκουμε το $\gamma=\gamma\left(p,\mathcal{J}\right)$. Ας λύσουμε όμως πρώτα την εξίσωση (8.24) ως προς το $\ln x$:

$$\mathcal{J}=\sin a\left(x,p,\mathcal{J}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Big(c_n\ln x+b_n\Big)\Rightarrow\ln x=\left[\frac{\mathcal{J}\csc a-b_0}{c_0}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{c_0}\,x^n\right]\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{c_0}\,x^k\right)^n. \tag{8.31}$$

Η (8.31) μπορεί να γραφτεί σαν μία σειρά της ακόλουθης μορφής (βλέπε (5.21)–(5.72)):

$$x = x_0 \cdot \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n\, x^n\right] = x_0 \cdot \exp\left(\mathrm{a}_1\, x + \mathrm{a}_2\, x^2 + \mathrm{a}_3\, x^3 + \ldots\right), \tag{8.32}$$

όπου οι συντελεστές $\mathrm{a}_n = \mathrm{a}_n\,(p, \mathcal{J})$ μπορούν να υπολογιστούν από την (8.31). Ορίσαμε επίσης:

$$x_0 \equiv \exp\left[\frac{\mathcal{J}\csc\frac{p}{2} - b_0}{c_0}\right] = 16\, e^{-2\mathcal{J}\csc\frac{p}{2} - 2} \tag{8.33}$$

που λύνει την (8.31) σε κατώτερη τάξη ως προς τη μεταβλητή x. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση των Lagrange-Bürmann (5.22) προκειμένου να αντιστρέψουμε τη σειρά (8.32). Βρίσκουμε:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n \cdot \sum_{k,j_i=0}^{n-1} \frac{n^k}{n!} \binom{n-1}{j_1\,,\; j_2\,,\; \ldots\,,\; j_{n-1}} \mathrm{a}_1^{j_1}\, \mathrm{a}_2^{j_2} \ldots \mathrm{a}_{n-1}^{j_{n-1}}, \tag{8.34}$$

όπου

$$j_1 + j_2 + \ldots + j_{n-1} = k \quad \& \quad j_1 + 2\, j_2 + \ldots + (n-1)\, j_{n-1} = n - 1.$$

Αναπτύσσοντας την (8.31) μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα a_n έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\mathrm{a}_n = \sum_{m=0}^{n+1} \mathrm{a}_{nm} \mathcal{J}^m, \tag{8.35}$$

όπου τα a_{nm} είναι γνωστές συναρτήσεις της ορμής/γωνιακής έκτασης p. Αν εισάγουμε τους συντελεστές (8.35) στη σχέση (8.34), χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$\left.\begin{aligned} j_1 + j_2 + \ldots + j_{n-1} = k \\ j_1 + 2\, j_2 + \ldots + (n-1)\, j_{n-1} = n - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow k + j_2 + \ldots + (n-2)\, j_{n-1} = n - 1, \tag{8.36}$$

μπορούμε ακόμη να δείξουμε ότι η σειρά για την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x\,(p, \mathcal{J})$, έχει την ακόλουθη γενική μορφή:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_0^n \cdot \sum_{m=0}^{2n-2} \widetilde{a}_{nm} \mathcal{J}^m, \tag{8.37}$$

όπου οι $\widetilde{a}_{nm}$ εξαρτώνται από την ορμή p. Τα $\widetilde{a}_{nm}$ υπολογίζονται συναρτήσει των a_{nm} στην εξίσωση (8.35), αντικαθιστώντας τα (8.35) στη σχέση (8.34). Το αποτέλεσμα θα πρέπει να συμπίπτει με την εξίσωση (Δ′.11), όπου το x υπολογίστηκε με τη Mathematica. Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι κυρίαρχες ως προς $\mathcal{J}$ συνεισφορές στο x (ήτοι οι όροι $\widetilde{a}_{n,2n-2}$) καθορίζονται από το a_{12}, οι επόμενες ως προς $\mathcal{J}$ συνεισφορές στο x (όροι $\widetilde{a}_{n,2n-3}$) καθορίζονται από τα a_1 και a_{23}, κ.ο.κ. μέχρι τον όρο $\widetilde{a}_{nn}$. Με άλλα λόγια, όλοι οι συντελεστές του $x\,(\mathcal{J})$ μέχρι τον $x_0^n\, \mathcal{J}^{2n-2-\mathfrak{m}}$ $(0 \leq \mathfrak{m} \leq n-2)$ καθορίζονται από τα $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_{\mathfrak{m}}$ και το $\mathrm{a}_{\mathfrak{m}+1,\mathfrak{m}+2}$. Οι επόμενοι όροι $\widetilde{a}_{n0}, \ldots, \widetilde{a}_{n,n-1}$ (που πολλαπλασιάζουν το $x_0^n\, \mathcal{J}^m$ για $0 \leq m \leq n-1$) καθορίζονται από τους συντελεστές $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_{n-2}$ και τον $\mathrm{a}_{n-1,m}$. Για να αποδείξουμε όλα αυτά, η σχέση (8.35) θα πρέπει να εισαχθεί στην εξίσωση (8.34). Βρίσκουμε τότε:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} \cdot \Bigg\{ n^{n-1} \mathrm{a}_1^{n-1} + (n-1)\,(n-2)\, n^{n-2} \mathrm{a}_1^{n-3} \mathrm{a}_2 + (n-1)\,(n-2)\,(n-3)\, n^{n-3} \Bigg[\mathrm{a}_1^{n-4} \mathrm{a}_3 +$$

$$+\frac{1}{2}(n-4)\,\mathrm{a}_1^{n-5}\mathrm{a}_2^2\Big]+\ldots\Big\}. \tag{8.38}$$

Για να υπολογίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση σπίν x, θα πρέπει να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_1, a_2, a_3 από την εξίσωση (8.31) και να τους αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (8.38). Εδώ θα κρατήσουμε μόνο τους κυρίαρχους, επόμενους και μεθεπόμενους όρους και θα αγνοήσουμε όλες τις συνεισφορές ανώτερης τάξης. Εν συνεχεία θα πρέπει να εκφράσουμε τη σειρά που προκύπτει με τη συνάρτηση W του Lambert, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Γ′.8)–(Γ′.13) του παραρτήματος Γ′. Το τελικό αποτέλεσμα για την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x\,(p, \mathcal{J})$ είναι:

$$x = -\frac{1}{\mathcal{J}^2}\tan^2\frac{p}{2}\cdot W + \frac{1}{8\mathcal{J}^3}\tan^3\frac{p}{2}\sec\frac{p}{2}\cdot\left[\frac{7\cos p-3}{1+W}-(\cos p-5)\right]\cdot W^2 - \frac{1}{64\mathcal{J}^4}\tan^4\frac{p}{2}\sec^2\frac{p}{2}\cdot$$
$$\cdot\left\{\frac{1}{2}(7\cos p-3)^2\frac{W}{(1+W)^3}-\frac{1}{6}(241\cos 2p-924\cos p+731)\frac{W}{1+W}-\frac{1}{3}(335\cos p-463)\cdot\right.$$
$$\left.\sin^2\frac{p}{2}\cdot W-\frac{1}{12}(41\cos 2p-1284\cos p+667)\,W^2-\frac{1}{3}(\cos 2p+36\cos p-85)\,W^3\right\}+\ldots \tag{8.39}$$

Τα ορίσματα των συναρτήσεων W του Lambert στην (8.39) είναι $W\left(-16\mathcal{J}^2\cot^2(p/2)\,e^{-2\mathcal{J}\csc p/2-2}\right)$ στον κύριο κλάδο W_0. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor για τη συνάρτηση W στον W_0 κλάδο (Γ′.3) για να αναπτύξουμε την εξίσωση (8.39) ως προς $\mathcal{J}\to\infty$, ανακτούμε τους κυρίαρχους, επόμενους και μεθεπόμενους όρους της αντίστροφης συνάρτησης σπίν. Αυτοί συμφωνούν με την αντίστροφη συνάρτηση σπίν (Δ′.11) που βρέθηκε στο παράρτημα Δ′.2 με τη Mathematica. Ας ορίσουμε επίσης:

$$x_{(\mathrm{L})} = -\frac{1}{\mathcal{J}^2}\tan^2\frac{p}{2}\cdot W \tag{8.40}$$

$$x_{(\mathrm{NL})} = \frac{1}{8\mathcal{J}^3}\tan^3\frac{p}{2}\sec\frac{p}{2}\cdot\left[\frac{7\cos p-3}{1+W}-(\cos p-5)\right]\cdot W^2 \tag{8.41}$$

$$x_{(\mathrm{NNL})} = -\frac{1}{64\mathcal{J}^4}\tan^4\frac{p}{2}\sec^2\frac{p}{2}\cdot\left\{\frac{1}{2}(7\cos p-3)^2\frac{W}{(1+W)^3}-\frac{1}{6}(241\cos 2p-924\cos p+731)\frac{W}{1+W}-\right.$$
$$-\frac{1}{3}(335\cos p-463)\sin^2\frac{p}{2}\cdot W-\frac{1}{12}(41\cos 2p-1284\cos p+667)\,W^2-$$
$$\left.-\frac{1}{3}(\cos 2p+36\cos p-85)\,W^3\right\}. \tag{8.42}$$

8.1.3 Σχέση Διασποράς

Προκειμένου να υπολογίσουμε το κλασικό μέρος της σχέσης διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων πεπερασμένου μεγέθους, θα πρέπει να εισαγάγουμε την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x\,(p, \mathcal{J})$ της (8.39) που βρήκαμε στην προηγούμενη ενότητα, στη σχέση $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{J}$ της εξίσωσης (8.25). Αναπτύσσουμε πρώτα την (8.25) γύρω από το $x \to 0^+$ χρησιμοποιώντας τις σειρές (8.27)–(8.28):

$$\mathcal{E} - \mathcal{J} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\left(f_n\,\ln x + g_n\right), \tag{8.43}$$

όπου οι συντελεστές f_n και g_n είναι συναρτήσεις των x, p και $\mathcal{J}$. Ορίζονται ως εξής:

$$f_n \equiv \sin a \left[\frac{1-x}{\sqrt{1-x\sin^2 a}}\, d_n - c_n\right], \quad g_n \equiv \sin a \left[\frac{1-x}{\sqrt{1-x\sin^2 a}}\, h_n - b_n\right], \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{8.44}$$

Στη συνέχεια εισάγουμε την υπολογισθείσα τιμή για το $\sin a\,(x,p,\mathcal{J})$ (όπως δίνεται από την εξίσωση (Δ'.10) στο παράρτημα Δ'.2) στην (8.44), και αντικαθιστούμε το $\ln x/x_0$ από το ίσο του στην εξίσωση (8.32). Η σχέση διασποράς (8.43) γράφεται τότε ως εξής:

$$\mathcal{E}-\mathcal{J} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(f_n \,\ln x + g_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[A_n + f_n \,\ln\frac{x}{x_0}\right] = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \left[A_n + \sum_{k=1}^{n} f_{n-k}\cdot \mathrm{a}_k\right], \tag{8.45}$$

όπου τώρα οι f_n και g_n είναι συναρτήσεις αποκλειστικά της ορμής p και του σπίν $\mathcal{J}$. Τα A_n είναι ίσα με

$$A_n \equiv g_n + f_n \ln x_0 = g_n + 2 f_n \,\left(2\ln 2 - \mathcal{J}\csc\frac{p}{2} - 1\right). \tag{8.46}$$

Εν γένει τα A_n και τα f_n έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$A_n = \sum_{m=0}^{n} A_{nm}\mathcal{J}^m \quad \& \quad f_n = \sum_{m=0}^{n-1} f_{nm}\mathcal{J}^m, \tag{8.47}$$

όπου τα A_{nm} και τα f_{nm} είναι γνωστές συναρτήσεις της ορμής p. Μπορούμε τώρα να γράψουμε όλους τους όρους στο ανάπτυγμα (8.45) που συνεισφέρουν στις ανώμαλες διαστάσεις μέχρι την μεθεπόμενη (NNL) τάξη. Στην (8.45) κάνουμε τις αντικαταστάσεις (8.35), (8.47) και $x = x_{(\mathrm{L})} + x_{(\mathrm{NL})} + x_{(\mathrm{NNL})} + \ldots$, παίρνοντας:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}-\mathcal{J} =& A_0 + \left\{A_1 x_{(\mathrm{L})} + \left(A_{22} + f_1 \mathrm{a}_{12}\right)\mathcal{J}^2 x_{(\mathrm{L})}^2\right\} + \left\{A_1 x_{(\mathrm{NL})} + \left(A_{21} + f_1\mathrm{a}_{11}\right)\mathcal{J} x_{(\mathrm{L})}^2 + \right. \\ & \left. + 2\left(A_{22} + f_1\mathrm{a}_{12}\right)\mathcal{J}^2 x_{(\mathrm{L})} x_{(\mathrm{NL})} + \left(A_{33} + f_1\mathrm{a}_{23} + f_{21}\mathrm{a}_{12}\right)\mathcal{J}^3 x_{(\mathrm{L})}^3\right\} + \left\{A_1 x_{(\mathrm{NNL})} + \right. \\ & + \left(A_{20} + f_1\mathrm{a}_{10}\right) x_{(\mathrm{L})}^2 + 2\left(A_{21} + f_1\mathrm{a}_{11}\right)\mathcal{J} x_{(\mathrm{L})} x_{(\mathrm{NL})} + \left(A_{22} + f_1\mathrm{a}_{12}\right)\mathcal{J}^2\left(x_{(\mathrm{NL})}^2 + 2 x_{(\mathrm{L})} x_{(\mathrm{NNL})}\right) + \\ & + \left(A_{32} + f_1\mathrm{a}_{22} + f_{21}\mathrm{a}_{11} + f_{20}\mathrm{a}_{12}\right)\mathcal{J}^2 x_{(\mathrm{L})}^3 + 3\left(A_{33} + f_1\mathrm{a}_{23} + f_{21}\mathrm{a}_{12}\right)\mathcal{J}^3 x_{(\mathrm{L})}^2 x_{(\mathrm{NL})} + \\ & \left. + \left(A_{44} + f_1\mathrm{a}_{34} + f_{21}\mathrm{a}_{23} + f_{32}\mathrm{a}_{12}\right)\mathcal{J}^4 x_{(\mathrm{L})}^4\right\},\end{aligned} \tag{8.48}$$ [36]

Εισάγοντας τις (8.40)–(8.42) σε αυτή τη σχέση και κάνοντας τις πράξεις, βρίσκουμε την ακόλουθη NNLO σχέση ενέργειας-σπίν στη στοιχειώδη περιοχή των γιγάντιων μαγνονίων:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}-\mathcal{J} =& \sin\frac{p}{2} + \frac{1}{4\mathcal{J}^2}\tan^2\frac{p}{2}\sin^3\frac{p}{2}\left[W + \frac{W^2}{2}\right] - \frac{1}{16\mathcal{J}^3}\tan^4\frac{p}{2}\sin^2\frac{p}{2}\Big[\left(3\cos p + 2\right)W^2 + \\ & + \frac{1}{6}\left(5\cos p + 11\right)W^3\Big] - \frac{1}{512\mathcal{J}^4}\tan^6\frac{p}{2}\sin\frac{p}{2}\Big\{\left(7\cos p - 3\right)^2\frac{W^2}{1+W} -\end{aligned}$$

[36] Επίσης χρησιμοποιούμε $A_1 = A_{10}$.

$$-\frac{1}{2}\left(25\cos 2p-188\cos p-13\right)W^2-\frac{1}{2}\left(47\cos 2p+196\cos p-19\right)W^3-$$

$$\left.-\frac{1}{3}\left(13\cos 2p+90\cos p+137\right)W^4\right\}+\ldots, \tag{8.49}$$

όπου τα ορίσματα των W-συναρτήσεων είναι $W\left(-16\mathcal{J}^2\cot^2\left(p/2\right)e^{-2\mathcal{J}\csc p/2-2}\right)$, ξανά στον κύριο κλάδο W_0. Αν αναπτύξουμε την (8.49) γύρω από το $\mathcal{J}\to\infty$, ανακτούμε τους κυρίαρχους, επόμενους και μεθεπόμενους όρους της σχέσης διασποράς του στοιχειώδους γιγάντιου μαγνονίου. Όλοι αυτοί συμφωνούν με το ανάπτυγμα μεγάλου σπίν (Δ΄.12) των ανώμαλων διαστάσεων που υπολογίστηκε στο παράρτημα Δ΄.2 με τη Mathematica. Τα αποτελέσματά μας συμφωνούν επίσης και με τις διορθώσεις πεπερασμένου μεγέθους του γιγάντιου μαγνονίου των Arutyunov, Frolov και Zamaklar (8.4), καθώς και αυτές των Klose και McLoughlin (8.6). Για $p=\pi$, η (8.49) γράφεται:

$$\mathcal{E}-\mathcal{J}=1-4e^{-2\mathcal{J}-2}+4\left(4\mathcal{J}-1\right)e^{-4\mathcal{J}-4}-128\mathcal{J}^2e^{-6\mathcal{J}-6}. \tag{8.50}$$

Υπερθέτοντας δύο τέτοια γιγάντια μαγνόνια με στροφορμές ίσες προς $\mathcal{J}/2$, βρίσκουμε τους λίγους πρώτους όρους της σχέσης διασποράς των μεγάλων και διπλωμένων χορδών GKP στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$, (Δ΄.3).

8.2 Γιγάντιο Μαγνόνιο, Διπλή Περιοχή: $0\leq|v|\leq1\leq1/\omega$

Όπως είπαμε, μπορούμε να ακολουθήσουμε τον ακριβώς ίδιο αλγόριθμο της προηγούμενης ενότητας για να βρούμε το κλασικό μέρος της σχέσης διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων στη διπλή περιοχή τους. Η μόνη διαφορά είναι ότι χρησιμοποιείται η μεταβλητή $\widetilde{x}=1-1/\eta$ αντί της x, με το η να ορίζεται στην εξίσωση (7.19) και τα διατηρούμενα φορτία της χορδής να δίνονται από τις εξισώσεις (7.18), (7.20), (7.21). Βρίσκουμε:

$$\mathcal{E}-\mathcal{J}=\sin\frac{p}{2}+\frac{1}{4\mathcal{J}^2}\tan^2\frac{p}{2}\sin^3\frac{p}{2}\left[W+\frac{W^2}{2}\right]-\frac{1}{16\mathcal{J}^3}\tan^4\frac{p}{2}\sin^2\frac{p}{2}\left[\left(3\cos p+2\right)W^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}\left(5\cos p+11\right)W^3\right]-\frac{1}{512\mathcal{J}^4}\tan^6\frac{p}{2}\sin\frac{p}{2}\left\{\left(7\cos p-3\right)^2\frac{W^2}{1+W}-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(25\cos 2p-188\cos p-13\right)W^2-\frac{1}{2}\left(47\cos 2p+196\cos p-19\right)W^3-$$

$$\left.-\frac{1}{3}\left(13\cos 2p+90\cos p+137\right)W^4\right\}+\ldots, \tag{8.51}$$

όπου το όρισμα της συνάρτησης W του Lambert $W\left(16\mathcal{J}^2\cot^2\left(p/2\right)e^{-2\mathcal{J}\csc p/2-2}\right)$ έχει το αντίθετο πρόσημο με πριν και είναι στον κύριο κλάδο W_0. Παρατηρούμε ότι η W-εξάρτηση των (8.51) στην τάξη NNLO είναι η ίδια με την (8.49), παρά το γεγονός ότι η αντίστροφη συνάρτηση σπίν $\widetilde{x}=\widetilde{x}\left(p,\mathcal{J}\right)$ δεν δίνεται από την (8.39). Αν αναπτύξουμε την (8.51) για $\mathcal{J}\to\infty$ ανακτούμε το αποτέλεσμα της Mathematica (Δ΄.13) μέχρι NNLO. Για $p=\pi$, η (8.51) γίνεται:

$$\mathcal{E}-\mathcal{J}=1+4e^{-2\mathcal{J}-2}+4\left(4\mathcal{J}-1\right)e^{-4\mathcal{J}-4}+128\mathcal{J}^2e^{-6\mathcal{J}-6}. \tag{8.52}$$

Αν υπερθέσουμε δύο διπλά γιγάντια μαγνόνια (8.52) με στροφορμές ίσες προς $\mathcal{J}/2$, παίρνουμε τους δύο πρώτους όρους στη σχέση διασποράς των μεγάλων κυκλικών χορδών GKP στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ στην εξίσωση (Δ΄.5).

8.3 Απλή Ακίδα, Στοιχειώδης Περιοχή: $0 \le 1/\omega < |v| \le 1$

Για τις απλές ακίδες στη στοιχειώδη περιοχή, η διαδικασία για να βρούμε την κλασική σχέση διασποράς μέχρι την NNLO τάξη είναι κάπως διαφορετική. Πρέπει να θέσουμε $a \equiv \arccos 1/\omega$ και να απαλείψουμε το λογάριθμο από τις εξισώσεις (7.27) και (7.30). Επίσης $x = 1 - \eta$, όπου το η ορίζεται από τη σχέση (7.28). Η έκφραση $\mathcal{J} = \mathcal{J}\left(a, x, p\right)$ που βρίσκουμε αντιστρέφεται ως προς το $a = a\left(x, p, \mathcal{J}\right)$, το οποίο εισάγεται στις εξισώσεις (7.27), (7.29). Η μεταβλητή x απαλείφεται μετά από το προκύπτον 2×2 σύστημα που περιέχει την ορμή $p = p\left(x, \mathcal{J}\right)$ και την ενέργεια $\mathcal{E} = \mathcal{E}\left(x, \mathcal{J}\right)$. Το αποτέλεσμα είναι:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} - \frac{p}{2} =& \frac{q}{2} - \frac{1}{p^2}\sin^4\frac{q}{2}\,\tan\frac{q}{2}\left[W + \frac{W^2}{2}\right] + \frac{1}{p^3}\sin^6\frac{q}{2}\Bigg\{\left[\left(\sec^2\frac{q}{2} + 2q\csc q - \frac{1}{2}\right)\right]W^2 + \left[5 + 3\sec^2\frac{q}{2}\right]\\ &\cdot\frac{W^3}{6}\Bigg\} + \frac{1}{64\,p^4}\sin^4\frac{q}{2}\tan^3\frac{q}{2}\Bigg\{2\left(5 + 7\cos q - 8q\cot\frac{q}{2}\right)^2\frac{W^2}{1+W} - \Big(96q^2\cot^2\frac{q}{2} - 52q\csc^4\frac{q}{2}\cdot\\ &\cdot\sin^3 q + 45\cos 2q + 148\cos q + 79\Big)W^2 - \Big(16q\left(11 + 5\cos q\right)\cot\frac{q}{2} - 37\cos 2q - 172\cos q -\\ &-79\Big)W^3 - \left(11\cos 2q + 64\cos q + 85\right)W^4\Bigg\} + \ldots \end{aligned} \tag{8.53}$$

Τα ορίσματα των συναρτήσεων W του Lambert είναι $W\left(\pm 4p^2\csc^2\left(q/2\right)e^{-(p+q)\cdot\cot\frac{q}{2}}\right)$ στον κύριο κλάδο W_0. Έχουμε ορίσει επίσης $\mathcal{J} \equiv \sin q/2$. Το πρόσημο μείον στο όρισμα της συνάρτησης W αντιστοιχεί στη στοιχειώδη περιοχή των απλών ακίδων και το πρόσημο συν στη διπλή περιοχή.

8.4 Απλή Ακίδα, Διπλή Περιοχή: $0 \le 1/\omega \le 1 \le |v|$

Για να βρούμε τη σχέση διασποράς στη διπλή περιοχή των απλών ακίδων θέτουμε $\widetilde{x} = 1 - 1/\eta$, με το η να ορίζεται στην εξίσωση (7.37). Μετά ακολουθούμε τον ίδιο αλγόριθμο που ακολουθήσαμε στην περίπτωση των απλών ακίδων της στοιχειώδους περιοχής, για τα διατηρούμενα φορτία (7.36), (7.38), (7.39). Βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} - \frac{p}{2} =& \frac{q}{2} - \frac{1}{p^2}\sin^4\frac{q}{2}\,\tan\frac{q}{2}\left[W + \frac{W^2}{2}\right] + \frac{1}{p^3}\sin^6\frac{q}{2}\Bigg\{\left[\left(\sec^2\frac{q}{2} + 2q\csc q - \frac{1}{2}\right)\right]W^2 + \left[5 + 3\sec^2\frac{q}{2}\right]\\ &\cdot\frac{W^3}{6}\Bigg\} + \frac{1}{64\,p^4}\sin^4\frac{q}{2}\tan^3\frac{q}{2}\Bigg\{2\left(5 + 7\cos q - 8q\cot\frac{q}{2}\right)^2\frac{W^2}{1+W} - \Big(96q^2\cot^2\frac{q}{2} - 52q\csc^4\frac{q}{2}\cdot\\ &\cdot\sin^3 q + 45\cos 2q + 276\cos q - 256\csc^2\frac{q}{2} + 463\Big)W^2 - \Big(16q\left(11 + 5\cos q\right)\cot\frac{q}{2} - 37\cos 2q -\\ &-172\cos q - 79\Big)W^3 - \left(11\cos 2q + 64\cos q + 85\right)W^4\Bigg\} + \ldots \end{aligned} \tag{8.54}$$

Σε αντίθεση με τη σχέση διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων που είχε την ίδια W-εξάρτηση στη στοιχειώδη και τη διπλή περιοχή, η σχέση διασποράς των απλών ακίδων στη στοιχειώδη περιοχή δεν είναι η ίδια με εκείνη στη διπλή περιοχή. Έχουμε σημειώσει τους όρους που διαφέρουν στις εξισώσεις (8.53)–(8.54) με κόκκινο χρώμα. Αμφότερες οι ανώμαλες διαστάσεις συγκλίνουν στη σχέση διασποράς άπειρης ορμής (6.8) για $p=\infty$. Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι και οι δύο εκφράσεις (8.53)–(8.54) είναι σωστές, αν τις αναπτύξουμε για μεγάλη ορμή $p\to\infty$. Ανακτούμε έτσι όλους τους LO, NLO και NNLO όρους των σχέσεων (Δ′.14)–(Δ′.15) που βρέθηκαν με τη Mathematica. Η πρώτη διόρθωση πεπερασμένου μεγέθους της (8.53) συμφωνεί με τη σχέση των Ahn-Bozhilov (8.11).

9 Περίληψη Μέρους II

Στο μέρος II αυτής της διατριβής (§3–§8) μελετήσαμε ελεύθερες περιστρεφόμενες χορδές στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$. Λόγω της αντιστοιχίας AdS/CFT (2.1), οι καταστάσεις ελεύθερων χορδών στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ είναι δυϊκές με τοπικούς τελεστές της επίπεδης $\mathcal{N}=4$ SYM θεωρίας. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη δυαδικότητα προκειμένου να υπολογίσουμε το φάσμα της θεωρίας βαθμίδας σε ισχυρή σύζευξη, όπου οι χορδές είναι ουσιαστικά ασθενώς συζευγμένες ως προς α'. Συγκεκριμένα εστιάσαμε σε δύο θεμελιώδεις καταστάσεις χορδών, τις οποίες και μελετήσαμε λεπτομερώς τόσο σε άπειρο όσο και σε πεπερασμένο μέγεθος: τις χορδές Gubser-Klebanov-Polyakov (GKP) και τα γιγάντια μαγνόνια (GMs)/απλές ακίδες (SSs). Στόχος μας ήταν να υπολογίσουμε τις ανώμαλες διαστάσεις εκείνων των τελεστών της $\mathcal{N}=4$ SYM που είναι δυϊκοί στις παραπάνω καταστάσεις, όπως επίσης και να διερευνήσουμε την πιθανότητα να τις εκφράσουμε σε κλειστές μορφές.

Παρότι οι πλήρεις κλασικές εκφράσεις για το καθένα από τα φορτία των δύο συστημάτων σε ισχυρή σύζευξη είναι γνωστές σε παραμετρική μορφή, σαν συναρτήσεις των ταχυτήτων v και ω των δυϊκών τους χορδών, οι ανώμαλες διαστάσεις πρέπει να εκφρασθούν αποκλειστικά συναρτήσει των διατηρούμενων φορτίων. Μόνο με αυτό τον τρόπο μπορούν να φιλοξενήσουν κβαντικές διορθώσεις και να συγκριθούν με τις αντίστοιχες εκφράσεις σε ασθενή σύζευξη, καμιά από τις οποίες δεν είναι γνωστή σε παραμετρική μορφή.

9.1 Χορδές GKP

Οι χορδές των GKP παρουσιάστηκαν στην §4. Περιλαμβάνουν τις ακόλουθες περιπτώσεις στον AdS_3 και τον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$:

I. κλειστή χορδή που περιστρέφεται στον $\mathrm{AdS}_3\subset\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$.

II. κλειστή χορδή που περιστρέφεται γύρω από τον πόλο του S^2 στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2\subset\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$.

III. κλειστή χορδή που πάλλεται εντός του $\mathrm{AdS}_3\subset\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$.

Καθεμιά από αυτές τις χορδές μελετήθηκε λεπτομερώς. Οι χορδές GKP I και II μπορεί να είναι διπλωμένες ή όχι και μικρές/αργές ή μεγάλες/γρήγορες. Υπακούν κλασικές δυαδικότητες μικρών-μεγάλων και αργών-γρήγορων χορδών, που συνδέουν τις τιμές των διατηρούμενων φορτίων τους στις αντίστοιχες περιοχές. Λύσεις με ενέργεια E και σπίν S ή J μπορούν να συσχετισθούν με λύσεις ενέργειας E' και σπίν S' ή J', μέσω των εξισώσεων (4.38), (4.76)–(4.77). Δεν είναι αναγκαίο όλα τα φορτία να ανήκουν στην ίδια περίπτωση GKP (βλέπε παράρτημα Β′). Όμως όλες οι δυαδικότητες μικρών-μεγάλων και αργών-ταχείων χορδών είναι αμιγώς κλασικές ($\lambda=\infty$). Θα ήταν βεβαίως ιδιαίτερα ενδιαφέρον, αν μπορούσαν να προαχθούν στο κβαντικό επίπεδο ή να βρεθούν τα ανάλογά τους σε ασθενή σύζευξη.

Η σχέση διασποράς των παλλόμενων χορδών εντός του AdS_3 (χορδές GKP III), βρέθηκε με τη μέθοδο WKB. Αυτές οι χορδές είναι δυϊκές στους ακόλουθους τελεστές της $\mathcal{N}=4$ SYM:

$$\mathcal{O}_n=\mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}\mathcal{D}_+^n\mathcal{D}_-^n\mathcal{Z}\right]+\ldots,\quad\lambda\to\infty,\tag{9.1}$$

όπου $\mathcal{Z}$ είναι ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο της $\mathcal{N}=4$ SYM (2.8) και $\mathcal{D}_\pm$ είναι οι παράγωγοι κώνου φωτός (2.9).

Στη §5 υπολογίσαμε το κλασικό μέρος των διορθώσεων πεπερασμένου μεγέθους των αναπτυγμάτων μεγάλου σπίν των σχέσεων διασποράς των τελεστών συστροφής 2 και 2 μαγνονίων της $\mathcal{N}=4$ super Yang-Mills θεωρίας σε ισχυρή σύζευξη:

$$\mathcal{O}_S = Tr\left[\mathcal{D}_+^m \mathcal{Z} \mathcal{D}_+^{S-m} \mathcal{Z}\right] + \ldots \quad \& \quad \mathcal{O}_J = \mathrm{Tr}\left[\mathcal{X} \mathcal{Z}^m \mathcal{X} \mathcal{Z}^{J-m}\right] + \ldots, \quad \lambda, S, J \to \infty, \tag{9.2}$$

όπου $\mathcal{X}$ είναι ένα από τα υπόλοιπα δύο μιγαδικά βαθμωτά πεδία της $\mathcal{N}=4$ SYM (2.8). Οι τελεστές συστροφής 2 και 2 μαγνονίων είναι δυϊκοί σε ημικλασικές χορδές με ένα σπίν που περιστρέφονται εντός των AdS_3 και $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ αντίστοιχα, και είναι γνωστές ως χορδές GKP I και II.

Ακολουθώντας την εργασία [3], χρησιμοποιήσαμε τη φόρμουλα αντιστροφής των Lagrange-Bürmann για να αντιστρέψουμε ορισμένες συναρτήσεις ελλειπτικών ολοκληρωμάτων που σχετίζονται με τις διατηρούμενες στροφορμές των μεγάλων χορδών GKP I και II. Στη συνέχεια εκφράσαμε τις αντίστοιχες σχέσεις διασποράς και τις ανώμαλες διαστάσεις των δυϊκών τους τελεστών στην $\mathcal{N}=4$ SYM (9.2), συναρτήσει της συνάρτησης W του Lambert. Με αυτό τον τρόπο, όχι μόνο καταφέραμε να προβλέψουμε άπειρους και προηγουμένως άγνωστους όρους στις σχέσεις διασποράς των χορδών GKP, αλλά ανακαλύψαμε και συμπαγείς, σχεδόν κλειστές εκφράσεις για τα αντίστοιχα φάσματα.

Η αντιστροφή των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων και των ελλειπτικών συναρτήσεων του Jacobi ως προς την παράμετρο m, αποτελεί έναν ενεργό κλάδο έρευνας στα υπολογιστικά μαθηματικά.[37] Απ'ό,τι φαίνεται η παρουσία της λογαριθμικής ιδιομορφίας για $m=1$ (βλέπε την αντίστοιχη σειρά Taylor των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων στο παράρτημα Ε′) εμποδίζει κάθε πιθανή πρόοδο για τον υπολογισμό των αντίστοιχων αντίστροφων συναρτήσεων. Οι συγγραφείς της εργασίας [3] παρατήρησαν ότι η εξίσωση (5.21) μπορεί να αντιστραφεί με τη φόρμουλα των Lagrange-Bürmann και το αποτέλεσμα μπορεί να εκφραστεί μέσω της συνάρτησης W του Lambert. Για τον AdS_3 η διαδικασία έπρεπε να τροποποιηθεί ελαφρώς λόγω του όρου $1/x$ στο δεξιό μέλος της (5.72). Αυτός ο $1/x$ όρος είναι εκείνος που μας οδηγεί στη χρησιμοποίηση του W_{-1} κλάδου της συνάρτησης W, αντί του W_0 κλάδου και σε λογαριθμικές αντί για εκθετικές διορθώσεις στις αντίστροφες συναρτήσεις σπίν και ανώμαλες διαστάσεις.

Θα ήταν πολύ ενδιαφέρον αν μπορούσαμε να γενικεύσουμε τις εκφράσεις με τη συνάρτηση W (5.64)–(5.65), (5.69)–(5.70) και (5.112)–(5.113) σε όλες τις επόμενες τάξεις, υπό τη μορφή μιας κλειστής έκφρασης, μιας αναδρομικής διαδικασίας ή ενός αλγορίθμου. Φαίνεται πάντως ότι οι συναρτήσεις W του Lambert θα συνεχίσουν να εμφανίζονται και σε όλες τις επόμενες τάξεις. Επιπλέον, θα μπορούσαμε να μελετήσουμε το φαινόμενο της αλλαγής κλάδου στην συνάρτηση W του Lambert. Η μετάβαση από τον κλάδο W_0 της συνάρτησης W στον κλάδο W_{-1} και αντίστροφα, σημαίνει ότι η αντίστροφη συνάρτηση σπίν x είτε απειρίζεται (ήτοι $x \to \pm\infty$) είτε επιδεικνύει μια συμπεριφορά που είναι εντελώς διαφορετική από την $x \to 0$. Στην περίπτωση των χορδών GKP στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$, είδαμε ότι αν αντιστρέψουμε το πρόσημο στο όρισμα της συνάρτησης Lambert (βλέπε (5.65)–(5.70)) πηγαίνουμε από διπλωμένες και ευσταθείς ($\omega > 1$) σε κυκλικές και ασταθείς ($\omega < 1$) χορδές GKP και αντίστροφα. Πιθανόν η σχέση αυτή να μπορεί να γενικευθεί σε κάποια βαθύτερη συμμετρία. Με άλλα λόγια, ο φορμαλισμός με τη συνάρτηση W του Lambert θα μπορούσε να αποκαλύψει τις συμμετρίες (π.χ. τη συμμετρία $W_k\left(\overline{z}\right) = \overline{W_{-k}\left(z\right)}$) που είναι κρυμμένες στα αναπτύγματα μεγάλου σπίν των χορδών εντός του $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$.

Όλες οι εκφράσεις μας για τις μεγάλες/γρήγορες χορδές μπορούν εύκολα να επαληθευτούν με τη Mathematica. Βλέπε το παράρτημα Δ′. Για τις μικρές/αργές χορδές, τα ελλειπτικά ολοκληρώματα δεν έχουν λογαριθμική ιδιομορφία για $m<1$ και οι εκφράσεις για $\mathcal{E}=\mathcal{E}\left(\mathcal{J}\right)$ και $\mathcal{E}=\mathcal{E}\left(\mathcal{S}\right)$ μπορούν να ληφθούν με τη Mathematica αντιστρέφοντας απλά τις αντίστοιχες σειρές. Δεν φαίνεται εντελώς ακατόρθωτο οι μικρές/αργές σειρές (4.30), (4.62), (4.73) να παραμετροποιούνται με τη συνάρτηση W. Θα ήταν ενδιαφέρον να έχουμε συμπαγείς εκφράσεις και για τις μικρές/αργές σειρές. Αυτό θα διευκόλυνε τη σύγκριση μεταξύ των σχέσεων διασποράς των μικρών/αργών χορδών σε καμπύλους χωροχρόνους και εκείνες των κλειστών χορδών που περιστρέφονται σε επίπεδο χωροχρόνο. Οι χορδές σε επίπεδο χωρο-

[37] Βλέπε π.χ. [115].

χρόνο εξετάζονται σύντομα στο παράρτημα Α΄.

Θα άξιζε τον κόπο να διερευνηθεί κατά πόσο οι κβαντικές διορθώσεις σε πεπερασμένο μέγεθος και ισχυρή σύζευξη ή τα ανάλογα των ανώμαλων διαστάσεων των μεγάλων τελεστών συστροφής 2 και 2 μαγνονίων της $\mathcal{N}=4$ SYM σε ασθενή σύζευξη, μπορούν επίσης να εκφρασθούν μέσω της συνάρτησης W. Οι ανώμαλες διαστάσεις μεγάλων τελεστών συστροφής της QCD (που είναι υπεύθυνες για την παραβίαση της διαβάθμισης (scaling) στη βαθιά ανελαστική σκέδαση) μπορούν επίσης να επιδέχονται παραμέτρησης με τη συνάρτηση W σε ισχυρή σύζευξη. Ήδη, η τρέχουσα σταθερά σύζευξης της QCD σε 3 βρόχους είναι γνωστό ότι επιδέχεται παρόμοιας παραμέτρησης με τη συνάρτηση W (βλέπε παράρτημα Γ΄).

Μία ακόμη περίπτωση όπου ο φορμαλισμός με τη συνάρτηση W αναμένεται να εφαρμόζεται, είναι η λύση των εξισώσεων Einstein σε θερμικά υπόβαθρα και γεωμετρίες dilaton (βλέπε π.χ. [116]). Ο λόγος γι'αυτό δεν είναι προφανής αλλά σχετίζεται με όσα είναι γνωστά για την ολογραφική ομάδα επανακανονικοποίησης. Στα πλαίσια της ολογραφίας, οι εξισώσεις Einstein είναι οι εξισώσεις επανακανονικοποίησης ορισμένων κβαντικών θεωριών πεδίου που ζουν στο σύνορο του χωροχρόνου. Οι λύσεις των εξισώσεων επανακανονικοποίησης σε ένα και δύο βρόχους ωστόσο, έχει ήδη δειχθεί ότι εκφράζονται με τη συνάρτηση W του Lambert (βλέπε παράρτημα Γ΄ και τις εκεί παραπομπές). Πράγματι, αποδεικνύεται αυστηρά ότι η λύση των εξισώσεων επανακανονικοποίησης μέχρι την κάθε τάξη βρόχου μπορεί να γραφεί με τη συνάρτηση W του Lambert. Το ότι αυτό είναι εφικτό φαίνεται και από την εξίσωση (5.72), η οποία δεν είναι τίποτε άλλο από την αντιπαράγωγο της γενικής εξίσωσης επανακανονικοποίησης $\beta(x) = \mu^2 dx/d\mu^2 = -x^2 \sum \beta_n x^n$. Στην εργασία [13], αντίστοιχες εκφράσεις με τη συνάρτηση W βρέθηκαν και για τη σχέση διασποράς χορδών που περιστρέφονται εντός του $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{CP}^3$.

9.2 Γιγάντια Μαγνόνια & Απλές Ακίδες

Τα γιγάντια μαγνόνια και οι απλές ακίδες απείρου και πεπερασμένου μεγέθους παρουσιάστηκαν στις §6–§7. Τα γιγάντια μαγνόνια είναι ανοικτές χορδές ενός σπίν στον $\mathbb{R}\times \mathrm{S}^2$ που εκτελούν μια κυματοειδή περιστροφή γύρω από τη δισδιάστατη σφαίρα. Οι απλές ακίδες είναι χορδές με ένα σπίν και μία ακίδα στον $\mathbb{R}\times \mathrm{S}^2$ που είναι τυλιγμένες γύρω από τον ισημερινό της δισδιάστατης σφαίρας και περιστρέφονται γύρω του. Ανάλογα με τις σχετικές τιμές των γωνιακών και γραμμικών τους ταχυτήτων, τα γιγάντια μαγνόνια και οι απλές ακίδες μπορούν να είναι είτε στοιχειώδεις είτε «διπλές». Μπορούμε να μελετήσουμε τη σκέδαση των κλασσικών γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων χρησιμοποιώντας τις εικόνες Pohlmeyer αυτών στην εξίσωση sine-Gordon. Τα γιγάντια μαγνόνια είναι δυϊκά στα (αντι)σολιτόνια της sG ενώ οι απλές ακίδες αντιστοιχούν σε ορισμένες ασταθείς λύσεις της sG. Υπάρχει ένας μετασχηματισμός, συγκεκριμένα ο μετασχηματισμός $\sigma \leftrightarrow \tau$, που μας επιτρέπει να μετασχηματίσουμε μεταξύ των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων, όπως επίσης και τις αναγωγές Pohlmeyer αυτών.

Ο πίνακας σκέδασης των γιγάντιων μαγνονίων απείρου μεγέθους που υπολογίζεται μέσω της αναγωγής Pohlmeyer, συμφωνεί με το όριο ισχυρής σύζευξης του S-πίνακα των μαγνονίων. Ο S-πίνακας των απλών ακίδων απείρου μεγέθους είναι ίσος με εκείνον για τα γιγάντια μαγνόνια, μέχρι μη λογαριθμικούς όρους. Είναι αρκετά δελεαστικό να ρωτήσουμε κατά πόσον η σκέδαση μεταξύ γιγάντιων μαγνονίων και απλών ακίδων είναι εφικτή στο όριο του απείρου μεγέθους.[38] Ωστόσο οι λύσεις της sG που αντιστοιχούν στην απλή ακίδα και το γιγάντιο μαγνόνιο μοιάζουν να ανήκουν σε διαφορετικούς τομείς της θεωρίας, που εμποδίζει την ύπαρξη λύσεων σκέδασης με γιγάντια μαγνόνια και απλές ακίδες ως ασυμπτωτικές καταστάσεις. Η μέθοδος «ένδυσης» ("dressing") επίσης αποτυγχάνει να δώσει τέτοιες λύσεις σκέδασης μεταξύ γιγάντιων μαγνονίων και απλών ακίδων, όπως και η γενίκευση των λύσεων της sG σε λύσεις της μιγαδικής εξίσωσης sine-Gordon. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε ακόμη να προσπαθήσουμε να γράψουμε λύσεις της εξίσωσης sG ή του σίγμα μοντέλου της χορδής, χρησιμοποιώντας την εικόνα των απλών ακίδων ως υπέρθεση άπειρου αριθμού γιγάντιων μαγνονίων.

[38] Ένας διαφορετικός τρόπος για να δούμε το ίδιο πρόβλημα είναι να ρωτήσουμε αν η σκέδαση μεταξύ ενός σιδηρομαγνητικού και ενός αντισιδηρομαγνητικού μαγνονίου είναι δυνατή. Αυτού του είδους τα πειράματα με μαγνόνια δε φαίνονται πια όσο απίθανα έμοιαζαν στο παρελθόν.

Στην §8 υπολογίσαμε το κλασικό μέρος των διορθώσεων πεπερασμένου μεγέθους στις σχέσεις διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων με μεγάλο σπίν και των απλών ακίδων με μεγάλη ορμή. Τα πρώτα είναι δυϊκά σε τελεστές ενός μαγνονίου της $\mathcal{N}=4$ SYM:

$$\mathcal{O}_M = \sum_{m=1}^{J+1} e^{imp} \left|\mathcal{Z}^{m-1}\mathcal{X}\mathcal{Z}^{J-m+1}\right\rangle, \quad p\in\mathbb{R}, \quad \lambda, J\to\infty \tag{9.3}$$

σε ισχυρή σύζευξη. Οι απλές ακίδες είναι δυϊκές στους τελεστές spinon:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{S}} \sim \left|\mathbb{S}^{m-1}\,\mathcal{X}\,\mathbb{S}^{L/2-m}\right\rangle + \ldots, \quad L\equiv J+M, \quad J\in\mathbb{R} \quad \lambda, p\to\infty \tag{9.4}$$

σε ισχυρή σύζευξη, με $\mathbb{S}\sim\mathcal{X}\overline{\mathcal{X}}+\mathcal{Y}\overline{\mathcal{Y}}+\mathcal{Z}\overline{\mathcal{Z}}$.

Βρήκαμε όλους τους κυρίαρχους ($\mathcal{A}_{n0}$, $\hat{A}_{n0}$), επόμενους ($\mathcal{A}_{n1}$, $\hat{A}_{n1}$) και μεθεπόμενους ($\mathcal{A}_{n2}$, $\hat{A}_{n2}$) όρους των κλασικών διορθώσεων πεπερασμένου μεγέθους στις σχέσεις διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων (8.5) και των απλών ακίδων (8.12), τόσο στη στοιχειώδη τους όσο και τη διπλή τους περιοχή. Όπως και στην περίπτωση των χορδών GKP, οι αντίστοιχες σχέσεις διασποράς εκφράστηκαν με τη συνάρτηση W του Lambert. Δεν είναι γνωστό κατά πόσον ο ρόλος της συνάρτησης W σε ασθενή σύζευξη είναι παρόμοιος. Εφόσον τα παραπάνω αποτελέσματα για τις σχέσεις διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων δεν έχουν βρεθεί με κάποια άλλη μέθοδο, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επαλήθευση της σωστής συμπερίληψης των κλασσικών διορθώσεων wrapping σε ισχυρή σύζευξη από τις διάφορες μεθόδους που βασίζονται στην ολοκληρωσιμότητα, όπως οι διορθώσεις Lüscher, το θερμοδυναμικό Bethe ansatz (TBA)/Y-σύστημα και η κβαντική φασματική καμπύλη (QSC). Επιπλέον, μιας και οι κβαντικές διορθώσεις πεπερασμένου μεγέθους στις σχέσεις διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων είναι μόνο γνωστές σε κατώτερη τάξη ως προς λ, τα κλασσικά αποτελέσματα θα μπορούσαν να ρίξουν περισσότερο φως στη δομή του κβαντικού αναπτύγματος και γιατί όχι να προτείνουν νέες πιο αποτελεσματικές μεθόδους κβάντωσης του συστήματος.

Οι εξισώσεις (8.39)–(8.49) και (8.53)–(8.54) θα μπορούσαν να γενικευθούν σε όλες τις επόμενες τάξεις με τη βοήθεια μιας γενικής σχέσης, μιας αναδρομικής διαδικασίας ή ενός αλγορίθμου. Οι συναρτήσεις Lambert θα συνεχίσουν να εμφανίζονται σε όλες τις επόμενες τάξεις, σε πλήρη αναλογία με την περίπτωση των χορδών GKP. Οι κβαντικές διορθώσεις πεπερασμένου μεγέθους στη σχέση διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων θα μπορούσε επίσης να εκφραστεί συναρτήσει της συνάρτησης W του Lambert.

Οι εκφράσεις για την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x=x\,(p,\mathcal{J})$ και τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma=\gamma\,(p,\mathcal{J})$ τόσο των γιγάντιων μαγνονίων όσο και των απλών ακίδων μπορεί εύκολα να επαληθευθεί με τη Mathematica και τις σχέσεις του παραρτήματος Δ′.2. Όπως έχουμε ήδη πει, οι χορδές GKP στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ σχηματίζονται από την υπέρθεση δύο γιγάντιων μαγνονίων με μέγιστες ορμές $p=\pi$ και στροφορμές $J/2$. Με αυτές τις αντικαταστάσεις η σχέση διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων (Δ′.12) ανάγεται στη σχέση διασποράς της χορδής II των GKP (Δ′.3). Εντούτοις οι δομές αυτών των δύο σχέσεων διασποράς είναι ολίγον τι διαφορετικές και οι όροι που είναι κυρίαρχοι, επόμενοι, κλπ. στη μία από αυτές, δεν είναι οι ίδιοι με τους όρους που είναι κυρίαρχοι, επόμενοι, κλπ. στη σχέση διασποράς της άλλης. Συνεπώς, δύο γιγάντια μαγνόνια με μέγιστη ορμή $p=\pi$ και σπίν $J/2$ δίνουν μόνο την (8.50) αντί των αντίστοιχων όρων της (Δ′.3).

Ας ολοκληρώσουμε αυτή την ενότητα προτείνοντας κάποιες πιθανές εφαρμογές της συνάρτησης W. Η μορφή των διορθώσεων πεπερασμένου μεγέθους των γιγάντιων μαγνονίων στα γ-παραμορφωμένα υπόβαθρα [39] [117] θυμίζει πολύ τις διορθώσεις που εμφανίζονται στα μη παραμορφωμένα υπόβαθρα (8.4):

$$E-J=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\,\sin\frac{p}{2}\left\{1-4\,\sin^2\frac{p}{2}\,\cos\Xi\,e^{-2-2\pi J/\sqrt{\lambda}\sin\frac{p}{2}}+\ldots\right\}, \quad \Xi\equiv\frac{2\pi\,(n_2-\beta\,J)}{2^{3/2}\cos^3 p/4}, \tag{9.5}$$

[39] Γνωστά επίσης και ως πραγματικά υπόβαθρα Lunin-Maldacena.

όπου $n_2 \in \mathbb{Z}$ είναι ο αριθμός περιέλιξης (winding) της χορδής και β είναι ο πραγματικός παράγοντας παραμόρφωσης που ικανοποιεί τη σχέση $|n_2 - \beta J| \leq 1/2$ [118]. Φαινόμενα πεπερασμένου μεγέθους είναι επίσης πολύ ενδιαφέροντα στις περιπτώσεις των δυονικών (dyonic) γιγάντιων μαγνονίων [119] και των γιγάντιων μαγνονίων της αντιστοιχίας $\mathrm{AdS}_4/\mathrm{CFT}_3$ (2.37) [120]. Παρόμοια σχόλια ισχύουν επίσης και για τη γενίκευση των απλών ακίδων στη θεωρία ABJM και τα γ-παραμορφωμένα υπόβαθρα, αλλά ακόμη και για το ανάλογο των γιγάντιων μαγνονίων στο χώρο anti-de Sitter, ήτοι τις ακιδωτές χορδές του Kruczenski [121] (οι χορδές GKP στον AdS_3 μπορούν να θεωρηθούν ως χορδές Kruczenski με δύο ακίδες).

Ο υπολογισμός των συναρτήσεων συσχέτισης σε ισχυρή σύζευξη θα μπορούσε επίσης να διεκπεραιωθεί με μεθόδους που στηρίζονται στη συνάρτηση W και που αναπτύχθηκαν στο μέρος II αυτής της διατριβής. Τέλος, όπως πρόκειται να δούμε στα επόμενα δύο μέρη, είναι συχνά δυνατόν εκτεταμένα αντικείμενα περισσότερων διαστάσεων, όπως οι p-βράνες και οι μεμβράνες, να μοιράζονται πολλά από τα ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά των χορδών.[40] Είναι φυσιολογικό να περιμένουμε ότι ο φορμαλισμός με τη συνάρτηση W του Lambert θα μπορεί να εφαρμοσθεί και σε αυτές τις περιπτώσεις. Φαινόμενα πεπερασμένου μεγέθους για τις p-βράνες, π.χ. για τις M2-βράνες στον $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$ [124] θα μπορούσαν επίσης να μελετηθούν κατά τον ίδιο τρόπο.

[40] Βλέπε π.χ. τις εργασίες [4, 122]. Σχέσεις διασποράς όπως αυτές των μαγνονίων έχουν βρεθεί για μεμβράνες που περιστρέφονται στον $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$, στην εργασία [123].

Μέρος III
Στοιχεία p-Βρανών & M-Θεωρίας

10 Εισαγωγή στις Μεμβράνες

10.1 Μποζονικές Μεμβράνες

10.1.1 Δράση Dirac-Nambu-Goto

Η δράση Dirac-Nambu-Goto (DNG) [125, 126] για μια μποζονική M2-βράνη (μεμβράνη) στις $D = d + 1$ χωροχρονικές διαστάσεις είναι:

$$S_{DNG} = -T_2 \int d^3\sigma \sqrt{-h}, \quad T_2 \equiv \frac{1}{(2\pi)^2 \ell_p^3}, \tag{10.1}$$

όπου ℓ_p είναι το μήκος Planck του D-διάστατου χωροχρόνου και $\sigma_a = \{\tau, \sigma_1, \sigma_2\} = \{\tau,\ \sigma,\ \delta\}$ είναι οι συντεταγμένες της μεμβράνης/κοσμικού όγκου.[41] Από την άλλη μεριά, $g_{mn}(X)$ είναι η χωροχρονική μετρική και h_{ab} είναι η επαγόμενη (induced/pull-back) μετρική στη μεμβράνη:

$$h_{ab} \equiv \partial_a X^m \partial_b X^n \, g_{mn}(X), \quad h \equiv \det h_{ab}, \tag{10.2}$$

όπου X_m είναι οι χωροχρονικές συντεταγμένες.

Εξισώσεις Κίνησης

Παραλλάσσοντας τη δράση ως προς τις χωροχρονικές συντεταγμένες X_m, λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης [127]:

$$\widehat{\delta}_X S_{DNG} = 0^{42} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-h}} \partial_a \left(\sqrt{-h}\, h^{ab} \partial_b X^m\right) + h^{ab} \partial_a X^n \partial_b X^p \, \Gamma^m_{np}(X) = 0, \tag{10.3}$$

όπου $\Gamma^m_{np}(X)$ είναι τα σύμβολα Christoffel δευτέρου είδους για τη χωροχρονική μετρική $g_{mn}(X)$.

Συμμετρίες

Όπως ακριβώς στην περίπτωση των χορδών, η δράση (10.1) κληρονομεί όλες τις (καθολικές) συμμετρίες της χωροχρονικής μετρικής $g_{mn}(X)$ και επιπλέον διαθέτει και (τοπική) αναλλοιώτητα ως προς αναπαραμετρήσεις/αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις:

$$X^{m\prime}\left(\tau', \sigma_1', \sigma_2'\right) = X^m(\tau, \sigma_1, \sigma_2) \longrightarrow \widehat{\delta} X^m = \xi_a \, \partial^a X^m \quad (\text{απειροστός}), \tag{10.4}$$

όπου $\sigma_a' = \sigma_a + \xi_a(\tau, \sigma_1, \sigma_2)$ και ξ_a είναι απειροστά ανύσματα.

[41] Βλέπε την υποσημείωση 14 για μια περίληψη των συμβάσεων που χρησιμοποιούμε για τους δείκτες.

[42] Στην παρούσα ενότητα, όλες οι παραλλαγές θα σημειώνονται ως $\widehat{\delta}$ προκειμένου να αποφύγουμε τη σύγχυση με τις συντεταγμένες κοσμικού όγκου της μεμβράνης $\sigma_2 = \delta$.

10.1.2 Δράση Polyakov

Η δράση (Howe-Tucker-) Polyakov [128] για μια μποζονική M2-βράνη στις $D = d + 1$ χωροχρονικές διαστάσεις είναι:

$$S_P = -\frac{T_2}{2} \int d^3\sigma \sqrt{-\gamma} \left(\gamma^{ab} h_{ab} - 1 \right), \tag{10.5}$$

με τις ίδιες συμβάσεις που χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω. Η βοηθητική μετρική γ_{ab} είναι γνωστή ως η μετρική της μεμβράνης/κοσμικού όγκου.

Εξισώσεις Κίνησης

Παραλλάσσοντας το συναρτησιακό της δράσης ως προς τη μετρική της μεμβράνης γ_{ab}, λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης:

$$\widehat{\delta}_\gamma S_P = 0 \Rightarrow \gamma_{ab} = h_{ab}. \tag{10.6}$$

Αντικαθιστώντας αυτή την εξίσωση πίσω στη δράση (10.5), βλέπουμε ότι οι δράσεις DNG και Polyakov είναι ισοδύναμες εντός κελύφους (on-shell), έτσι ώστε αν παραλλάξουμε την (10.5) ως προς τις χωροχρονικές συντεταγμένες X^m, ανακτώνται οι εξισώσεις κίνησης (10.3).

Συμμετρίες

Για μια ακόμη φορά, η (10.5) κληρονομεί όλες τις (καθολικές) συμμετρίες της χωροχρονικής μετρικής $g_{mn}(X)$ και διαθέτει (τοπική) αναλλοιώτητα ως προς αναπαραμετρήσεις/αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις:

$$X^{m\prime}\left(\tau', \sigma', \delta'\right) = X^m\left(\tau, \sigma, \delta\right) \;\longrightarrow\; \widehat{\delta} X^m = \xi_a\, \partial^a X^m \quad (\text{απειροστός}) \tag{10.7}$$

$$\gamma'_{ab}\left(\tau', \sigma', \delta'\right) = \partial_a \sigma^c\, \partial_b \sigma^d\, \gamma_{cd}\left(\tau, \sigma, \delta\right) \;\longrightarrow\; \widehat{\delta}\gamma_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a, \tag{10.8}$$

όπου πάλι $\sigma'_a = \sigma_a + \xi_a(\tau, \sigma_1, \sigma_2)$, ξ_a είναι απειροστά ανύσματα και το ∇_a συμβολίζει τη συναλλοίωτη παράγωγο του κοσμικού όγκου.

Σε αντίθεση με τις χορδές, η δράση Polyakov για τις μεμβράνες δεν είναι πια αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Weyl, εξαιτίας του κοσμολογικού όρου στη δράση (10.5) που είναι ανάλογος του 1. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής είναι ίσος με το μηδέν και διατηρείται εντός κελύφους (on-shell):

$$T_{ab} \equiv \frac{-1}{T_2\sqrt{-\gamma}} \frac{\widehat{\delta} S_P}{\widehat{\delta}\gamma^{ab}} = \frac{1}{2}\left[h_{ab} - \frac{1}{2}\left(h^c_c - 1\right)\gamma_{ab} \right] : \quad \nabla^a T_{ab} = 0. \tag{10.9}$$

Όρος Wess-Zumino

Σε γενικές γραμμές, οι μποζονικές M2-βράνες συζευγνύονται στις $D = d+1$ διαστάσεις με τον εξής όρο ροής Wess-Zumino (WZ) [129]:

$$S_{\mathrm{WZ}} = -6\, T_2 \int d^3\sigma\, \dot{X}^m\, \partial_\sigma X^n\, \partial_\delta X^p\, A_{mnp}(X), \tag{10.10}$$

όπου $p = 2$. Το αντισυμμετρικό πεδίο 3-μορφής $A_{mnp}(X)$ ορίζεται ως:

$$F_4 \equiv dA_3 \quad \Leftrightarrow \quad F_{mnpq} = 3\partial_{[m} A_{npq]}, \tag{10.11}$$

όπου F_4 είναι το πεδίο 4-μορφής. Οι εξισώσεις κίνησης της μεμβράνης τροποποιούνται ανάλογα ώστε να φιλοξενήσουν τον όρο (10.10).

10.1.3 Καθορισμός Βαθμίδας

Δεδομένης μιας δράσης που είναι αναλλοίωτη στις αναπαραμετρήσεις των 3 συντεταγμένων της μεμβράνης σ_a, ένα σύνολο 3 βαθμών ελευθερίας μπορεί να απαλειφθεί καθορίζοντας τη βαθμίδα με την κατάλληλη επιλογή των συντεταγμένων της μεμβράνης. Επειδή ο $\gamma_{ab} = h_{ab}$ είναι ένας 3×3 συμμετρικός πίνακας με 6 βαθμούς ελευθερίας, η διαδικασία καθορισμού της βαθμίδας αφήνει 3 βαθμούς ελευθερίας που συμπληρώνονται από 3 συνδέσμους [130, 131].

Μια ιδιαίτερα βολική επιλογή βαθμίδας είναι η ακόλουθη:

$$\gamma_{00} = h_{00} = -\frac{4}{\nu^2} \cdot \det h_{ij} = -\frac{2}{\nu^2} \left\{X^i, X^j\right\}^2 \qquad \gamma_{0i} = h_{0i} = 0, \qquad i, j = 1, 2, \tag{10.12}$$

όπου ν είναι μία πραγματική σταθερά που διευκολύνει το πέρασμα στην περιγραφή με πίνακες/μήτρες που θα παρουσιαστεί αργότερα. Η δράση Polyakov (10.5) γράφεται:

$$S_P = \frac{\nu T_2}{4} \int d^3\sigma \left(g_{mn} \dot{X}^m \dot{X}^n - \frac{2}{\nu^2} g_{mn} g_{pq} \left\{X^m, X^p\right\} \left\{X^n, X^q\right\} \right). \tag{10.13}$$

Η αγκύλη Poisson $\{\_, \_\}$ ορίζεται ως εξής:

$$\{f\,,\, g\} \equiv \epsilon^{ij} \partial_i f \partial_j g = \partial_\sigma f\ \partial_\delta g - \partial_\delta f\ \partial_\sigma g. \tag{10.14}$$

Για τις συζυγείς ορμές $\pi^m = \nu\, T_2\, \dot{X}^m/2$, η αντίστοιχη Χαμιλτονιανή είναι:

$$H = \frac{\nu T_2}{4} \int d^2\sigma \left(g_{mn} \dot{X}^m \dot{X}^n + \frac{2}{\nu^2} g_{mn} g_{pq} \left\{X^m, X^p\right\} \left\{X^n, X^q\right\} \right). \tag{10.15}$$

Παραλλαγή της (10.13) ως προς τις συντεταγμένες X^m δίδει τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης:

$$\ddot{X}^m + \Gamma^m_{nr} \dot{X}^n \dot{X}^r - \frac{4}{\nu^2} \Bigg\{ g_{pq} \Gamma^m_{nr} \left\{X^n, X^p\right\} \left\{X^r, X^q\right\} + g_{nr} \left\{\left\{X^m, X^n\right\}, X^r\right\} - \\ - 2\Gamma_{nrp} \left\{X^m, X^r\right\} \left\{X^n, X^p\right\} \Bigg\} = 0. \tag{10.16}$$

Οι σύνδεσμοι είναι:

$$\gamma_{00} = -\frac{4}{\nu^2} \cdot \det h_{ij} \Rightarrow\ g_{mn} \dot{X}^m \dot{X}^n + \frac{2}{\nu^2} g_{mn} g_{pq} \left\{X^m, X^p\right\} \left\{X^n, X^q\right\} = 0 \tag{10.17}$$

$$\gamma_{0i} = 0 \Rightarrow\ g_{mn} \dot{X}^m \partial_i X^n = \Big\{ g_{mn}\, \dot{X}^m, X^n \Big\} = 0. \tag{10.18}$$

Παρά το γεγονός ότι η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε καθορίζει απόλυτα τη βαθμίδα, θα υπάρξουν φορές όπου κάποιες συντεταγμένες της μεμβράνης σ_a, δεν προσδιορίζονται κατά μοναδικό τρόπο. Αν ο χρόνος της μεμβράνης τ τυχαίνει να είναι μια τέτοια συντεταγμένη, μπορούμε να τον θέσουμε ίσο με κάποια συνάρτηση των χωροχρονικών συντεταγμένων $\tau = \tau\left(X^m\right)$, χωρίς να επηρεάζεται η επιλογή της βαθμίδας ή να μειώνονται οι επιτρεπόμενοι βαθμοί ελευθερίας. Υπάρχουν δύο δημοφιλείς επιλογές βαθμίδας, ήτοι η στατική βαθμίδα $\tau = X^0$ και η βαθμίδα του κώνου φωτός $\tau \propto X^0 + X^i$ (όπου X^i είναι οποιαδήποτε από τις χωρικές χωροχρονικές συντεταγμένες).

Για να αποφασίσουμε λοιπόν αν κάποια βαθμίδα του κοσμικού όγκου είναι συμβατή με κάποια βαθμίδα χρόνου (η πιο γενικά κάποια συγκεκριμένη διάταξη μεμβράνης), θα πρέπει να τσεκάρουμε τις εξισώσεις κίνησης και τους συνδέσμους βαθμίδας για ασυνέπειες. Για παράδειγμα, η στατική βαθμίδα είναι καθαρά ασύμβατη με το ansatz (13.10) (και το (4.78) στην περίπτωση των χορδών), ενώ η βαθμίδα του κώνου φωτός είναι ασύμβατη με τα περισσότερα από τα ansätze που μελετώνται σε αυτή τη διατριβή.

10.1.4 Μεμβράνες σε Επίπεδο Χωρόχρονο

Σε επίπεδους χωροχρόνους $g_{mn} \mapsto \eta_{\mu\nu}$, η δράση Polyakov με καθορισμένη βαθμίδα (10.12)–(10.13) γίνεται:

$$S_P = \frac{\nu T_2}{4} \int d^3\sigma \left(\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu - \frac{2}{\nu^2}\left\{X^\mu, X^\nu\right\}\left\{X_\mu, X_\nu\right\}\right) \tag{10.19}$$

ενώ η αντίστοιχη Χαμιλτονιανή είναι:

$$H = \frac{\nu T_2}{4} \int d^2\sigma \left(\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{2}{\nu^2}\left\{X^\mu, X^\nu\right\}\left\{X_\mu, X_\nu\right\}\right). \tag{10.20}$$

Τα σύμβολα Christoffel μηδενίζονται σε επίπεδους χωροχρόνους και έτσι οι εξισώσεις κίνησης (10.16) και οι σύνδεσμοι (10.17)–(10.18) γράφονται:

$$\ddot{X}^\mu - \frac{4}{\nu^2}\left\{\left\{X^\mu, X^\nu\right\}, X_\nu\right\} = 0 \tag{10.21}$$

$$\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{2}{\nu^2}\left\{X^\mu, X^\nu\right\}\left\{X_\mu, X_\nu\right\} = 0 \quad \& \quad \dot{X}^\mu \partial_i X_\mu = \left\{\dot{X}^\mu, X_\mu\right\} = 0. \tag{10.22}$$

Υπάρχει ένας κομψός τρόπος έκφρασης της επίπεδης Λαγκρανζιανής και των εξισώσεων κίνησης των μποζονικών μεμβρανών στις $D = d + 1$ διαστάσεις. Ορίζοντας τις χωροχρονικές συντεταγμένες κώνου φωτός $X^\pm$ ως:

$$X^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X^0 \pm X^d\right) \tag{10.23}$$

και επιλέγοντας τη βαθμίδα κώνου φωτός

$$X^+ = \tau, \tag{10.24}$$

οι παραπάνω εξισώσεις κίνησης και σύνδεσμοι βαθμίδας γράφονται:

$$\ddot{X}^- - \frac{4}{\nu^2}\left\{\left\{X^-, X^j\right\}, X^j\right\} = 0 \quad \& \quad \ddot{X}^j - \frac{4}{\nu^2}\left\{\left\{X^j, X^k\right\}, X^k\right\} = 0 \tag{10.25}$$

$$\dot{X}^- = \frac{1}{2}\dot{X}^j \dot{X}^j + \frac{1}{\nu^2}\left\{X^j, X^k\right\}\left\{X^j, X^k\right\} \quad \& \quad \partial_i X^- = \dot{X}^j \partial_i X^j \Leftrightarrow \left\{\dot{X}^j, X^j\right\} = 0, \tag{10.26}$$

όπου κατ'εξαίρεση $i = 1, 2$ και $j, k = 1, 2, \ldots, d-1$. Η Χαμιλτονιανή της μεμβράνης δίδεται από

$$H = \frac{\nu T_2}{4} \int d^2\sigma \left(\dot{X}^j \dot{X}^j + \frac{2}{\nu^2} \left\{ X^j, X^k \right\} \left\{ X^j X^k \right\} \right). \tag{10.27}$$

και η συνολική ορμή στην κατεύθυνση X^+ είναι

$$p^+ = \int_0^{2\pi} \pi^+ d^2\sigma = \int_0^{2\pi} \frac{\nu T_2}{2} \cdot \dot{X}^+ d^2\sigma = \frac{\nu}{2\ell_p^3}. \tag{10.28}$$

10.2 Μποζονικές p-Βράνες

Οι δράσεις Dirac-Nambu-Goto και Polyakov για τις M2-βράνες (μεμβράνες) που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, μπορούν να απευθείας να γενικευθούν στην περίπτωση εκτεταμένων μποζονικών αντικειμένων σε περισσότερες διαστάσεις, που είναι γνωστά ως Mp-βράνες. Η δράση DNG μιας μποζονικής Mp-βράνης που ζει στις $D = d + 1$ χωροχρονικές διαστάσεις ($d \geq p$) είναι [132, 133]:

$$S_{DNG} = -T_p \int d\tau d^p\sigma \sqrt{-h}, \tag{10.29}$$

όπου T_p είναι η τάση της Mp-βράνης και $\sigma_a = \{\tau, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p\}$ είναι οι συντεταγμένες κοσμικού όγκου της βράνης. Αν $g_{mn}(X)$ είναι η χωροχρονική μετρική και X_m οι αντίστοιχες συντεταγμένες, τότε η επαγόμενη μετρική στη βράνη h_{ab} θα δίδεται από:

$$h_{ab} \equiv \partial_a X^m \partial_b X^n \, g_{mn}(X), \quad h \equiv \det h_{ab} = \frac{1}{(p+1)!} \left\{ X^{m_1}, X^{m_2}, \ldots, X^{m_{p+1}} \right\}^2, \tag{10.30}$$

όπου η κλασσική αγκύλη Nambu $\{\_, \_, \ldots, \_\}$ ορίζεται ως:[43]

$$\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \equiv \epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} \partial_{i_1} f_1 \, \partial_{i_2} f_2 \, \ldots \, \partial_{i_n} f_n. \tag{10.31}$$

Η δράση Polyakov για μποζονικές Mp-βράνες είναι:

$$S_P = -\frac{T_p}{2} \int d\tau d^p\sigma \sqrt{-\gamma} \left[\gamma^{ab} h_{ab} - (p-1) \right], \tag{10.32}$$

όπου γ_{ab} είναι η (βοηθητική) μετρική κοσμικού όγκου της p-βράνης. Οι εξισώσεις κίνησης και οι συμμετρίες καθεμιάς από τις δράσεις της p-βράνης, είναι οι ίδιες με εκείνες που βρέθηκαν πιο πάνω για τις M2-βράνες, ήτοι (10.3)–(10.6) και τοπική αναλλοιώτητα σε αναπαραμετρήσεις/αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις. Οι p-βράνες συζευγνύονται επίσης με έναν όρο ροής Wess-Zumino (WZ):

$$S_{\mathrm{WZ}} = -\frac{T_p}{(p+1)!} \int d\tau d^p\sigma \, \epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_{p+1}} \partial_{i_1} X^{m_1} \, \partial_{i_2} X^{m_2} \, \ldots \, \partial_{i_{p+1}} X^{m_{p+1}} \, A_{m_1 m_2 \ldots m_{p+1}}(X), \tag{10.33}$$

όπου ξανά,

$$F_{p+2} \equiv dA_{p+1} \quad \Leftrightarrow \quad F_{m_1 m_2 \ldots m_{p+1}} = (p+1) \, \partial_{[m_1} A_{m_2 m_3 \ldots m_{p+2}]}. \tag{10.34}$$

[43] Για περισσότερα, βλέπε [134] και τις εκεί αναφορές.

Η βαθμίδα μπορεί ξανά να καθοριστεί όπως πριν (10.12) χρησιμοποιώντας την αναλλοιώτητα της δράσης Polyakov (10.32) υπό αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις, με αποτέλεσμα να μετατρέψουμε τους αρχικούς $(p+1)(p+2)/2$ βαθμούς ελευθερίας που είναι παρόντες στη μετρική του κοσμικού όγκου $\gamma_{ab} = h_{ab}$, σε $p(p+1)/2$ βαθμούς ελευθερίας. Σε επίπεδο χωρόχρονο Minkowski, οι εξισώσεις κίνησης και σύνδεσμοι βαθμίδας της (αφόρτιστης) p-βράνης γίνονται:

$$\ddot{X}^\mu - \frac{4}{\nu^2 (p-1)!} \left\{ \left\{ X^\mu, X^{\mu_1}, \ldots, X^{\mu_{p-1}} \right\}, X_{\mu_1}, \ldots, X_{\mu_{p-1}} \right\} = 0 \tag{10.35}$$

$$\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{4}{\nu^2 p!} \left\{ X^{\mu_1}, \ldots, X^{\mu_p} \right\}^2 = 0 \qquad \& \qquad \dot{X}^\mu \partial_i X_\mu = 0 \tag{10.36}$$

και η αντίστοιχη Χαμιλτονιανή είναι:

$$H = \frac{\nu\, T_2}{4} \int d^2\sigma \left(\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{4}{\nu^2 p!} \left\{ X^{\mu_1}, \ldots, X^{\mu_p} \right\}^2 \right). \tag{10.37}$$

10.2.1 Αμφιδιαφορίσιμες Απεικονίσεις που Διατηρούν τον Όγκο

Υπάρχει μια πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα της κλασσικής αγκύλης του Nambu που επιτρέπει αν ταυτοποιήσουμε την ομάδα των αμφιδιαφορίσιμων απεικονίσεων που διατηρούν την επιφάνεια με μια εναπομείνασα συμμετρία της p-βράνης, της οποίας έχουμε καθορίσει τη βαθμίδα. Χρησιμοποιήσαμε σιωπηρά την ιδιότητα αυτή κατά τον καθορισμό της βαθμίδας στις (10.12)–(10.30). Γενικά μιλώντας, η κλασσική αγκύλη Nambu υπακούει την ακόλουθη ταυτότητα:

$$\det\left(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu\right) = \frac{1}{p!} \left\{ X^{\mu_1}, X^{\mu_2}, \ldots, X^{\mu_p} \right\}^2 \tag{10.38}$$

έτσι ώστε ο χωρικός κοσμικός όγκος της Mp-βράνης να δίδεται από:

$$\int_\Sigma d^p\sigma \sqrt{\det\left(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu\right)} = \int_\Sigma d^p\sigma \sqrt{\frac{1}{p!} \cdot \left\{ X^{\mu_1}, X^{\mu_2}, \ldots, X^{\mu_p} \right\}^2}. \tag{10.39}$$

Παρατηρούμε ότι η Χαμιλτονιανή της επίπεδης μποζονικής Χαμιλτονιανής της p-βράνης (10.37) είναι αναλλοίωτη κάτω από χρονικά αναλλοίωτους μετασχηματισμούς που διατηρούν το χωρικό κοσμικό όγκο (10.39). Αυτοί είναι γνωστοί ως αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις που διατηρούν τον όγκο, SDiff(Σ). Η διατύπωση αυτή επιδέχεται κατάλληλων γενικεύσεων σε καμπύλους χωροχρόνους και σε υπερσυμμετρικές βράνες.

Οι M2-βράνες είναι αναλλοίωτες κάτω από αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις που διατηρούν την επιφάνεια. Οι SDiff(S^2) μπορούν να προσεγγιστούν από την ομάδα $\mathfrak{su}(N \to \infty)$, όπου N είναι η διάσταση του πίνακα της κανονικοποιημένης μεμβράνης. Αντίστοιχες προτάσεις μπορούν να διατυπωθούν και για μεμβράνες μεγαλύτερου γένους.

10.3 Υπερμεμβράνες

Οι γενικεύσεις των υπερχορδών σε υψηλότερες διαστάσεις (π.χ. υπέρ p-βράνες) ευνοούν το φορμαλισμό Green-Schwarz (GS), όπου η χωροχρονική υπερσυμμετρία είναι εμφανής και όχι η υπερσυμμετρία του κοσμικού όγκου. Είδαμε πίσω στην §2.4 ότι ο φορμαλισμός GS ήταν επίσης χρήσιμος στη διατύπωση της Λαγκρανζιανής της IIB θεωρίας χορδών εντός του $AdS_5 \times S^5$.

Σε αυτή τη σύντομη ενότητα πρόκειται να προσπελάσουμε σύντομα το φορμαλισμό GS της 11-διάστατης υπερμεμβράνης. Περισσότερα μπορούν να βρεθούν στο αυθεντικό άρθρο [135], καθώς επίσης και τις ανασκοπήσεις [136, 132]. Χωρίς να μπούμε σε περισσότερες λεπτομέρειες, η γενίκευση σε υψηλότερες διαστάσεις χωροχρόνου και κοσμικού όγκου είναι σχετικά απλή πλην όμως κάπως προβληματική.

Έστω ότι οι Z^M κωδικοποιούν τις μποζονικές/φερμιονικές συντεταγμένες του καμπύλου υπερχώρου (superspace):

$$Z^M = (X^m, \theta_\alpha)\,, \qquad M = (m, \alpha)\,, \quad m = 0, \ldots, 11, \quad \alpha = 1, \ldots, 32 \tag{10.40}$$

και Π_a^A είναι το pull-back του αντίστοιχου supervielbein E_M^A:

$$\Pi_a^A = \partial_a Z^M E_M^A, \qquad A = (\mu, \dot{\alpha})\,, \quad \mu = 0, \ldots, 11,, \quad \dot{\alpha} = 1, \ldots, 32, \quad a = 0, 1, 2. \tag{10.41}$$

Τότε η δράση της 11-διάστατης υπερμεμβράνης δίδεται από

$$S = -T_2 \int d^3\sigma \left\{ \sqrt{-h} + \epsilon^{abc} \Pi_a^A \Pi_b^B \Pi_c^C B_{CBA} \right\}, \tag{10.42}$$

όπου το πεδίο 3-μορφής B_{CBA} συζευγνύεται με την 11-διάστατη υπερβαρύτητα, κατάλληλα διατυπωμένη στον υπερχώρο [137], και

$$h_{ab} \equiv \gamma^{ab} \Pi_a^\mu \Pi_b^\nu \eta_{\mu\nu}, \qquad h \equiv \det h_{ab}. \tag{10.43}$$

Εναλλακτικά, η δράση της υπερμεμβράνης μπορεί να εκφραστεί μέσω της βοηθητικής μετρικής γ_{ab} ως εξής:

$$S = -\frac{T_2}{2} \int d^3\sigma \left\{ \sqrt{-\gamma} \left[\gamma^{ab} h_{ab} - 1 \right] + 2\epsilon^{abc} \Pi_a^A \Pi_b^B \Pi_c^C B_{CBA} \right\}. \tag{10.44}$$

Οι δράσεις (10.42)–(10.44) είναι αναλλοίωτες κάτω από τις 3-διάστατες αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις/αναπαραμετρήσεις των συντεταγμένων του υπερχώρου Z^M, όπως επίσης και των τοπικών φερμιονικών κ-μετασχηματισμών. Σαν συνάρτηση των πεδίων του υποβάθρου E_M^A και B_{CBA}, οι δράσεις (10.42)–(10.44) είναι επίσης αναλλοίωτες κάτω από τους 11-διάστατους μετασχηματισμούς βαθμίδας. Όπως στην περίπτωση των μποζονικών μεμβρανών, οι (10.42)–(10.44) μπορούν να παραλλαχθούν ως προς τις συντεταγμένες του υπερχώρου Z^M και τη μετρική του κοσμικού όγκου γ_{ab}, γεννώντας τα υπερσυμμετρικά ανάλογα των μποζονικών εξισώσεων κίνησης (10.3)–(10.6).

Για να βρούμε την υπερσυμμετρική δράση στον επίπεδο 11-διάστατο χωρόχρονο, πρέπει να θέσουμε:

$$E_m^\mu = \delta_m^\mu, \qquad E_m^\alpha = 0 \tag{10.45}$$

$$E_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha, \qquad E_\alpha^\mu = -i\left(\Gamma^\mu\right)_{\alpha\beta} \theta^\beta \tag{10.46}$$

$$B_{mn\alpha} = -\frac{i}{6}\left(\Gamma_{mn}\theta\right)_\alpha, \qquad B_{m\alpha\beta} = -\frac{1}{6}\left(\Gamma_{mn}\theta\right)_{(\alpha}\left(\Gamma^n\theta\right)_{\beta)} \tag{10.47}$$

$$B_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{i}{6}\left(\Gamma_{\mu\nu}\theta\right)_{(\alpha}\left(\Gamma^\mu\theta\right)_\beta\left(\Gamma^\nu\theta\right)_{\gamma)}, \qquad B_{mnr} = 0, \tag{10.48}$$

όπου θ_α είναι σπίνορες Majorana 32 όρων και $E_{\dot{\alpha}}^\alpha = \delta_{\dot{\alpha}}^\alpha$. Η δράση στον επίπεδο χωροχρόνο γράφεται,

$$S=-\frac{T_2}{2}\int d^3\sigma\Big\{\sqrt{-\gamma}\Big[\gamma^{ab}\Pi_a^\mu\Pi_{b\mu}-1\Big]+$$

$$+i\epsilon^{abc}\left(\bar\theta\Gamma_{mn}\partial_a\theta\right)\left[\Pi_b^m\Pi_c^n+i\Pi_b^m\left(\bar\theta\Gamma^n\partial_c\theta\right)-\frac{1}{3}\left(\bar\theta\Gamma^m\partial_b\theta\right)\left(\bar\theta\Gamma^n\partial_c\theta\right)\right]\Big\}, \quad (10.49)$$

όπου

$$\Pi_a^m=\partial_a X^m-i\bar\theta\Gamma^m\partial_a\theta. \quad (10.50)$$

Επιπλέον της τοπικής αναλλοιώτητας σε αναπαραμετρήσεις και μετασχηματισμούς κ, η (10.49) είναι αναλλοίωτη κάτω από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς Poincaré. Όπως πριν, μπορούμε να καθορίσουμε τη βαθμίδα όπως στην (10.12) και να βρούμε τις αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης και συνδέσμους κατά τον συνηθισμένο τρόπο. Η φερμιονική συμμετρία κ της υπερμεμβράνης καθορίζεται ως εξής:

$$\Gamma^+\theta=0, \quad (10.51)$$

όπου οι 11-διάστατοι (32×32) πίνακες γάμμα του κώνου φωτός ορίζονται ως:

$$\Gamma^+\equiv\frac{1}{\sqrt2}\left(\Gamma^0+\Gamma^{10}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\ \sqrt2 i&0\end{pmatrix} \quad (10.52)$$

$$\Gamma^-\equiv\frac{1}{\sqrt2}\left(-\Gamma^0+\Gamma^{10}\right)=\begin{pmatrix}0&\sqrt2 i\\ 0&0\end{pmatrix} \quad (10.53)$$

$$\Gamma^i\equiv\begin{pmatrix}\gamma_i&0\\ 0&-\gamma_i\end{pmatrix},\quad i=1,\dots,9, \quad (10.54)$$

όπου γ_i είναι 16×16 ευκλείδειοι πίνακες γάμμα ($\{\gamma_i,\gamma_j\}=2\delta_{ij}$). Αν επιπλέον καθορίσουμε και τη βαθμίδα του κώνου φωτός όπως στην (10.24), η αντίστοιχη Χαμιλτονιανή της υπερμεμβράνης απλοποιείται σημαντικά. Το αποτέλεσμα είναι:

$$H=\frac{\nu T_2}{4}\int d^2\sigma\left[\dot X^j\dot X^j+\frac{2}{\nu^2}\left\{X^j,X^k\right\}\left\{X^jX^k\right\}-\frac{4}{\nu}\,\theta^T\gamma_i\left\{X^i,\theta\right\}\right], \quad (10.55)$$

όπου θ είναι σπίνορες Majorana με 16 όρους.

Στην §2.4 διατυπώσαμε τη δράση της IIB υπερχορδής στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ αλά Metsaev και Tseytlin, ήτοι γράφοντάς την σαν ένα μη γραμμικό σίγμα μοντέλο (NLSM) στον υπερσύμπλοκο χώρο (2.10). Με τον πλήρη φορμαλισμό για την υπερμεμβράνη των GS στη διάθεσή μας, μπορούμε παρομοίως να προχωρήσουμε και να καταστρώσουμε τις Λαγκρανζιανές για τις υπερμεμβράνες στα καμπύλα 11-διάστατα υπόβαθρα της αντιστοιχίας AdS/CFT που αποτελούν κομμάτι ορισμένων ακριβών λύσεων της 11-διάστατης υπερβαρύτητας, ήτοι τους χώρους $\mathrm{AdS}_{4,7}\times\mathrm{S}^{7,4}$. Οι αντίστοιχοι υπερσύμπλοκοι χώροι είναι:

$$\frac{F_1}{G_1}=\frac{\mathfrak{osp}\left(8|4\right)}{\mathfrak{so}\left(3,1\right)\times\mathfrak{so}\left(7\right)}\qquad\&\qquad\frac{F_2}{G_2}=\frac{\mathfrak{osp}\left(6,2|4\right)}{\mathfrak{so}\left(6,1\right)\times\mathfrak{so}\left(4\right)}. \quad (10.56)$$

Περισσότερα για την υπερσυμμετρική δράση σε αυτά τα υπόβαθρα μπορεί να βρεθεί στις εργασίες [138].

10.3.1 11-Διάστατη Υπερβαρύτητα

Ας εξετάσουμε τώρα σύντομα τη θεωρία που συζευγνύεται στην 11-διάστατη υπερμεμβράνη, ήτοι την 11-διάστατη υπερβαρύτητα. Περισσότερα μπορούν να βρεθούν στο αυθεντικό άρθρο των Cremmer-Julia-Scherk (CJS) [139], όπως επίσης και σε αρκετά βιβλία, π.χ. [140].

Η Λαγκρανζιανή της 11-διάστατης υπερβαρύτητας (εν συντομία 1_{11} sugra) αποτελείται από τρία πεδία, το γκραβιτόνιο/elfbein e^{μ}_{m}, το γκραβιτίνο Majorana ψ_m και το αντισυμμετρικό πεδίο 3-μορφής A_{mnp} (10.11):

$$\mathcal{L} =-\frac{e}{2\kappa_{11}^2}R - \frac{ie}{2}\overline{\psi}_m\Gamma^{mnr}D_n\psi_r - \frac{e}{48}F_{mnrs}F^{mnrs} + \frac{\sqrt{2}\,e\,\kappa_{11}}{384}\left(\overline{\psi}_m\Gamma^{mnrspq}\psi_n + 12\overline{\psi}^r\Gamma^{pq}\psi^s\right)\Big(F_{rspq}+$$

$$+\hat{F}_{rspq}\Big) + \frac{\sqrt{2}\,\kappa_{11}}{144^2}\,\epsilon^{m_1\ldots m_{11}}F_{m_1\ldots m_4}F_{m_5\ldots m_8}A_{m_n\ldots m_{11}}\ , \tag{10.57}$$

όπου ακολουθήσαμε τις συμβάσεις της εργασίας των CJS, συμφωνα με την οποία $\eta_{\mu\nu} = (+,-,-,\ldots,-)$,[44]

$$K_{m\rho\sigma} \equiv \frac{i\kappa_{11}^2}{8}\left[-\overline{\psi}_p\Gamma_{m\rho\sigma}{}^{pq}\psi_q + \left(\overline{\psi}_m\Gamma_\sigma\psi_\rho - \overline{\psi}_m\Gamma_\rho\psi_\sigma + \overline{\psi}_\sigma\Gamma_m\psi_\rho\right)\right] \tag{10.58}$$

$$\omega_{m\rho\sigma} \equiv \omega^0_{m\rho\sigma} + K_{m\rho\sigma} \quad \& \quad \hat{\omega}_{m\rho\sigma} \equiv \omega_{m\rho\sigma} + \frac{i\kappa_{11}^2}{8}\,\overline{\psi}_p\Gamma_{m\rho\sigma}{}^{pq}\psi_q \tag{10.59}$$

$$D_n \equiv \partial_n + \frac{1}{8}\left(\omega_{n\rho\sigma} + \hat{\omega}_{n\rho\sigma}\right)\Gamma^{\rho\sigma} \tag{10.60}$$

$$F_{mnrs} \equiv 4\partial_{[m}A_{nrs]} \quad \& \quad \hat{F}_{mnrs} \equiv F_{mnrs} - \frac{3\kappa_{11}}{\sqrt{2}}\,\psi_{[m}\Gamma_{nr}\psi_{s]}, \tag{10.61}$$

$\kappa_{11}^2 \equiv 8\pi G_{11}$, e είναι η ορίζουσα του elfbein $e \equiv \det e^{\mu}_{m} = \sqrt{-g}$ και $\omega^0_{m\rho\sigma}$ είναι η συνοχή Christoffel. Χρειάζεται προσοχή προκειμένου να διακρίνει κανείς τα σύμβολα Christoffel της §10.1 και τους 32×32 πίνακες γάμμα του Dirac στις $D = 11$ διαστάσεις που εμφανίζονται στην παρούσα ενότητα:

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \qquad \Gamma^m = e^m_\mu\Gamma^\mu. \tag{10.62}$$

Ας σημειωθεί επίσης ότι το σύμβολο $\{\ ,\ \}$ είναι ο αντιμεταθέτης και όχι η αγκύλη Poisson (10.14) της §10.1. Το μποζονικό μέρος της δράσης (10.57) ευρίσκεται θέτοντας το πεδίο του γκραβιτίνου ψ_m ίσο με το μηδέν:

$$\mathcal{L}_B = -\frac{e}{2\kappa_{11}^2}R - \frac{e}{48}F_{mnrs}F^{mnrs} + \frac{\sqrt{2}\kappa_{11}}{144^2}\,\epsilon^{m_1\ldots m_{11}}F_{m_1\ldots m_4}F_{m_5\ldots m_8}A_{m_n\ldots m_{11}}. \tag{10.63}$$

10.4 Θεωρία Μ(ητρών)

10.4.1 Κανονικοποιημένες Μεμβράνες με Μήτρες

Οι 2-διάστατες σφαιρικές επιφάνειες μπορούν να κανονικοποιηθούν με τη βοήθεια μιας πολύ έξυπνης μεθόδου που βρήκαν οι Goldstone και Hoppe το 1982 [130]. Ας θεωρήσουμε μια δισδιάστατη μοναδιαία

[44] Με την εξαίρεση της παρούσας παραγράφου, η μετρική που χρησιμοποιούμε σε αυτή τη διατριβή είναι μια μετρική με «πλεόνασμα συν» ("mostly plus") όπως συνηθίζεται να λέγεται. Είμαστε παρά ταύτα κάπως ασυνεπείς με τις συμβάσεις μας σε αυτή την ενότητα, μιας και ο κυρίως σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε σύντομα την αυθεντική διατύπωση της 11-διάστατης υπερβαρύτητας, χωρίς να υπεισέλθουμε σε πολλές λεπτομέρειες.

σφαίρα,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{10.64}$$

σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x_1 = \cos\varphi \sin\vartheta, \quad x_2 = \sin\varphi \sin\vartheta, \quad x_3 = \cos\vartheta. \tag{10.65}$$

Για τις μεταβλητές του κοσμικού όγκου $\sigma_1 = \varphi$, $\sigma_2 = \cos\vartheta$, οι αγκύλες Poisson των x_i ικανοποιούν,

$$\{x_i, x_j\} = e_{ijk} x_k, \tag{10.66}$$

σχέση που θυμίζει πολύ την άλγεβρα $\mathfrak{su}(2)$. Κάνουμε τις ακόλουθες αντικαταστάσεις:

$$x_i \mapsto \frac{2}{N}\mathbf{J}_i, \qquad \{\ ,\ \} \mapsto -\frac{iN}{2}[\ ,\ ], \qquad \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma \ldots, \mapsto \frac{1}{N}\mathrm{Tr}[\ldots] \tag{10.67}$$

όπου οι $N \times N$ πίνακες $\mathbf{J}_i$ δίνουν μια αναπαράσταση της $\mathfrak{su}(2)$ με σπίν ίσο προς $(N-1)/2$:

$$[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = i e_{ijk} \mathbf{J}_k. \tag{10.68}$$

Οι κανόνες αντικατάστασης (10.67) υποδεικνύουν έναν τρόπο κανονικοποίησης των σφαιρικών μποζονικών μεμβρανών καθορισμένης βαθμίδας εντός επίπεδου υπόβαθρου, που περιγράφονται από το σύστημα (10.25)–(10.27). Οι χωρικές χωροχρονικές συντεταγμένες X^i αναβαθμίζονται σε $N \times N$ πίνακες $\mathbf{X}^i$, οι αγκύλες Poisson αντικαθίστανται από μεταθέτες και τα ολοκληρώματα από ίχνη ως εξής:

$$x_i \mapsto \mathbf{X}_i, \qquad \{\ ,\ \} \mapsto -\frac{iN}{2}[\ ,\ ], \qquad \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma \ldots, \mapsto \frac{1}{N}\mathrm{Tr}[\ldots]. \tag{10.69}$$

Με την (10.69), η Χαμιλτονιανή (10.27) γίνεται:

$$H = \frac{1}{2\pi\ell_p^3} \cdot \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{X}}^i\dot{\mathbf{X}}^i - \frac{1}{4}\left[\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j\right]\left[\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j\right]\right), \tag{10.70}$$

όπου το ν στην (10.27) έχει τεθεί ίσο με τη διάσταση του πίνακα N. Η κανονικοποιημένες (χωρικές) εξισώσεις κίνησης και σύνδεσμοι (10.25)–(10.26) γράφονται:

$$\ddot{\mathbf{X}}^i + \left[\left[\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j\right], \mathbf{X}^k\right] = 0 \quad \& \quad \left[\dot{\mathbf{X}}^i, \mathbf{X}^j\right] = 0. \tag{10.71}$$

Για υπερσυμμετρία, οι κανόνες (10.69) μπορούν αν εφαρμοσθούν στην υπερσυμμετρική Χαμιλτονιανή (10.55). Το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως Θεωρία Μητρών [141]:

$$\boxed{H_0 = \frac{1}{2\pi\ell_p^3} \cdot \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{X}}^i\dot{\mathbf{X}}^i - \frac{1}{4}\left[\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j\right]\left[\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^j\right] + \theta^T\gamma_i\left[\mathbf{X}^i, \theta\right]\right)}, \tag{10.72}$$

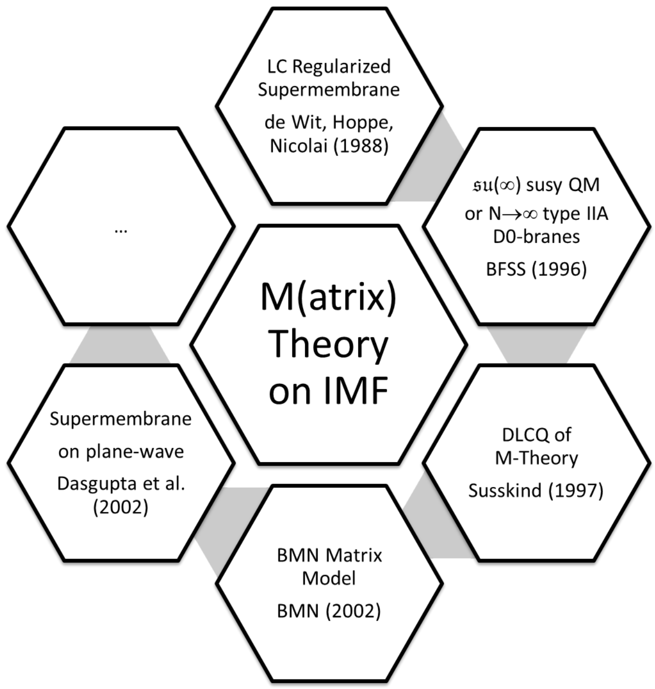
η οποία παρότι εξήχθη μόνο για σφαιρικές μεμβράνες,[45] μπορεί να γενικευθεί απευθείας σε υπερσυμμετρικές μεμβράνες αυθαίρετων τοπολογιών με τον κανόνα αντικατάστασης (10.69).

Είναι γνωστό ότι η θεωρία των κλασσικών (μποζονικών και υπερσυμμετρικών) μεμβρανών υποφέρει

[45] Η περίπτωση του δισδιάστατου τόρου μπορεί να μελετηθεί στα πρότυπα της δισδιάστατης σφαίρας. Περισσότερα μπορούν να βρεθούν στις εργασίες [142].

από αθεράπευτες αστάθειες που εμποδίζουν κάθε λογική προσπάθεια κβάντωσης της θεωρίας. Η θεωρία των μητρών ωστόσο μοιάζει να θεραπεύει το πρόβλημα στην περίπτωση των μποζονικών μεμβρανών (10.70). Ο τρόπος σκέψης είναι ο εξής: οι επίπεδες διευθύνσεις («αιχμές») τελικά δεν ευνοούνται, διότι συντελούν στην εμφάνιση ενός μεγάλου ενεργού δυναμικού εγκλωβισμού το οποίο σταθεροποιεί το σύστημα.

Από τη άλλη μεριά, η υπερσυμμετρική θεωρία των μητρών (10.72) επαναφέρει τις αστάθειες υπό τη μορφή συνεχούς φάσματος για την υπερμεμβράνη [143]. Η φερμιονική συνεισφορά στην ενέργεια της μεμβράνης είναι η ακριβώς αντίθετη της μποζονικής με αποτέλεσμα το φάσμα της υπερμεμβράνης να μην είναι πια διακριτό (I) και να μην μπορεί ενδεχομένως να συσχετισθεί με σωματίδια. Όπως θα δούμε παρακάτω, η υπόθεση των BFSS [144] παρέχει μια πολύ ικανοποιητική εξήγηση για αυτό το γεγονός, που παύει να είναι πια προβληματικό.



10.4.2 Η Υπόθεση της Θεωρίας των Μητρών

Η υπόθεση της θεωρίας των μητρών (γνωστή επίσης και ως υπόθεση των BFSS) [144], ισχυροποίησε τη στενή σύνδεση μεταξύ της θεωρίας των κβαντικών υπερμεμβρανών και της M-θεωρίας που προτάθηκε από τον Townsend στη διάρκεια της επανάστασης της M-θεωρίας. Οι Banks, Fischler, Shenker και Susskind (BFSS) παρατήρησαν ότι η Χαμιλτονιανή για N το πλήθος D0-βρανών τύπου IIA, σε χαμηλές ενέργειες είναι ακριβώς η ίδια με εκείνη της θεωρίας μητρών (10.72). Με δεδομένο ότι η IIA θεωρία χορδών προκύπτει από την συμπαγοποίηση της M-θεωρίας στην S^1 και αυτή με τη σειρά της είναι μη σχετικιστική στο σύστημα άπειρης ορμής (infinite-momentum frame—IMF), οι BFSS κατέληξαν στο εξής:

$$\left.\begin{array}{r}\#N \to \infty,\ (\text{μη σχετικιστικές})\ \text{D0-βράνες τύπου IIA} \\ \mathfrak{su}\,(\infty)\ \ \text{susy QM (10.72)}\end{array}\right\} = \begin{array}{c}\text{M-θεωρία συμπαγοποιημένη} \\ \text{στο IMF.}\end{array} \tag{10.73}$$

Με την υπόθεση της θεωρίας μητρών, το πρόβλημα των συνεχών φασμάτων της υπερμεμβράνης επιλύεται, καθώς οι υπερμεμβράνες αντιμετωπίζονται όχι ως στοιχειώδη αντικείμενα αλλά ως σύνθετα αντικείμενα που αποτελούνται από γκραβιτόνια = D0-βράνες. Η ενέργεια ενός συστήματος που περιέχει δύο ή περισσότερα γκραβιτόνια μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή και η θεωρία των υπερμητρών με $N \geq 2$

περιέχει πολυσωματιδιακές καταστάσεις με συνεχή φάσματα.

Η εκδοχή της υπόθεσης της θεωρίας μητρών με πεπερασμένο N προτάθηκε το 1997 από τον Susskind [145]. Αντί της M-θεωρίας στο IMF, η θεωρία μητρών με πεπερασμένο N (10.72) είναι ισοδύναμη με έναν τομέα της M-θεωρίας όπου ο καθυστερημένος χρόνος x^- έχει ταυτοποιηθεί περιοδικά. Το τελευταίο είναι γενικά γνωστό ως διακριτή κβάντωση κώνου φωτός (discrete light-cone quantization—DLCQ):

$$\left.\begin{array}{r} \#N \text{ (χαμηλή ενέργεια) D0-βράνες τύπου IIA} \\ \mathfrak{su}(N) \text{ susy QM (10.72)} \end{array}\right\} = \begin{array}{l} \text{DLCQ τομέας της M-θεωρίας με} \\ \#N \text{ μονάδες συμπαγούς ορμής.} \end{array} \tag{10.74}$$

Συνοψίζοντας, η θεωρία μητρών είναι μια εγγενής θεωρία πολλών σωμάτων και παρέχει ένα μοντέλο δεύτερης κβάντωσης της M-θεωρίας στο επίπεδο 11-διάστατο χωρόχρονο. Οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις στην θεωρία μητρών προκύπτουν από τη συμπερίληψη κβαντικών φαινομένων.

10.4.3 Θεωρία Μητρών σε Καμπύλους Χωροχρόνους

Η Χαμιλτονιανή της θεωρίας μητρών (10.72) και η αντίστοιχες υποθέσεις (10.73)–(10.74) έχουν διατυπωθεί και ισχύουν μόνο σε επίπεδα 11-διάστατα υπόβαθρα. Είναι φυσικό να θέλουμε να καταστρώσουμε μοντέλα μητρών για την M-θεωρία σε καμπύλα 11-διάστατα υπόβαθρα και ιδιαίτερα σε υπόβαθρα επίπεδων κυμάτων και τους χωροχρόνους $\mathrm{AdS}_{4,7} \times \mathrm{S}^{7,4}$ που σχετίζονται ευθέως με ακριβείς λύσεις της 11-διάστατης υπερβαρύτητας.

Μία DLCQ περιγραφή της 6-διάστατης υπερσύμμορφης θεωρίας $\mathrm{A}_{N-1}(2,0)$, η οποία όπως είδαμε στην §2.7 είναι ολογραφικά δυϊκή στην M-θεωρία στον $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ προτάθηκε στις εργασίες [146]. Βασίζεται στην κβαντομηχανική επί ορισμένων κατάλληλα ορισμένων moduli χώρων instanton. Η θεωρία μητρών σε ασθενώς καμπυλωμένα υπόβαθρα μελετήθηκε από τους Taylor και Van Raamsdonk [147].

Το 2002, οι Berenstein, Maldacena και Nastase (BMN) [32] πρότειναν μία περιγραφή DLCQ της M-θεωρίας με ένα μοντέλο μητρών επί του ακόλουθου (ομογενούς) υπόβαθρου επίπεδου κύματος:

$$ds^2 = -2dudv - \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\mu^2}{9} x^i x^i - \sum_{j=4}^{9} \frac{\mu^2}{36} x^j x^j\right] du^2 + \sum_{i=1}^{9} dx^i dx^i. \tag{10.75}$$

Η DLCQ περιγραφή της M-θεωρίας επί του ομογενούς επίπεδου κύματος (10.75), δίδεται από την ακόλουθη Χαμιλτονιανή:

$$H = H_0 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\mu^2}{9}\,\mathbf{X}_i^2 + \sum_{j=4}^{9} \frac{\mu^2}{36}\,\mathbf{X}_j^2 - \frac{i\mu}{8}\,\theta^T \gamma_{123}\,\theta - \frac{2i\mu}{3}\,\epsilon^{ijk}\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j\mathbf{X}_k\right). \tag{10.76}$$

Για λόγους απλότητας, παραλείψαμε τον εξωτερικό παράγοντα που είναι ανάλογος του μήκους Planck. Οι συγγραφείς της εργασίας [148] έδειξαν ότι το μοντέλο μητρών των BMN (10.76), μπορεί να εξαχθεί είτε κανονικοποιώντας την υπερμεμβράνη στο υπόβαθρο επίπεδου κύματος (10.75), ή από τη δυναμική των D0-βρανών τύπου IIA.

Μέρος IV
Περιστρεφόμενες Μεμβράνες

11 Εισαγωγή

Έχοντας εισαγάγει τις υπερσυμμετρικές βράνες και παρουσιάσει τις κυριότερες ιδέες γι'αυτές, είμαστε έτοιμοι να εστιάσουμε στην αντιστοιχία AdS/CFT και να θέσουμε την ερώτηση κατά πόσο η μελέτη των βρανών ως αυτόνομων οντοτήτων μπορεί να φωτίσει κάποιες πτυχές της δυαδικότητας και να συνεισφέρει στην κατάρτιση του «λεξικού» της αντιστοιχίας. Ωστόσο, πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι η διαδικασία της μετάβασης από τα σωματίδια και τις χορδές στις p-βράνες μπορεί πολλές φορές να είναι ιδιαίτερα δυσχερής. Αστάθειες, ανωμαλίες, μη επανακανονικοποιησιμότητα, μη ολοκληρωσιμότητα, αδύνατη κβάντωση, απουσία αλληλεπιδράσεων και θεωρίας διαταραχών, είναι κάποια από τα προβλήματα που πάντοτε ταλαιπωρούσαν τις Mp-βράνες. Όλα αυτά τα προβλήματα πιθανότατα παραμένουν και στην αντιστοιχία AdS/CFT. Συνεπώς, μια λογική στρατηγική θα συνιστούσε την επένδυση μόνο σε εκείνα τα χαρακτηριστικά των βρανών που έχουν μεγαλύτερες πιθανότητες να ταιριάξουν σε ένα αυτοσυνεπές πλαίσιο.

Σε αυτή τη βάση, επιλέξαμε να επικεντρωθούμε στη μελέτη των χορδοειδών ιδιοτήτων των κλασσικών M2-βρανών που ζουν στους 11-διάστατους χωροχρόνους που σχετίζονται με την αντιστοιχία AdS/CFT. Οι M2-βράνες στα καμπύλα 11-διάστατα υπόβαθρα όπως το $\mathrm{AdS}_m \times \mathrm{S}^n$ είναι σχετικά απρόσβλητες από τις συνήθεις «ασθένειες» των Mp-βρανών. Ακόμη και στο σενάριο της χειρότερης περίπτωσης όπου οι 11-διάστατες M2-βράνες στο χώρο anti-de Sitter αποδειχθούν προβληματικές, εμείς επιλέξαμε να επενδύσουμε στην ίσως πιο αξιόπιστη πτυχή τους, τη χορδοειδή συμπεριφορά τους. Η σκοπός του μέρους IV αυτής της διατριβής είναι επομένως διττός:

1. Κατανόηση του ρόλου των Mp-βρανών στην αντιστοιχία AdS/CFT.

2. Μελέτη της χορδοειδούς συμπεριφοράς των M2-βρανών στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT.

Στο μέρος II αυτής της διατριβής, μελετήσαμε εκτενώς τις τρεις βασικές διατάξεις των χορδών GKP και εξηγήσαμε λεπτομερώς όλες τους τις αρετές σε ό,τι αφορά στην αντιστοιχία AdS/CFT. Οι χορδές GKP μεταφέρουν σημαντική πληροφορία για τη διαβάθμιση των δυϊκών καταστάσεων της θεωρίας βαθμίδας σε ισχυρή σύζευξη, την οποία είναι αδύνατο να εξαγάγουμε με διαφορετικό (ήτοι διαταρακτικό) τρόπο. Στο παρόν μέρος, θα αποδείξουμε μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα των μεμβρανών εντός του χώρου anti-de Sitter, ήτοι ότι αυτές είναι ικανές να κωδικοποιήσουν όλη τη δυναμική των χορδών GKP. Στην πράξη όμως, οι μεμβράνες στον AdS είναι ικανές να αναπαράξουν όχι μόνο τις χορδές GKP εντός του χώρου anti-de Sitter, αλλά και κάθε κλασσική διάταξη χορδής εντός του $\mathrm{AdS}_5 \subset \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$.

Οι «χορδοειδείς μεμβράνες» είναι κυριολεκτικά διατάξεις μεμβρανών που προσομοιάζουν σε διατάξεις χορδών. Ορίζονται σε χωροχρόνους που διαθέτουν μια συμπαγή υποπολλαπλότητα, όπως είναι όλα τα υπόβαθρα που σχετίζονται με την αντιστοιχία AdS/CFT (και που απαριθμούνται στην §2.7). Η ουσιαστική τους ιδιότητα είναι ότι έχουν τυλιχθεί γύρω από μία εκ των συμπαγών διαστάσεων του υποβάθρου και αναπαράγουν τη δράση, τις εξισώσεις κίνησης και τα φορτία μιας χορδής που ζει στο μη συμπαγές μέρος του χωροχρόνου. Ή κατασκευή αυτή έχει δύο ενδιαφέρουσες συνέπειες. Πρώτον, στο επίπεδο των κλασσικών διαταραχών των χορδοειδών μεμβρανών στον $\mathrm{AdS}_m \times \mathrm{S}^n$, μοιάζει να υπάρχει ένα άπειρο πλήθος από αμιγώς μεμβρανοειδείς συνιστώσες, επιπλέον εκείνων που είναι αμιγώς χορδοειδείς. Δεύτερον, όπως ακριβώς το ταίριασμα παραμέτρων της $\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ προσδίδει στις χορδές του εσωτερικού (bulk) του AdS μια ενεργή τάση χορδής που είναι ίση με την τετραγωνική ρίζα της σταθεράς σύζευξης $\sqrt{\lambda}$ του 't Hooft, οι χορδοειδείς μεμβράνες προικίζονται παρομοίως με μια ενεργή τάση που ισούται με $\sqrt{\lambda'} = R\sqrt{\lambda}/g_s\,\ell_s$.[46]

[46] R είναι η ακτίνα της συμπαγούς διάστασης, g_s είναι η σταθερά σύζευξης και ℓ_s είναι το θεμελιώδες μήκος της χορδής.

Μια οικογένεια χορδοειδών μεμβρανών με τις παραπάνω ιδιότητες μπορεί να ληφθεί εμβαπτίζοντας τη (σύμμορφη) δράση Polyakov για τη μποζονική χορδή εντός του AdS_5, στη δράση Polyakov των μεμβρανών στον $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$. Μπορεί στη συνέχεια να δειχθεί ότι η δράση, οι εξισώσεις κίνησης και οι σύνδεσμοι Virasoro κάθε λύσης χορδών εντός του AdS_5 δύνανται να αναπαραχθούν από μια κατάλληλα κατασκευασμένη μεμβράνη του $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$. Παρομοίως, κάθε διάταξη χορδής εντός του $\mathrm{AdS}_4 \subset \mathrm{AdS}_5$ μπορεί να αναπαραχθεί από μια χορδοειδή μεμβράνη του $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$. Σαν επεξήγηση των ιδιοτήτων των χορδοειδών μεμβρανών, μπορούμε να βρούμε ansätze μεμβρανών που αναπαράγουν τη δυναμική των δύο διατάξεων GKP στο χώρο anti-de Sitter, ήτοι την περιστρεφόμενη χορδή GKP (I) που μελετήσαμε στην §4.1 και την παλλόμενη χορδή GKP (III) που μελετήσαμε στην §4.3. Για να διερευνήσουμε περαιτέρω την πραγματική σχέση μεταξύ των χορδοειδών μεμβρανών και των λύσεων των χορδών που αναπαράγουν, μπορούμε να αναλύσουμε το φάσμα των διαταραχών γύρω από τις αντίστοιχες χορδοειδείς μεμβράνες. Για τις δύο χορδοειδείς μεμβράνες που αναπαράγουν τις χορδές των GKP, βρίσκουμε ότι ένα αποσυζευγμένο υποσύνολο διαταραχών που είναι κάθετο στη διεύθυνση της χορδοειδούς μεμβράνης επιδέχεται μίας δομής ζωνών/χασμάτων Lamé, η οποία χαρακτηρίζει κατά μοναδικό τρόπο τη μεμβρανοειδή φύση τους. Από την άλλη μεριά, οι διεγέρσεις της χορδής αναπαρίστανται από μία δομή μονής ζώνης/χάσματος. Αυτά τα ευρήματα επιβεβαιώνουν την εικόνα που έχουμε για τις μεμβράνες ως συλλογικές διεγέρσεις κάποιων χορδοειδών τους συνιστωσών.

Επομένως βλέπουμε ότι η μελέτη των κλασσικών μεμβρανών αλά GKP μπορεί να είναι χρήσιμη. Περισσότερα θα ειπωθούν στην ενότητα περίληψης §15, αλλά ας δώσουμε κι εδώ μια πρόγευση. Λόγω του τρόπου που τις κατασκευάζουμε, έχουμε όλους τους λόγους να περιμένουμε ότι οι χορδοειδείς μεμβράνες θα αντιστοιχούν σε κάποιους χορδοειδείς τελεστές των δυϊκών υπερσύμμορφων θεωριών πεδίου. Για παράδειγμα, η διάταξη (I) των GKP, που δίδεται από την (4.8), είναι δυϊκή στους τελεστές συστροφής 2 (4.2). Η χορδοειδής μεμβράνη που αναπαράγει τη χορδή (I) των GKP θα πρέπει να είναι επίσης δυϊκή σε τελεστές συστροφής 2 της υπερσύμμορφης θεωρίας πεδίου όπως οι (4.2). Η αντιστοιχία κατάστασης-τελεστή είναι επίσης πολύ πιθανό να εφαρμόζεται και σε αυτή την περίπτωση και οι ενέργειες των χορδοειδών μεμβρανών αναμένεται να ισούνται με τις διαστάσεις κλίμακας των χορδοειδών τελεστών της θεωρίας βαθμίδας. Χωρίς τις χορδοειδείς μεμβράνες δεν υπήρχε τρόπος να βρούμε τελεστές της SCFT που να είναι δυϊκοί σε καταστάσεις της M-θεωρίας, ιδίως σε θεωρίες όπως η 6-διάστατη $\mathrm{A}_{N_c-1}\,(2,0)$ υπερσύμμορφη θεωρία πεδίου, για την οποία πολύ λίγα πράγματα είναι γνωστά. Το χορδοειδές όριο των μεμβρανών του AdS/CFT, μας διδάσκει ότι οι χορδοειδείς μεμβράνες απεικονίζονται σε τελεστές της θεωρίας βαθμίδας που είναι δυϊκοί στις χορδές που αναπαράγουν και ότι οι διαστάσεις κλίμακας των τελευταίων είναι ίσες με τις ενέργειες των χορδοειδών μεμβρανών.

Ένα δεύτερο δίδαγμα που παίρνουμε από τις χορδοειδείς μεμβράνες είναι ότι η M-θεωρία σε υπόβαθρα όπως το $\mathrm{AdS}_{4,7} \times \mathrm{S}^{7,4}$, διαθέτει πιθανότατα κάποιους κλασσικά ολοκληρώσιμους «χορδοειδείς» τομείς, όπου όλη η τεχνολογία και οι μέθοδοι του ολοκληρώσιμου παραδείγματος της χορδής στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ μπορούν να εφαρμοσθούν. Ο λόγος γι'αυτό είναι απλός: οι χορδοειδείς μεμβράνες έχουν την ίδια δράση και εξισώσεις κίνησης με μποζονικές χορδές στον $\mathrm{AdS}_5 \subset \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$, οι οποίες είναι γνωστό ότι είναι κλασσικά ολοκληρώσιμες [149] (βλέπε επίσης και την §3.2). Επομένως και αυτές αναμένεται να είναι κλασσικά ολοκληρώσιμες. Οι χορδοειδείς μεμβράνες φαίνεται ακόμη να επιβεβαιώνουν και μια υπόθεση που διατυπώθηκε πριν από καιρό [150], σύμφωνα με την οποία οι διάφορες δυαδικότητες AdS/CFT περιέχουν κοινούς ολοκληρώσιμους τομείς. Για όσον καιρό η υπόθεση αυτή αναμένει μιαν αυστηρή απόδειξη (ενδεχομένως μέσω ολοκληρωσιμότητας), οι χορδοειδείς μεμβράνες υποδεικνύουν ότι η «οικογένεια» των θεωριών με κοινούς ολοκληρώσιμους τομείς μπορεί στην πραγματικότητα να είναι μεγαλύτερη και να περιέχει, εκτός της ομάδας του AdS/CFT, και άλλες θεωρίες όπως η QCD και η θεωρία ABJM.

Το μέρος IV της διατριβής οργανώνεται ως εξής. Η §12 αποτελεί μια σύντομη εισαγωγή στις κλασσικές μποζονικές μεμβράνες στον $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$. Στην §13 παρουσιάζουμε τις χορδοειδείς μεμβράνες. Εξετάζουμε τα δύο κυριότερα ansätze χορδοειδών μεμβρανών στον $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ που αναπαράγουν πλήρως τη δράση και τις εξισώσεις κίνησης των περιστρεφόμενων διατάξεων των GKP στον AdS: (I) την κλειστή & διπλωμένη χορδή (4.8) των GKP στον AdS_3 και (III) την παλλόμενη χορδή (4.78) των GKP στον AdS_3. Εν συνεχεία, αποδεικνύουμε (σύμφωνα με τις γενικές γραμμές της εργασίας [151]) ότι η εντός κελύφους (on-shell) δράση, οι εξισώσεις κίνησης και τα διατηρούμενα φορτία των μποζονικών χορδών που ζουν στον $\mathrm{AdS}_5 \subset \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$, μπορούν να αναπαραχθούν από τα κατάλληλα ansätze μεμβρανών στον $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$. Ανάλογες προτάσεις διατυπώνονται και για τις μποζονικές χορδές στον $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$, στις §13.2–§13.3. Στην §14 εξετάζουμε τη σταθερότητα των δύο χορδοειδών μεμβρανών που αντιστοιχούν στις χορδές των GKP (I) και (III). Μία περίληψη των χορδοειδών μεμβρανών μπορεί να βρεθεί στην §15.

12 Περιστρεφόμενες Μεμβράνες στον $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε σύντομα τις κλασσικές και αφόρτιστες (WZ όρος (10.10) απών) μποζονικές μεμβράνες στον $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$,[47]

$$\begin{aligned}
&Y_{07} = Y_0 + iY_7 = 2\cosh\rho\, e^{it} & & X_{12} = X_1 + iX_2 = \cos\bar{\theta}_1\, e^{i\bar{\phi}_1}\\
&Y_{12} = Y_1 + iY_2 = 2\sinh\rho\cos\theta_1\, e^{i\phi_1} \qquad \& & & X_{34} = X_3 + iX_4 = \sin\bar{\theta}_1\cos\bar{\theta}_2\, e^{i\bar{\phi}_2}\\
&Y_{34} = Y_3 + iY_4 = 2\sinh\rho\sin\theta_1\cos\theta_2\, e^{i\phi_2} & & X_5 = \sin\bar{\theta}_1\sin\bar{\theta}_2\\
&Y_{56} = Y_5 + iY_6 = 2\sinh\rho\sin\theta_1\sin\theta_2\, e^{i\phi_3}, & &
\end{aligned} \tag{12.1}$$

όπου Y^μ και X^i είναι οι συντεταγμένες εμβάπτισης του $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ και $\rho \geq 0$, $t \in [0,\, 2\pi)$,[48] $\theta_1,\, \bar{\theta}_1 \in [0,\, \pi]$, και $\theta_2,\, \phi_1,\, \phi_2,\, \phi_3,\, \bar{\theta}_2,\, \bar{\phi}_1,\, \bar{\phi}_2 \in [0,\, 2\pi)$. Το στοιχείο μήκους του $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ δίδεται από:

$$\begin{aligned}
ds^2 =& G^{\mathrm{AdS}}_{mn}(y)dy^m dy^n + G^{\mathrm{S}}_{mn}(x)dx^m dx^n = \\
=& 4\Big[-\cosh^2\rho\, dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho\,\Big(d\theta_1^2 + \cos^2\theta_1\, d\phi_1^2 + \sin^2\theta_1\,\big(d\theta_2^2 + \cos^2\theta_2 d\phi_2^2 + \\
&+ \sin^2\theta_2 d\phi_3^2\big)\Big)\Big] + \Big[d\bar{\theta}_1^2 + \cos^2\bar{\theta}_1\, d\bar{\phi}_1^2 + \sin^2\bar{\theta}_1\,\Big(d\bar{\theta}_2^2 + \cos^2\bar{\theta}_2\, d\bar{\phi}_2^2\Big)\Big],
\end{aligned} \tag{12.2}$$

όπου $y^m \equiv (t,\, \rho,\, \theta_1,\, \theta_2,\, \phi_1,\, \phi_2,\, \phi_3)$ και $x^m \equiv \big(\bar{\theta}_1,\, \bar{\theta}_2,\, \bar{\phi}_1,\, \bar{\phi}_2\big)$. Με την επιλογή βαθμίδας (10.12), η δράση Polyakov (10.13) για τη μεμβράνη (για $\nu = 2$) στον $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ (12.2) γίνεται:

$$\begin{aligned}
S_P = \frac{T_2}{2}\int\Big[&G^{\mathrm{AdS}}_{mn}(y)\dot{y}^m\dot{y}^n + G^{\mathrm{S}}_{mn}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n - \frac{1}{2}G^{\mathrm{AdS}}_{mn}(y)G^{\mathrm{AdS}}_{pq}(y)\{y^m, y^p\}\{y^n, y^q\} - \\
&-\frac{1}{2}G^{\mathrm{S}}_{mn}(x)G^{\mathrm{S}}_{pq}(x)\{x^m, x^p\}\{x^n, x^q\} - G^{\mathrm{AdS}}_{mn}(y)G^{\mathrm{S}}_{pq}(x)\{y^m, x^p\}\{y^n, x^q\}\Big]d\tau\, d\sigma\, d\delta.
\end{aligned} \tag{12.3}$$

Οι σύνδεσμοι (10.17)–(10.18) που προκύπτουν από τον καθορισμό της βαθμίδας (10.12) γίνονται ($i, j = 1, 2,\ \nu = 2$):

$$\gamma_{00} = -\det h_{ij} \Rightarrow G^{\mathrm{AdS}}_{mn}(y)\dot{y}^m\dot{y}^n + G^{\mathrm{S}}_{mn}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n + \frac{1}{2}G^{\mathrm{AdS}}_{mn}(y)G^{\mathrm{AdS}}_{pq}(y)\{y^m, y^p\}\{y^n, y^q\} +$$

[47] Στον $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ είναι $\mathfrak{k} = \ell/R = 2$, όπως είδαμε στην §2.7. Για $R = 1 \Leftrightarrow \ell = 2$. Το R και το ℓ μπορούν να επανέλθουν σε όλες τις σχέσεις του μέρους IV, θέτοντας $\delta \mapsto \delta/R$ και $\delta \in [0,\, 2\pi R)$.

[48] Προκειμένου να αποφύγουμε τη χρονική περιοδικότητα (μία τυπική ιδιότητα του χωροχρόνου anti-de Sitter) πρέπει να θεωρήσουμε τον universal covering χώρο του AdS, στον οποίο $t \in \mathbb{R}$.

$$+\frac{1}{2}G^{\rm S}_{mn}(x)G^{\rm S}_{pq}(x)\{x^m,x^p\}\{x^n,x^q\}+G^{\rm AdS}_{mn}(y)G^{\rm S}_{pq}(x)\{y^m,x^p\}\{y^n,x^q\}=0 \tag{12.4}$$

$$\gamma_{0i}=G^{\rm AdS}_{mn}(y)\,\dot{y}^m\partial_i y^n+G^{\rm S}_{mn}(x)\dot{x}^m\partial_i x^n=0\Rightarrow\Big\{G^{\rm AdS}_{mn}(y)\,\dot{y}^m,y^n\Big\}+\Big\{G^{\rm S}_{mn}(x)\,\dot{x}^m,x^n\Big\}=0. \tag{12.5}$$

Η δράση (12.3) και οι σύνδεσμοι (12.4)–(12.5) είναι αναλλοίωτοι υπό την καθολική ομάδα συμμετρίας του $\text{AdS}_7\times\text{S}^4$, ήτοι την $\mathfrak{so}(6,2)\times\mathfrak{so}(5)$. Τα ακόλουθα $28+10$ φορτία Noether (σπίν και στροφορμές) διατηρούνται εντός κελύφους (on-shell):

$$S^{\mu\nu}=T_2\int_0^{2\pi}\Big(Y^\mu\dot{Y}^\nu-Y^\nu\dot{Y}^\mu\Big)\,d\sigma d\delta,\qquad \mu\,,\nu=0,1,\ldots,7 \tag{12.6}$$

$$J^{ij}=T_2\int_0^{2\pi}\Big(X^i\dot{X}^j-X^j\dot{X}^i\Big)\,d\sigma d\delta,\qquad i,j=1,2,\ldots,5. \tag{12.7}$$

Ορισμένα εκ των φορτίων (12.6)–(12.7) αντιστοιχούν στις κυκλικές συντεταγμένες της δράσης (12.3), ήτοι t, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, $\overline{\phi}_1$, $\overline{\phi}_2$. Οι εκφράσεις για τα κυκλικά φορτία μπορούν να διαβαστούν απευθείας από την (12.3), χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο στοιχείο μήκους (12.2):

$$E=\left|\frac{\partial L}{\partial\dot{t}}\right|=4\,T_2\int_0^{2\pi}\dot{t}\cosh^2\rho\,d\sigma d\delta=S^{07} \tag{12.8}$$

$$S_1=\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}_1}=4\,T_2\int_0^{2\pi}\dot{\phi}_1\sinh^2\rho\,\cos^2\theta_1\,d\sigma d\delta=S^{12} \tag{12.9}$$

$$S_2=\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}_2}=4\,T_2\int_0^{2\pi}\dot{\phi}_2\sinh^2\rho\,\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2\,d\sigma d\delta=S^{34} \tag{12.10}$$

$$S_3=\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}_3}=4\,T_2\int_0^{2\pi}\dot{\phi}_3\sinh^2\rho\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\,d\sigma d\delta=S^{56} \tag{12.11}$$

$$J_1=\frac{\partial L}{\partial\dot{\overline{\phi}}_1}=4\,T_2\int_0^{2\pi}\dot{\overline{\phi}}_1\cos^2\overline{\theta}_1\,d\sigma d\delta=J^{12} \tag{12.12}$$

$$J_2=\frac{\partial L}{\partial\dot{\overline{\phi}}_2}=4\,T_2\int_0^{2\pi}\dot{\overline{\phi}}_2\sin^2\overline{\theta}_1\cos^2\overline{\theta}_2\,d\sigma d\delta=J^{34}. \tag{12.13}$$

Στην (12.8)–(12.13), το L δηλώνει την Λαγκρανζιανή της μεμβράνης όπως αυτή προκύπτει από τη σχέση $S_P=\int L\,d\tau$.

13 Περιστρεφόμενες Μεμβράνες ως Χορδές

13.1 Χορδοειδείς Μεμβράνες στον $\text{AdS}_7\times\text{S}^4$

Ο σκοπός της παρούσας ενότητας είναι να διερευνήσουμε τη χορδοειδή συμπεριφορά των κλασσικών μεμβρανών εντός του $\text{AdS}_7\times\text{S}^4$. Θα δείξουμε ότι η κλειστή διπλωμένη χορδή (I) των GKP που περιστρέφεται εντός του $\text{AdS}_3\subset\text{AdS}_5\times\text{S}^5$,[49] έχει την ίδια δράση και εξισώσεις κίνησης με ένα συγκεκριμένο σολιτόνιο

[49] Η κλειστή διπλωμένη χορδή (I) των GKP εντός του AdS_3 [11], μελετήθηκε στην §4.1.

μεμβράνης που περιστρέφεται στον $\mathrm{AdS}_3 \subset \mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$. Παρόμοιο αποτέλεσμα μπορεί να δειχθεί ότι ισχύει και για την κλειστή παλλόμενη διπλωμένη χορδή (III) των GKP.[50] Στη συνέχεια τα δύο αποτελέσματα θα γενικευθούν σε όλα τα σολιτόνια χορδών που ζουν στον $\mathrm{AdS}_5 \subset \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$, για τα οποία θα δειχθεί ότι υπάρχει πάντοτε ένα σολιτόνιο μεμβράνης εντός του $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ με την ίδια δράση και εξισώσεις κίνησης.

Ας θεωρήσουμε το επόμενο ansatz για μία μεμβράνη που περιστρέφεται στον $\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^1 \subset \mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$:

$$\Big\{t = \kappa\tau,\ \rho = \rho(\sigma),\ \phi_1 = \kappa\omega\tau,\ \phi_2 = \phi_3 = \theta_1 = \theta_2 \ \ = 0\Big\} \times \Big\{\overline{\phi}_1 = \delta,\ \overline{\theta}_1 = \overline{\theta}_2 = \overline{\phi}_2 = 0\Big\}. \tag{13.1}$$

Στις συντεταγμένες εμβάπτισης ($R = 1,\ \ell = 2$), το ansatz (13.1) γράφεται:

$$\begin{aligned} &Y_0 = 2\cosh\rho(\sigma)\cos\kappa\tau\ \ , \quad Y_3 = Y_4 = Y_5 = Y_6 = 0\,, && X_1 = \cos\delta \\ &Y_1 = 2\sinh\rho(\sigma)\cos\kappa\omega\tau && X_2 = \sin\delta \\ &Y_2 = 2\sinh\rho(\sigma)\sin\kappa\omega\tau && X_3 = X_4 = X_5 = 0 \\ &Y_7 = 2\cosh\rho(\sigma)\sin\kappa\tau. \end{aligned} \tag{13.2}$$

Η δράση του Polyakov (12.3) και η εξίσωση συνδέσμου (12.4) γίνονται:[51]

$$S_P = 2\,T_2\int\Big(-\dot{t}^2\cosh^2\rho + \dot{\phi}_1^2\,\sinh^2\rho\,\cos^2\theta_1 - \cos^2\overline{\theta}_1\,\rho'^2\,\overline{\phi}_1'^2\ \{\sigma,\delta\}^2\Big)\,d\tau d\sigma d\delta = \tag{13.4}$$

$$= \frac{2\,T_1}{\ell_s g_s}\int\big(-\kappa^2\cosh^2\rho + \kappa^2\omega^2\,\sinh^2\rho - \rho'^{\,2}\big)\,d\tau d\sigma \tag{13.5}$$

$$\rho'^{\,2} - \kappa^2\left(\cosh^2\rho - \omega^2\sinh^2\rho\right) = 0 \qquad (\text{σύνδεσμος}). \tag{13.6}$$

Τώρα μπορούμε να συγκρίνουμε τη δράση (13.5) και τον αντίστοιχο σύνδεσμο βαθμίδας (13.6), με τη δράση εντός κελύφους (4.11) και το σύνδεσμο Virasoro (4.13) της χορδής GKP (I). Ταυτίζονται! Με την εξαίρεση του παράγοντα $\cos^2\overline{\theta}_1\,\overline{\phi}_1'^2$, η εκτός κελύφους δράση (13.4) είναι επίσης ταυτόσημη με την εκτός κελύφους δράση της χορδής (4.10). Για να αποδείξουμε την ισοδυναμία των συστημάτων (4.10)–(4.13) και (13.4)–(13.6), ας σημειωθεί ότι η δράση (13.4) έχει μόνο το ρ με μη μηδενική εξίσωση κίνησης:

$$\rho'' + \kappa^2\left(\omega^2 - 1\right)\sinh\rho\cosh\rho = 0, \tag{13.7}$$

Η εξίσωση (13.7) είναι η ίδια με την αντίστοιχη εξίσωση της χορδής που δίνεται από τη σχέση (4.12). Ταυτόχρονα, όλα τα διατηρούμενα φορτία της δράσης της μεμβράνης (13.4) είναι ίδια με τα αντίστοιχα

[50] Η κλειστή παλλόμενη διπλωμένη χορδή (III) των GKP εντός του AdS_3 [11], μελετήθηκε στην §4.3.

[51] Στις $D = 11$ χωροχρονικές διαστάσεις, μπορούμε να εκφράσουμε τη 10-διάστατη σταθερά σύζευξης της χορδής g_s συναρτήσει του μήκους Planck ℓ_{11} και του θεμελιώδους μήκους της χορδής ℓ_s, με διαστατική αναγωγή της 11-διάστατης υπερβαρύτητας στις $D = 10$ χωροχρονικές διαστάσεις:

$$g_s = \left(\frac{R_c}{\ell_{11}}\right)^{3/2}, \qquad \ell_s^2 = \frac{\ell_{11}^3}{R_c} \quad\longrightarrow\quad g_s = \left(\frac{\ell_{11}}{\ell_s}\right)^3, \tag{13.3}$$

όπου R_c είναι η ακτίνα συμπαγοποίησης. Η 11-διάστατη τάση της μεμβράνης γίνεται $T_2 = \left[(2\pi)^2 g_s \ell_s^3\right]^{-1}$ [14].

φορτία ($\omega^2 > 1$) της χορδής (4.22)–(4.23):

$$E(\omega) = \frac{16\,T_1}{g_s\ell_s}\cdot\frac{\omega}{\omega^2-1}\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \tag{13.8}$$

$$S(\omega) = \frac{16\,T_1}{g_s\ell_s}\cdot\left(\frac{\omega^2}{\omega^2-1}\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)-\mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)\right) = S_1. \tag{13.9}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η μεμβράνη (13.1) είναι δυναμικά ισοδύναμη με την κλειστή διπλωμένη χορδή (I) των GKP στον AdS_3, που δίδεται από το ansatz (4.8).

Για την παλλόμενη χορδή (III) των GKP στον AdS_3, μπορούμε να βρούμε μια δυναμικά ισοδύναμη μεμβράνη στον $\mathrm{AdS}_7\times\mathrm{S}^4$. Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο ansatz μιας παλλόμενης μεμβράνης στον $\mathrm{AdS}_7\times\mathrm{S}^4$:

$$\Big\{t=t\,(\tau)\,,\ \rho=\rho\,(\tau)\,,\ \theta_1=\frac{\pi}{2},\ \theta_2=\sigma,\ \phi_1=\phi_2=\phi_3=0\Big\}\times\Big\{\overline{\phi}_1=\delta,\ \overline{\theta}_1=\overline{\theta}_2=\overline{\phi}_2=0\Big\}. \tag{13.10}$$

Σε συντεταγμένες εμβάπτισης, το ansatz (13.10) γράφεται:

$$\begin{aligned}
&Y_0=2\cosh\rho(\tau)\cos t\,(\tau)\,, \quad Y_1=Y_2=Y_4=Y_6=0\,, && X_1=\cos\delta\\
&Y_3=2\sinh\rho(\tau)\cos\sigma && X_2=\sin\delta\\
&Y_5=2\sinh\rho(\tau)\sin\sigma && X_3=X_4=X_5=0\\
&Y_7=2\cosh\rho(\tau)\sin t\,(\tau)\,.
\end{aligned} \tag{13.11}$$

Η εκτός και εντός κελύφους δράση Polyakov για τη διάταξη της παλλόμενης μεμβράνης (13.10), καθώς και η αντίστοιχη εξίσωση για το σύνδεσμο δίδονται από:

$$S_P = 2\,T_2\int\left(-\dot{t}^2\cosh^2\rho+\dot{\rho}^2-\sinh^2\rho\,\sin^2\theta_1\,\cos^2\overline{\theta}_1\,\theta_2'^2\,\overline{\phi}_1'^2\,\{\sigma,\delta\}^2\right)d\tau d\sigma d\delta = \tag{13.12}$$

$$= \frac{2\,T_1}{\ell_s g_s}\int\left(-\dot{t}^2\cosh^2\rho+\dot{\rho}^2-\sinh^2\rho\right)d\tau d\sigma \tag{13.13}$$

$$\dot{\rho}^2-\dot{t}^2\cosh^2\rho+\sinh^2\rho=0 \qquad \text{(σύνδεσμος)}. \tag{13.14}$$

Η εντός κελύφους δράση Polyakov (13.13) και ο σύνδεσμός της (13.14), είναι ταυτόσημες των αντίστοιχων χορδοειδών, που δίδονται από τις εξισώσεις (4.81)–(4.84) για $w=1$. Συνεπώς η παλλόμενη μεμβράνη (13.10) είναι δυναμικά ισοδύναμη με την παλλόμενη χορδή GKP εντός του AdS_3 (4.78). Οι εξισώσεις κίνησης για το t και το ρ, (13.10) είναι επίσης οι ίδιες με τις αντίστοιχες εξισώσεις της χορδής (4.82)–(4.83) (με $w=1$):

$$\ddot{t}\cosh^2\rho+2\,\dot{t}\,\dot{\rho}\,\cosh\rho\sinh\rho=0 \tag{13.15}$$

$$\ddot{\rho}+\sinh\rho\cosh\rho\left(\dot{t}^2+1\right)=0. \tag{13.16}$$

Όπως υποσχεθήκαμε, μπορούμε να γενικεύσουμε τα δύο προηγούμενα παραδείγματα σε κάθε[52] σολιτόνιο χορδής που ζει στον $\mathrm{AdS}_5 \subset \mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ και δεν έχει δυναμικά μέρη στην S^5.[53] Άρα θέλουμε να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση:

■ **13.1.1.** *Κάθε αμιγές κλασικό σολιτόνιο χορδής στον AdS_5 έχει ένα ισοδύναμο σολιτόνιο μεμβράνης στον $AdS_7 \times S^4$ (και όχι το αντίστροφο).*

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε τη δράση Polyakov για τη μεμβράνη (12.3) και τις αντίστοιχες εξισώσεις συνδέσμων (12.4)–(12.5) στη βαθμίδα (10.12):

$$S_2 = \frac{T_2}{2}\int\Big[G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\dot{y}^m\dot{y}^n + G^{\text{S}}_{mn}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n - \frac{1}{2}G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{AdS}}_{pq}(y)\{y^m,y^p\}\{y^n,y^q\} - \\ -\frac{1}{2}G^{\text{S}}_{mn}(x)G^{\text{S}}_{pq}(x)\{x^m,x^p\}\{x^n,x^q\} - G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{S}}_{pq}(x)\{y^m,x^p\}\{y^n,x^q\}\Big]d\tau\, d\sigma\, d\delta \tag{13.17}$$

$$G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\dot{y}^m\dot{y}^n + G^{\text{S}}_{mn}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n + \frac{1}{2}G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{AdS}}_{pq}(y)\{y^m,y^p\}\{y^n,y^q\} + \\ +\frac{1}{2}G^{\text{S}}_{mn}(x)G^{\text{S}}_{pq}(x)\{x^m,x^p\}\{x^n,x^q\} + G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{S}}_{pq}(x)\{y^m,x^p\}\{y^n,x^q\} = 0 \tag{13.18}$$

$$G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\,\dot{y}^m\partial_i y^n + G^{\text{S}}_{mn}(x)\,\dot{x}^m\partial_i x^n = \Big\{G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\,\dot{y}^m, y^n\Big\} + \Big\{G^{\text{S}}_{mn}(x)\,\dot{x}^m, x^n\Big\} = 0, \tag{13.19}$$

όπου, όπως και προηγουμένως $y^m \equiv (t,\, \rho,\, \theta_1,\, \theta_2,\, \phi_1,\, \phi_2,\, \phi_3)$, $x^m \equiv \left(\overline{\theta}_1,\, \overline{\theta}_2,\, \overline{\phi}_1,\, \overline{\phi}_2\right)$ και $G_{mn}\,(y,\, x)$ είναι οι συντελεστές της (12.2). Έστω ότι το σ υποδηλώνει τις χωρικές συντεταγμένες κοσμικού φύλλου της χορδής:

$$y^m = y^m\,(\tau\,, \sigma) \quad \& \quad x^m = x^m\,(\tau\,, \delta)\,, \tag{13.20}$$

τότε η παραπάνω δράση και σύνδεσμοι γράφονται:

$$S_2 = \frac{T_2}{2}\int\Big[G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\dot{y}^m\dot{y}^n + G^{\text{S}}_{mn}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n - G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{S}}_{pq}(x)y'^{\,m}y'^{\,n}x'^{\,p}x'^{\,q}\Big]d\tau\, d\sigma\, d\delta \tag{13.21}$$

$$G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\dot{y}^m\dot{y}^n + G^{\text{S}}_{mn}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n + G^{\text{AdS}}_{mn}(y)G^{\text{S}}_{pq}(x)y'^{\,m}y'^{\,n}x'^{\,p}x'^{\,q} = 0 \tag{13.22}$$

$$G^{\text{AdS}}_{mn}(y)\,\dot{y}^m y'^{\,n} = G^{\text{S}}_{mn}(x)\,\dot{x}^m x'^{\,n} = 0. \tag{13.23}$$

[52] Αυτή η πρόταση δεν περιλαμβάνει όλα τα ansätze που είναι ασύμβατα με την επιλογή της σύμμορφης βαθμίδας ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) στη δράση Polyakov για τη χορδή (3.3). Μια ενδιαφέρουσα γενίκευση αυτής της πρότασης θα μπορούσε να περιέχει όλες τις διατάξεις χορδών Polyakov στον AdS_5, ανεξάρτητα από την επιλογή βαθμίδας, ή ισοδύναμα όλα τα Nambu-Goto ansätze χορδών στον AdS_5.

[53] Για λόγους ευκολίας, πρόκειται να βαφτίσουμε όλα τα $\mathfrak{sl}(2)$ σολιτόνια χορδών που δεν έχουν μέρη τους επί της S^5, «αμιγή» ("pure").

Τώρα θέτουμε $x^3 = \overline{\phi}_1 = \delta$ για τη συντεταγμένη της 4-σφαίρας που αντιστοιχεί στο $G^{\rm S}_{33} = \cos^2\overline{\theta}_1$. Τότε,

$$S_2 = \frac{T_2}{2}\int\Big[G^{\rm AdS}_{mn}(y)\Big(\dot{y}^m\dot{y}^n - \cos^2\overline{\theta}_1\,\overline{\phi}_1{}'^2\,y'^{\,m}y'^{\,n}\Big) + G^{\rm S}_{mn\neq 3}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n - \\ -G^{\rm AdS}_{mn}(y)G^{\rm S}_{pq\neq 3}(x)y'^{\,m}y'^{\,n}x'^{\,p}x'^{\,q}\Big]d\tau\,d\sigma\,d\delta \qquad (13.24)$$

$$G^{\rm AdS}_{mn}(y)\left(\dot{y}^m\dot{y}^n + \cos^2\overline{\theta}_1\,y'^{\,m}y'^{\,n}\right) + G^{\rm S}_{mn\neq 3}(x)\dot{x}^m\dot{x}^n + \\ +G^{\rm AdS}_{mn}(y)G^{\rm S}_{pq\neq 3}(x)y'^{\,m}y'^{\,n}x'^{\,p}x'^{\,q} = 0 \qquad (13.25)$$

$$G^{\rm AdS}_{mn}(y)\,\dot{y}^m y'^{\,n} = G^{\rm S}_{mn\neq 3}(x)\,\dot{x}^m x'^{\,n} = 0. \qquad (13.26)$$

Η πρόταση 13.1.1 προκύπτει θέτοντας $x^{m\neq 3} = 0$, $y^{m>5} = 0$ και κάνοντας την ολοκλήρωση ως προς δ:

$$S_2 = \frac{T_2}{2}\int G^{\rm AdS}_{mn\leq 5}(y^{p\leq 5})\left(\dot{y}^m\dot{y}^n - \cos^2\overline{\theta}_1\,\overline{\phi}_1{}'^2\,y'^{\,m}y'^{\,n}\right)d\tau\,d\sigma = \qquad (13.27)$$

$$= \frac{T_1}{2g_s\ell_s}\int G^{\rm AdS}_{mn\leq 5}(y^{p\leq 5})\left(\dot{y}^m\dot{y}^n - y'^{\,m}y'^{\,n}\right)d\tau\,d\sigma = \frac{S_1}{g_s\ell_s} \qquad (13.28)$$

$$G^{\rm AdS}_{mn\leq 5}(y^{p\leq 5})\left(\dot{y}^m\dot{y}^n + y'^{\,m}y'^{\,n}\right) = G^{\rm AdS}_{mn\leq 5}(y^{p\leq 5})\,\dot{y}^m y'^{\,n} = 0, \qquad (13.29)$$

αλλά αυτή είναι απλά η δράση και οι σύνδεσμοι Virasoro μιας κλασσικής χορδής στον AdS_5. Αυτό φαίνεται αν συγκρίνουμε τις εξισώσεις (13.28)–(13.29) με την αντίστοιχη δράση Polyakov της χορδής και τους συνδέσμους Virasoro στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ (στη σύμμορφη βαθμίδα, $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$), (3.3)–(3.5):

$$S_1 = \frac{T_1}{2}\int\Big[G^{\rm AdS}_{mn}(y)\left(\dot{y}^m\dot{y}^n - y'^{\,m}y'^{\,n}\right) + G^{\rm S}_{mn}(x)\left(\dot{x}^m\dot{x}^n - x'^{\,m}x'^{\,n}\right)\Big]d\tau\,d\sigma \qquad (13.30)$$

$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2}\Big[G^{\rm AdS}_{mn}(y)\left(\dot{y}^m\dot{y}^n + y'^{\,m}y'^{\,n}\right) + G^{\rm S}_{mn}(x)\left(\dot{x}^m\dot{x}^n + x'^{\,m}x'^{\,n}\right)\Big] = 0 \qquad (13.31)$$

$$T_{01} = T_{10} = G^{\rm AdS}_{mn}(y)\,\dot{y}^m y'^{\,n} + G^{\rm S}_{mn}(x)\,\dot{x}^m x'^{\,n} = 0. \qquad (13.32)$$

Οι $\overline{\theta}_1$ και $\overline{\phi}_1$ εξισώσεις κίνησης της (13.27) ικανοποιούνται κατά τετριμμένο τρόπο και οι υπόλοιπες εξισώσεις κίνησης της (13.27) είναι οι ίδιες με τις εξισώσεις κίνησης που λαμβάνονται παραλλάσσοντας τη δράση (13.30) της χορδής. Συνεπώς τα δύο συστήματα είναι δυναμικά ισοδύναμα.

Σε ότι αφορά την αντίστροφη πρόταση της 13.1.1, αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλές μη ισοδύναμες διατάξεις μεμβρανών στον $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ με εξάρτηση από αμφότερα τα σ και δ, τις οποίες είναι αδύνατο να λάβουμε από τη δράση της κλασσικής μποζονικής χορδής στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$. $\Box$

13.2 Χορδοειδείς Μεμβράνες στον $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$

Η πρόταση 13.1.1 μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να εφαρμοστεί και στην περίπτωση του $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$. Υποθέτοντας ότι οι χωροχρονικές συντεταγμένες της χορδής εξαρτώνται από αμφότερες τις συντεταγμένες του κοσμικού φύλλου $\{\tau\,,\sigma\}$,

$$y^m = \left(t = t\,(\tau\,,\sigma)\,,\ \rho = \rho\,(\tau\,,\sigma)\,,\ \theta = \theta\,(\tau\,,\sigma)\,,\ \phi_1 = \phi_1\,(\tau\,,\sigma)\,,\ \phi_2 = \phi_2\,(\tau\,,\sigma)\right), \tag{13.33}$$

η πρόταση 13.1.1 μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε ένα υποσύνολο όλων των δυνατών διατάξεων των κλασσικών χορδών στον AdS_5, ήτοι τις χορδές στον $\mathrm{AdS}_4 \subset \mathrm{AdS}_5$. Μόνο αυτές μπορούν να ληφθούν από μια μεμβράνη στον $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$. Για παράδειγμα αμφότερες οι χορδοειδείς μεμβράνες (13.1)–(13.10) που συναντήσαμε παραπάνω και αναπαράγουν τις χορδές GKP στον $\mathrm{AdS}_3 \subset \mathrm{AdS}_4 \subset \mathrm{AdS}_5$, είναι τέτοιες μεμβράνες μιας και ζουν στον $\mathrm{AdS}_4 \subset \mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$. Πιο γενικά,

■ **13.2.1.** *Κάθε αμιγές κλασικό σολιτόνιο χορδής στον $AdS_4 \subset AdS_5$*[54] *έχει ένα ισοδύναμο σολιτόνιο μεμβράνης στον $AdS_4 \times S^7$ (και όχι το αντίστροφο).*

Αν δεν λάβουμε υπόψη μας τη συνθήκη για πλήρη εξάρτηση των χωροχρονικών συντεταγμένων της χορδής από τις δύο συντεταγμένες του κοσμικού φύλλου $\{\tau\,,\sigma\}$ όπως στην (13.33), θα πρέπει να είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε την πιο πάνω μέθοδο και να λάβουμε (i) χορδοειδείς μεμβράνες στον $\mathrm{AdS}_{4/7} \times \mathrm{S}^{7/4}$ που να είναι ισοδύναμες με μερικές ειδικές διατάξεις χορδών που ζουν εντός του $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ και (ii) χορδοειδείς μεμβράνες στον $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$ που είναι ισοδύναμες με χορδές που ζουν στον AdS_5.

13.3 Χορδοειδείς Μεμβράνες στον $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$

Οι χορδοειδείς μεμβράνες έχουν επίσης νόημα και σε τροχιακούς χωροχρόνους όπως ο $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$. Για $k = 1$, ο χώρος αυτός δεν είναι τίποτε άλλο από τον $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$ χωροχρόνο που είδαμε πιο πάνω. Όπως συζητήθηκε στην §2.8, οι γεωμετρίες όπως αυτή του $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$ παρέχουν τα βαρυτικά υπόβαθρα της αντιστοιχίας ABJM (2.37).

Στα πλαίσια της θεωρίας ABJM, έχει τεθεί η ερώτηση κατά πόσον η λογαριθμική συμπεριφορά είναι δυνατή για τις ανώμαλες διαστάσεις κάποιων καταστάσεων της θεωρίας. Όπως είδαμε πίσω στην §4, η λογαριθμική συμπεριφορά των ανώμαλων διαστάσεων είναι δυνατή για τους τελεστές συστροφής 2 της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας και τις δυϊκές τους κλειστές διπλωμένες GKP χορδές (I) στον AdS_3. Με βάση τα όσα είπαμε, μπορούμε να απαντήσουμε την παραπάνω ερώτηση καταφατικά χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των χορδοειδών μεμβρανών. Ας θεωρήσουμε τη μετρική του $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$ [152]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= G^{\mathrm{AdS}}_{mn}(y)dy^m dy^n + G^{\mathrm{S}/\mathbb{Z}}_{mn}(x)dx^m dx^n = \\ &= \ell^2\left(-\cosh^2\rho\, dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho\cdot d\Omega_2^2\right) + R^2 d\overline{\Omega}^2_{7/\mathbb{Z}_k} \end{aligned} \tag{13.34}$$

$$d\overline{\Omega}^2_{7/\mathbb{Z}_k} = \left(\frac{d\overline{y}}{k} + \widetilde{A}\right)^2 + ds^2_{\mathbb{CP}^3}\,, \tag{13.35}$$

$$\widetilde{A} \equiv \frac{1}{2}\left(\cos^2\overline{\xi} - \sin^2\overline{\xi}\right) d\overline{\psi} + \frac{1}{2}\cos^2\overline{\xi}\,\cos\overline{\theta}_1\, d\overline{\phi}_1 + \frac{1}{2}\sin^2\overline{\xi}\,\cos\overline{\theta}_2\, d\overline{\phi}_2$$

[54] Γράφοντας $\mathrm{AdS}_4 \subset \mathrm{AdS}_5$, εννοούμε ότι μία από τις δύο αζιμουθιακές γωνίες της τρισδιάστατης σφαίρας του AdS_5 έχει τεθεί ίση προς το μηδέν.

$$ds^2_{\mathbb{CP}^3} = d\overline{\xi}^2 + \cos^2\overline{\xi}\,\sin^2\overline{\xi}\left(d\overline{\psi} + \frac{1}{2}\cos\overline{\theta}_1\,d\overline{\phi}_1 - \frac{1}{2}\cos\overline{\theta}_2\,d\overline{\phi}_2\right)^2 +$$
$$+\frac{1}{4}\cos^2\overline{\xi}\left(d\overline{\theta}_1^2 + \sin^2\overline{\theta}_1\,d\overline{\phi}_1^2\right) + \frac{1}{4}\sin^2\overline{\xi}\left(d\overline{\theta}_2^2 + \sin^2\overline{\theta}_2\,d\overline{\phi}_2^2\right). \qquad (13.36)$$

Οι διατάξεις των μεμβρανών (13.1)–(13.10) μπορούν εύκολα να ληφθούν από τις (13.34)–(13.36). Στα ansätze (13.1)–(13.10), αρκεί $\overline{y} = k\delta$ (επίσης για το $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$ είναι $\mathfrak{k} = \ell/R = 1/2$) και να θέσουμε τις υπόλοιπες έξι γωνίες της S^7 ίσες με μηδέν. Η λογαριθμική συμπεριφορά θα είναι τότε δυνατή για τις καταστάσεις της ABJM θεωρίας που είναι δυϊκές στα ισοδύναμα της χορδοειδούς μεμβράνης (13.1) στον $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$, που εμπερικλείει πλήρως τη δυναμική και τις ιδιότητες των κλειστών και διπλωμένων χορδών (I) των GKP. Πιο γενικά, μπορούμε να διατυπώσουμε την ακόλουθη πρόταση:

■ **13.3.1.** *Κάθε αμιγές κλασικό σολιτόνιο χορδής στον $AdS_4 \subset AdS_5$ έχει ένα ισοδύναμο σολιτόνιο μεμβράνης στον $AdS_4 \times S^7/\mathbb{Z}_k$ (και όχι το αντίστροφο).*

Προτάσεις όπως η 13.3.1 θα πρέπει να αναμένονται μιας και είναι γνωστό ότι η θεωρία χορδών τύπου IIA στον $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{CP}^3$ μπορεί να ληφθεί από τη δράση της υπερμεμβράνης στον $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$ με διπλή διαστατική αναγωγή [153].

Έτσι ολοκληρώνουμε την παρουσίαση των χορδοειδών μεμβρανών στους χώρους anti-de Sitter. Στην επόμενη ενότητα πρόκειται να μελετήσουμε την ευστάθεια των δύο διατάξεων χορδοειδών μεμβρανών που εξετάσαμε παραπάνω, ήτοι τις (13.1)–(13.10).

14 Διαταραχές Μεμβρανών

Αντικείμενο της παρούσας ενότητας είναι η μελέτη της ευστάθειας των χορδοειδών μεμβρανών. Γενικά θα περιμέναμε οι χορδοειδείς μεμβράνες να είναι ασταθείς, λόγω της δ-συντεταγμένης τους που έχει τυλιχθεί γύρω από ένα μεγάλο κύκλο της $\mathrm{S}^{4/7}$. Η δ συντεταγμένη είναι επιρρεπής στην κατάρρευση προς τους πόλους της αντίστοιχης υπερσφαίρας, η οποία οδηγεί το συνολικό σύστημα προς μια πιο ευσταθή κατάσταση με χαμηλότερη ενέργεια. Πράγματι, αυτό είναι ήδη γνωστό για κλασσικές μποζονικές χορδές που έχουν τυλιχθεί γύρω από ένα μέγιστο κύκλο μιας δισδιάστατης σφαίρας και δεν έχουν καμία άλλη δυναμική [154]. Από την άλλη μεριά οι χορδοειδείς μεμβράνες μοιράζονται μια κοινή Λαγκρανζιανή, εξισώσεις κίνησης και συνδέσμους βαθμίδας με τις ισοδύναμές τους χορδές, έτσι ώστε να περιμένουμε ότι θα κληρονομούν πολλές από τις ευστάθειες/αστάθειές τους. Υποθέτοντας π.χ. ότι η διάταξη της χορδής που είναι δυϊκή στη χορδοειδή μεμβράνη είναι ασταθής, υπάρχουν πολλοί τρόποι για να τη σταθεροποιήσουμε, π.χ. να προσθέσουμε περισσότερες στροφορμές [154, 155], ευσταθείς συνιστώσες εντός του AdS [48, 156], παλλόμενα μέρη [157], τροχιακές προβολές [158] και όρους ροών [159]. Ακόμη και εκείνες οι χορδές όμως που είναι γνωστό ότι είναι ασταθείς, έχουν μελετηθεί εκτενώς και έχουν αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμες στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT [48, 154], καθώς οι αστάθειές τους αποδεικνύονται πολλές φορές ασήμαντες από την πλευρά της δυϊκής θεωρίας βαθμίδας [160]. Ένας δυνατός τρόπος να εξηγήσουμε αυτή την κατάσταση είναι αναφέροντας ότι οι ασταθείς λύσεις είναι συχνά εύκολα επεκτάσιμες σε ευσταθείς διατάξεις, διατηρώντας παράλληλα και τις «καλές» τους ιδιότητες από τη θεωρία βαθμίδας. Η θεωρία διαταραχών για τις χορδές και τις μεμβράνες σε χωροχρόνους anti-de Sitter δεν έχει ακόμη αναπτυχθεί ικανοποιητικά (ακόμη και στο αριθμητικό επίπεδο), κυρίως εξαιτίας της εγγενούς δυσκολίας της [161]. Αποτελέσματα για την ευστάθεια των χορδών και των μεμβρανών εντός του χώρου AdS, θα μας επέτρεπαν να εξάγουμε πολύ χρήσιμα συμπεράσματα για την ευστάθεια των διατάξεων των χορδοειδών μεμβρανών που μελετάμε.

Από την άλλη μεριά δεν θα πρέπει να ξεχνάμε ότι οι χορδοειδείς μεμβράνες είναι μεμβράνες και όχι χορδές. Αυτή η ιδιότητα μπορεί πολλές φορές να ενισχύσει την ευστάθεια του προκύπτοντος συστήματος. Παρότι μία απλή χορδοειδής μεμβράνη που έχει τυλιχθεί γύρω από τη δισδιάστατη σφαίρα έχει μηδενική επιφανειακή τάση και αναμένεται επομένως να είναι ευσταθής, μία παρόμοια τυλιγμένη χορδή γύρω από την δισδιάστατη σφαίρα δεν μπορεί να είναι ευσταθής όπως είδαμε πιο πάνω. Με δεδομένο ότι οι χορδοειδείς μεμβράνες φιλοδοξούν να αναπαράγουν τη συμπεριφορά των κλασσικών χορδών του AdS_5, είναι σημαντικό να μπορούμε να διατυπώσουμε συγκεκριμένες προτάσεις σε σχέση με τα πλεονεκτήματα/μειονεκτήματά τους στον τομέα της ευστάθειας. Εργασίες στις διαταραχές των μεμβρανών σε ποικίλα υπόβαθρα μπορούν να βρεθούν στις αναφορές [162].

Το κύριο αποτέλεσμα της παρούσας ενότητας θα είναι ότι οι διαταραχές των χορδοειδών μεμβρανών διέπονται από την εξίσωση Lamé. Ας δούμε σύντομα ποιες είναι οι κυριότερες εφαρμογές των εξισώσεων Lamé, προτού να καταπιαστούμε με τη ανάλυση της ευστάθειας των χορδοειδών μεμβρανών. Η εξίσωση Lamé ανακύπτει όταν διαχωρίζουμε τις μεταβλητές της εξίσωσης Laplace στο σύστημα των ελλειψοειδών συντεταγμένων [163]. Ανήκει στην κλάση των «ημιακριβώς επιλύσιμων» ("quasi-exactly solvable"—QES) συστημάτων [164], που αποκαλούνται έτσι γιατί οι λύσεις τους μπορούν να προσδιοριστούν με αλγεβρικές μεθόδους σε κάποιες περιπτώσεις [165, 166]. Επειδή οι ευστάθειες και αστάθειες των συστημάτων Lamé οργανώνονται σε πολλαπλές ζώνες και χάσματα, το φάσμα των φυσικών τους εφαρμογών είναι ιδιαίτερα ευρύ. Ανάμεσα στις πιο ενδιαφέρουσες εφαρμογές τους είναι: (a) παρέχουν μια εναλλακτική δυνατότητα στο μοντέλο Kronig-Penney για τα ηλεκτρόνια μονοδιάστατων κρυστάλλων [167, 165]· (b) πιθανώς διέπουν την εκρηκτική παραγωγή σωματιδίων (προθέρμανση) λόγω παραμετρικού συντονισμού στο μετα-πληθωριστικό σύμπαν [168]· (c) εμφανίζονται στις διαταραχές των sphalerons για το μοντέλο ϕ^4 και το αβελιανό μοντέλο Higgs στις 1+1 διαστάσεις [169]· (d) είναι στενά συνδεδεμένες με τη φασματική καμπύλη των μονοπόλων BPS της $\mathfrak{su}(2)$ [170]· (e) εμφανίζονται συχνά στην υπερσυμμετρική κβαντομηχανική [171], κλπ. [172, 173]. Η εξίσωση Lamé εμφανίζεται επανειλημμένα σε όλες τις διαταρακτικές μελέτες των χορδών στους χωροχρόνους anti-de Sitter [53, 77, 157]. Όπως θα δούμε παρακάτω, οι διαταραχές των χορδοειδών μεμβρανών οδηγούν σε πολύ πλουσιότερη δομή Lamé ζωνών/χασμάτων.

Θα εργαστούμε κατά κύριο λόγο στο σύστημα συντεταγμένων εμβάπτισης του $\mathrm{AdS}_{p+2}\times\mathrm{S}^q$ για το οποίο,

$$ds^2=\eta_{\mu\nu}dY^\mu dY^\nu+\delta_{ij}dX^i dX^j=-dY_0^2+\sum_{i=1}^{p+1}dY_i^2-dY_{p+2}^2+\sum_{i=1}^{q+1}dX_i^2 \tag{14.1}$$

$$-\eta_{\mu\nu}Y^\mu Y^\nu=Y_0^2-\sum_{i=1}^{p+1}Y_i^2+Y_{p+2}^2=\ell^2 \quad , \quad \delta_{ij}X^iX^j=\sum_{i=1}^{q+1}X_i^2=R^2, \tag{14.2}$$

όπου $\eta_{\mu\nu}=(-,+,+,\ldots,+,-)$, $\delta_{ij}=(+,+,\ldots,+)$, $\mu,\nu=0,1,\ldots,p+2$ και $i,j=1,2,\ldots,q+1$. Οι σύνδεσμοι (14.2) λαμβάνονται υπόψη με τη βοήθεια δύο πολλαπλασιαστών Lagrange, των Λ, $\widetilde{\Lambda}$ στη δράση Polyakov για τη μεμβράνη (10.13), της οποίας η βαθμίδα έχει καθοριστεί σύμφωνα με την (10.12) (όπου $\nu=2$):

$$S_P=\frac{T_2}{2}\int d^3\sigma\Bigg[\dot{Y}^\mu\dot{Y}_\mu+\dot{X}^i\dot{X}^i-\frac{1}{2}\{Y^\mu,Y^\nu\}\{Y_\mu,Y_\nu\}-\frac{1}{2}\{X^i,X^j\}\{X^i,X^j\}-$$
$$-\{Y^\mu,X^i\}\{Y_\mu,X^i\}+\Lambda\left(Y^\mu Y_\mu+\ell^2\right)+\widetilde{\Lambda}\left(X^iX^i-R^2\right)\Bigg]. \tag{14.3}$$

Αν παραλλάξουμε τη δράση (14.3), λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης:

$$\ddot{Y}^\mu=\left\{\{Y^\mu,Y^\nu\},Y_\nu\right\}+\left\{\{Y^\mu,X^i\},X^i\right\}+\Lambda\,Y^\mu \tag{14.4}$$

$$\ddot{X}^i = \left\{\left\{X^i, X^j\right\}, X^j\right\} + \left\{\left\{X^i, Y^\mu\right\}, Y_\mu\right\} + \widetilde{\Lambda}\, X^i. \tag{14.5}$$

Οι σύνδεσμοι Lagrange είναι:

$$Y^\mu Y_\mu = -\ell^2, \qquad X^i X^i = R^2, \tag{14.6}$$

ενώ οι δύο σύνδεσμοι που προκύπτουν από τον καθορισμό της βαθμίδας (10.12) δίδονται από:

$$\dot{Y}^\mu \partial_\sigma Y_\mu + \dot{X}^i \partial_\sigma X^i = \dot{Y}^\mu \partial_\delta Y_\mu + \dot{X}^i \partial_\delta X^i = 0 \tag{14.7}$$

$$\dot{Y}^\mu \dot{Y}_\mu + \dot{X}^i \dot{X}^i + \frac{1}{2}\{Y^\mu, Y^\nu\}\{Y_\mu, Y_\nu\} + \frac{1}{2}\{X^i, X^j\}\{X^i, X^j\} + \{Y^\mu, X^i\}\{Y_\mu, X^i\} = 0. \tag{14.8}$$

Λόγω του συνδέσμου (14.8), η Χαμιλτονιανή της μεμβράνης είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν:

$$H = \frac{T_2}{2}\int d^2\sigma \Bigg[\dot{Y}^\mu \dot{Y}_\mu + \dot{X}^i \dot{X}^i + \frac{1}{2}\{Y^\mu, Y^\nu\}\{Y_\mu, Y_\nu\} + \frac{1}{2}\{X^i, X^j\}\{X^i, X^j\} +$$
$$+ \{Y^\mu, X^i\}\{Y_\mu, X^i\} - \Lambda\left(Y^\mu Y_\mu + \ell^2\right) - \widetilde{\Lambda}\left(X^i X^i - R^2\right)\Bigg] = 0. \tag{14.9}$$

Ας θεωρήσουμε τις ακόλουθες διαταραχές:[55]

$$Y^\mu = Y_0^\mu + \delta Y^\mu \quad , \quad X^i = X_0^i + \delta X^i \quad , \quad \Lambda = \Lambda_0 + \delta\Lambda \quad , \quad \widetilde{\Lambda} = \widetilde{\Lambda}_0 + \delta\widetilde{\Lambda}, \tag{14.10}$$

όπου $\left\{Y_0, X_0, \Lambda_0, \widetilde{\Lambda}_0\right\}$ είναι λύση των εξισώσεων κίνησης (14.4)–(14.5) και των συνδέσμων (14.6)–(14.8). Η δράση για τις διαταραχές δίδεται από:

$$\delta S_P = \frac{T_2}{2}\int d^3\sigma \Bigg[\delta\dot{Y}^\mu\, \delta\dot{Y}_\mu + \delta\dot{X}^i\, \delta\dot{X}^i - \{Y_0^\mu, Y_0^\nu\}\{\delta Y_\mu, \delta Y_\nu\} - \{\delta Y^\mu, Y_0^\nu\}\{\delta Y_\mu, Y_{0\,\nu}\} -$$
$$- \{\delta Y^\mu, Y_0^\nu\}\{Y_{0\,\mu}, \delta Y_\nu\} - \{X_0^i, X_0^j\}\{\delta X^i, \delta X^j\} - \{\delta X^i, X_0^j\}\{\delta X^i, X_0^j\} -$$
$$- \{\delta X^i, X_0^j\}\{X_0^i, \delta X^j\} - 2\{Y_0^\mu, X_0^i\}\{\delta Y_\mu, \delta X^i\} - \{\delta Y^\mu, X_0^i\}\{\delta Y_\mu, X_0^i\} -$$
$$- 2\{\delta Y^\mu, X_0^i\}\{Y_{0\,\mu}, \delta X^i\} - \{Y_0^\mu, \delta X^i\}\{Y_{0\,\mu}, \delta X^i\} + 2\, Y_0^\mu\, \delta Y_\mu\, \delta\Lambda +$$
$$+ 2\, X_0^i\, \delta X^i\, \delta\widetilde{\Lambda}\Bigg]. \tag{14.11}$$

Σε χαμηλότερη τάξη, οι διαταραχές υπακούν τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\delta\ddot{Y}^\mu = \{\{Y_0^\mu, Y_0^\nu\}, \delta Y_\nu\} + \{\{\delta Y^\mu, Y_0^\nu\}, Y_{0\,\nu}\} + \{\{Y_0^\mu, \delta Y^\nu\}, Y_{0\,\nu}\} + \left\{\left\{Y_0^\mu, X_0^i\right\}, \delta X^i\right\} +$$

[55] Ο αναγνώστης θα πρέπει να προσέξει τη διάκριση ανάμεσα στη συντεταγμένη του κοσμικού όγκου $\delta \equiv \sigma_2$ και των δ που εμφανίζονται στα δS_P, δX, δY, $\delta\Lambda$, $\delta\widetilde{\Lambda}$ και συμβολίζουν τις διαταραχές των S_P, X, Y, Λ και $\widetilde{\Lambda}$ αντίστοιχα.

$$+\left\{\left\{\delta Y^\mu, X_0^i\right\}, X_0^i\right\}+\left\{\left\{Y_0^\mu, \delta X^i\right\}, X^i\right\}+\Lambda_0 \delta Y^\mu+Y_0^\mu\, \delta\Lambda \tag{14.12}$$

$$\delta\ddot{X}^i = \left\{\left\{X_0^i, X_0^j\right\}, \delta X_j\right\}+\left\{\left\{\delta X^i, X_0^j\right\}, X_0^j\right\}+\left\{\left\{X_0^i, \delta X^j\right\}, X_0^j\right\}+\left\{\left\{X_0^i, Y_0^\mu\right\}, \delta Y_\mu\right\}+$$

$$+\left\{\left\{\delta X^i, Y_0^\mu\right\}, Y_{0\,\mu}\right\}+\left\{\left\{X_0^i, \delta Y^\mu\right\}, Y_{0\,\mu}\right\}+\widetilde{\Lambda}_0 \delta X^i+X_0^i\, \delta\widetilde{\Lambda} \tag{14.13}$$

και συνδέσμους:

$$Y_0^\mu\, \delta Y_\mu = X_0^i\, \delta X^i = 0 \quad , \quad \dot{Y}_0^\mu\, \partial_\sigma \delta Y_\mu + \delta\dot{Y}^\mu\, \partial_\sigma Y_{0\,\mu} + \dot{X}_0^i\, \partial_\sigma \delta X^i + \delta\dot{X}^i\, \partial_\sigma X_0^i = 0$$

$$\dot{Y}_0^\mu\, \partial_\delta \delta Y_\mu + \delta\dot{Y}^\mu\, \partial_\delta Y_{0\,\mu} + \dot{X}_0^i\, \partial_\delta \delta X^i + \delta\dot{X}^i\, \partial_\delta X_0^i = 0 \tag{14.14}$$

$$\dot{Y}_0^\mu\, \delta\dot{Y}_\mu + \dot{X}_0^i\, \delta\dot{X}^i + \{Y_0^\mu, Y_0^\nu\}\{\delta Y_\mu, Y_{0\,\nu}\} + \{X_0^i, X_0^j\}\{\delta X^i, X_0^j\} + \{Y_0^\mu, X_0^i\}\{\delta Y_\mu, X_0^i\}+$$

$$+\{Y_0^\mu, X_0^i\}\{Y_{0\,\mu}, \delta X^i\} = 0. \tag{14.15}$$

Οι χορδοειδείς μεμβράνες του $\mathrm{AdS}_{p+2} \times \mathrm{S}^q$ έχουν:

$$Y_0^\mu = Y_0^\mu\,(\tau, \sigma) \tag{14.16}$$

$$X_0^i = (\cos\delta\,,\, \sin\delta\,,\, 0\,,\, \ldots\,,\, 0) \;\longrightarrow\; X_0^i X_0^i = 1 \tag{14.17}$$

$$X_0^{i\,\prime} = (-\sin\delta\,,\, \cos\delta\,,\, 0\,,\, \ldots\,,\, 0) \;\longrightarrow\; X_0^{i\,\prime} X_0^{i\,\prime} = 1 \tag{14.18}$$

$$X_0^{i\,\prime\prime} = -\,(\cos\delta\,,\, \sin\delta\,,\, 0\,,\, \ldots\,,\, 0) = -X_0^i \;\longrightarrow\; X^{i\,\prime\prime} X^{i\,\prime\prime} = 1. \tag{14.19}$$

Εισάγοντας τις (14.16)–(14.19) στις εξισώσεις κίνησης και τους συνδέσμους των λύσεων (14.4)–(14.8) όπως επίσης και τις εξισώσεις κίνησης και συνδέσμους των διαταραχών (14.12)–(14.15), λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων (θέτοντας $R = 1$):

$$\ddot{Y}_0^\mu = Y_0^{\mu\,\prime\prime} + \Lambda_0\, Y_0^\mu \quad , \quad Y_0^{\mu\,\prime} Y_{0\,\mu}^{\prime} = -\dot{Y}_0^\mu \dot{Y}_{0\,\mu} = \widetilde{\Lambda}_0 = -\ell^2/2\,\Lambda_0 \tag{14.20}$$

$$Y_0^\mu Y_{0\,\mu} = -\ell^2 \quad , \quad \dot{Y}_0^\mu Y_{0\,\mu}^{\prime} = 0, \tag{14.21}$$

τις εξισώσεις διαταραχών,

$$\delta\ddot{Y}^\mu = \partial_\sigma^2 \delta Y^\mu + \widetilde{\Lambda}_0\, \partial_\delta^2 \delta Y^\mu - \left(X_0^{i\,\prime\prime}\, \partial_\sigma \delta X^i - X_0^{i\,\prime}\, \partial_{\sigma,\delta}^2 \delta X^i + Y_0^{\nu\,\prime}\, \partial_\delta^2 \delta Y_\nu\right) Y_0^{\mu\,\prime}+$$

$$+2\left(X_0^{i\,\prime}\, \partial_\delta \delta X^i\right) Y_0^{\mu\,\prime\prime} + \Lambda_0\, \delta Y^\mu + Y_0^\mu\, \delta\Lambda \tag{14.22}$$

$$\delta\ddot{X}^i = \partial_\sigma^2 \delta X^i + \widetilde{\Lambda}_0\, \partial_\delta^2 \delta X^i - \left(X_0^{j\,\prime}\, \partial_\sigma^2 \delta X^j + Y_0^{\mu\,\prime\prime}\, \partial_\delta \delta Y_\mu - Y_0^{\mu\,\prime}\, \partial_{\sigma,\delta}^2 \delta Y_\mu\right) X_0^{i\,\prime}+$$

$$+2\left(Y_0^{\mu\prime}\,\partial_\sigma\delta Y_\mu\right)X_0^{i\,\prime\prime}+\widetilde{\Lambda}_0\,\delta X^i+X_0^i\,\delta\widetilde{\Lambda} \tag{14.23}$$

και τους συνδέσμους:

$$Y_0^\mu\,\delta Y_\mu=X_0^i\,\delta X^i=0\ ,\ \dot{Y}_0^\mu\,\partial_\sigma\delta Y_\mu+\delta\dot{Y}^\mu\,Y'_{0\,\mu}=\dot{Y}_0^\mu\,\partial_\delta\delta Y_\mu+\delta\dot{X}^i\,X_0^{i\,\prime}=0 \tag{14.24}$$

$$\dot{Y}_0^\mu\,\delta\dot{Y}_\mu+Y_0^{\mu\prime}\,\partial_\sigma\delta Y_\mu+\widetilde{\Lambda}_0\,\left(X_0^{i\,\prime}\,\partial_\delta\delta X^i\right)=0. \tag{14.25}$$

Έχει ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι, παρά το γεγονός ότι οι εξισώσεις κίνησης (14.20)–(14.21) δεν εξαρτώνται ρητά από τη συντεταγμένη του κοσμικού όγκου $\delta=\sigma_2$ (είναι εξισώσεις χορδών), οι εξισώσεις των διαταραχών (14.22)–(14.25) εξαρτώνται ρητά από τη συντεταγμένη του κοσμικού όγκου δ μέσω των συντεταγμένων $X^i\left(\delta\right)$ της S^4 και των παραγώγων τους. Με δεδομένο ότι δεν υπάρχει μετασχηματισμός συντεταγμένων που να εξαλείφει τη δ εξάρτηση από τις εξισώσεις των διαταραχών (14.22)–(14.25), συμπεραίνουμε ότι οι χορδοειδείς μεμβράνες είναι ισοδύναμες με χορδές μόνο στην κατώτερη τάξη.

Σε ό,τι ακολουθεί, μόνο οι διαταραχές κατά μήκος των διευθύνσεων που είναι κάθετες στη μεμβράνη θα μελετηθούν, ήτοι οι διαταραχές για τις οποίες $Y_0^\mu=X_0^i=0$. Αυτές οι διαταραχές είναι ευκολότερο να μελετηθούν καθώς αποσυζευγνύονται από εκείνες που γίνονται παράλληλα προς τη χορδοειδή μεμβράνη, όπως φαίνεται από τις σχέσεις (14.22)–(14.25). Οι διαταρακτικές εξισώσεις γίνονται:

$$\delta\ddot{Y}^\mu=\partial_\sigma^2\delta Y^\mu+\widetilde{\Lambda}_0\,\partial_\delta^2\delta Y^\mu+\Lambda_0\,\delta Y^\mu \tag{14.26}$$

$$\delta\ddot{X}^i=\partial_\sigma^2\delta X^i+\widetilde{\Lambda}_0\,\partial_\delta^2\delta X^i+\widetilde{\Lambda}_0\,\delta X^i. \tag{14.27}$$

14.1 Περιστρεφόμενες Χορδοειδείς Μεμβράνες

Για να μελετήσουμε τις εγκάρσιες διαταραχές των περιστρεφόμενων χορδοειδών μεμβρανών, θέτουμε:

$$\delta Y^\mu=\sum_{r,m}e^{ir\tau+im\delta}\,\widetilde{y}^\mu_{r,m}\left(\sigma\right)\ ,\qquad \delta X^i=\sum_{r,m}e^{ir\tau+im\delta}\,\widetilde{x}^i_{r,m}\left(\sigma\right)\ ,\qquad m\in\mathbb{Z}. \tag{14.28}$$

Αν εισάγουμε την (14.28) στην (14.26)–(14.27), οι αντίστοιχες εξισώσεις κατά μήκος των κάθετων διευθύνσεων $Y_0^\mu=X_0^i=0$, λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή (για απλότητα, παραλείπουμε τις εξαρτήσεις των $\widetilde{y}^\mu_{r,m}\left(\sigma\right)$ και $\widetilde{x}^i_{r,m}\left(\sigma\right)$ από τα r, m και σ):

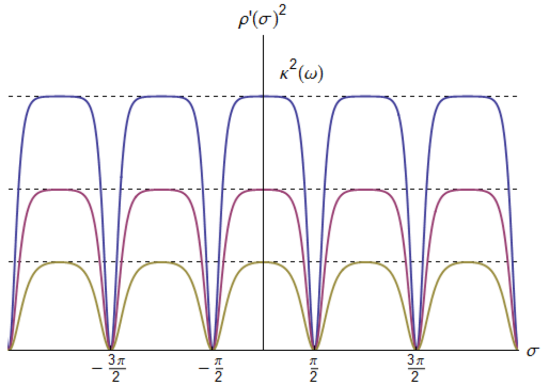
$$\left(\widetilde{y}^\mu\right)''+\left(r^2-m^2\widetilde{\Lambda}_0+\Lambda_0\right)\widetilde{y}^\mu=0 \tag{14.29}$$

$$\left(\widetilde{x}^i\right)''+\left(r^2-m^2\widetilde{\Lambda}_0+\widetilde{\Lambda}_0\right)\widetilde{x}^i=0. \tag{14.30}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τις χορδοειδείς μεμβράνες (13.1) του $\mathrm{AdS}_7\times\mathrm{S}^4$ για τις οποίες $(\ell=2)$,[56]

$$Y_0^\mu=2\left(\cosh\rho\left(\sigma\right)\cos\kappa\tau\,,\,\sinh\rho\left(\sigma\right)\cos\kappa\omega\tau\,,\,\sinh\rho\left(\sigma\right)\sin\kappa\omega\tau\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,0\,,\,\cosh\rho\left(\sigma\right)\sin\kappa\tau\right). \tag{14.31}$$

[56] Είναι σχετικά απλό να επεκτείνουμε τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας στις χορδοειδείς μεμβράνες του $\mathrm{AdS}_4\times\mathrm{S}^7/\mathbb{Z}^k$. Βλέπε τον πίνακα 2.



Σχήμα 23: Διάγραμμα του δυναμικού Lamé (14.33) για τη χορδοειδή μεμβράνη (13.1)–(14.31).

Οι πολλαπλασιαστές Lagrange Λ_0 και $\widetilde{\Lambda}_0$, για τη χορδοειδή μεμβράνη (14.31) δίδονται από:

$$\Lambda_0 = -2\rho'^2 \quad \& \quad \widetilde{\Lambda}_0 = 4\rho'^2, \tag{14.32}$$

όπου $\rho'(\sigma)^2$ είναι μια σ-περιοδική, άρτια συνάρτηση[57] (διαγράμματα αυτής για διάφορες τιμές του ω μπορούν να βρεθούν στο σχήμα 23) που δίδεται από:

$$\rho'^2 = \kappa^2 \left(\cosh^2\rho - \omega^2 \sinh^2\rho\right) = \kappa^2 \cdot sn^2 \left[\kappa\omega\left(\sigma + \frac{\pi}{2}\right)\Big|\frac{1}{\omega^2}\right] \tag{14.33}$$

$$\omega \cdot \kappa(\omega) = \frac{2}{\pi} \cdot \mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \quad , \quad \omega^2 > 1.$$

Οι διαταρακτικές εξισώσεις (14.29)–(14.30) κατά μήκος των κάθετων διευθύνσεων $Y^\mu = X^i = 0$, μπορεί να δειχθεί ότι υπακούν την Ιακωβιανή (Jacobi) μορφή της εξίσωση Lamé,

$$\frac{d^2z}{du^2} + \left[h - \nu(\nu+1)\, k^2 sn^2\left(u|k^2\right)\right] z = 0, \tag{14.34}$$

με δεδομένο ότι θέτουμε:

$$z = \widetilde{y}^\mu(\sigma)\ ,\ u = \kappa\omega\left(\sigma + \frac{\pi}{2}\right)\ ,\ h = \left(\frac{r}{\kappa\omega}\right)^2\ ,\ \nu(\nu+1) = 2\left(2\,m^2+1\right)\ ,\ k = \frac{1}{\omega}$$

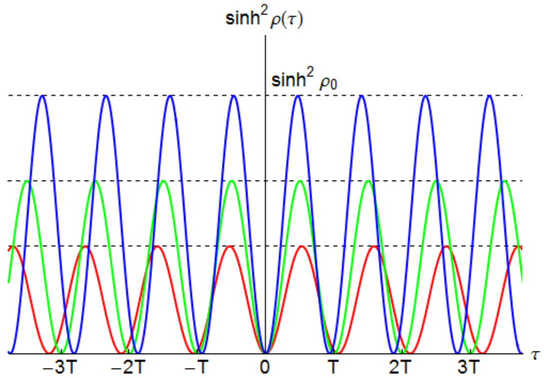
$$z = \widetilde{x}^i(\sigma)\ ,\ u = \kappa\omega\left(\sigma + \frac{\pi}{2}\right)\ ,\ h = \left(\frac{r}{\kappa\omega}\right)^2\ ,\ \nu(\nu+1) = 4\left(m^2-1\right)\ ,\ k = \frac{1}{\omega}.$$

14.2 Παλλόμενες Χορδοειδείς Μεμβράνες

Για να μελετήσουμε τις εγκάρσιες διαταραχές των παλλόμενων χορδοειδών μεμβρανών, θέτουμε:

$$\delta Y^\mu = \sum_{m,n} e^{in\sigma + im\delta}\, \widetilde{y}^\mu_{m,n}(\tau)\ , \qquad \delta X^i = \sum_{m,n} e^{in\sigma+im\delta}\, \widetilde{x}^i_{m,n}(\tau)\ , \qquad m \in \mathbb{Z}, \tag{14.35}$$

[57] Ας σημειωθεί ότι για μεγάλα ω, μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση $\rho'^2 = \kappa^2 \cdot cd^2\left[\kappa\omega\sigma\middle|1/\omega^2\right] \sim \kappa^2\cos^2\sigma$.



Σχήμα 24: Διάγραμμα του δυναμικού Lamé (14.39) της χορδοειδούς μεμβράνης (13.10)–(14.38).

οπότε οι εξισώσεις για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις (14.26)–(14.27), λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή (όπου έχουμε ξανά παραλείψει τις εξαρτήσεις των $\widetilde{y}^{\mu}_{n,m}(\tau)$ και $\widetilde{x}^{i}_{n,m}(\tau)$ από τα n, m και τ):

$$\ddot{\widetilde{y}}^{\mu} + \left(n^2 + m^2\widetilde{\Lambda}_0 - \Lambda_0\right)\widetilde{y}^{\mu} = 0 \tag{14.36}$$

$$\ddot{\widetilde{x}}^{i} + \left(n^2 + m^2\widetilde{\Lambda}_0 - \widetilde{\Lambda}_0\right)\widetilde{x}^{i} = 0. \tag{14.37}$$

Ας θεωρήσουμε την παλλόμενη διάταξη (13.10) του $\text{AdS}_7 \times \text{S}^4$ ($\ell = 2$):

$$Y_0^{\mu} = 2\left(\cosh\rho(\tau)\cos t\,(\tau)\;,\,0\,,\,0\,,\,\sinh\rho(\tau)\cos\sigma\,,\,0\,,\,\sinh\rho(\tau)\sin\sigma\,,\,0\,,\,\cosh\rho(\tau)\sin t\,(\tau)\right). \tag{14.38}$$

Αν επιλύσουμε τις εξισώσεις κίνησης (14.20)–(14.21), λαμβάνουμε το ακόλουθο δυναμικό Lamé:

$$\sinh^2\rho\,(\tau) = \sinh^2\rho_0\cdot sn^2\left[\tau\cdot\cosh\rho_0\,\middle|\,-\tanh^2\rho_0\right], \tag{14.39}$$

όπου το ρ_0 μπορεί να βρεθεί από τη σχέση $4e^2 = \sinh^2 2\rho_0$ και το e έχει ορισθεί στη σχέση (4.86). Το δυναμικό Lamé (14.39) έχει σχεδιαστεί για διάφορες τιμές του ρ_0 στο σχήμα 24. Οι πολλαπλασιαστές Lagrange Λ_0 και $\widetilde{\Lambda}_0$ βρίσκονται να είναι:

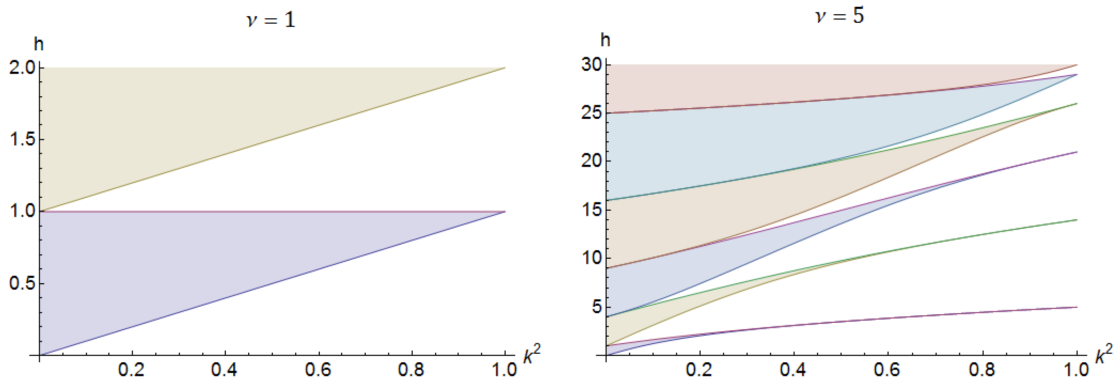
$$\Lambda_0 = -2\sinh^2\rho \quad \& \quad \widetilde{\Lambda}_0 = 4\sinh^2\rho. \tag{14.40}$$

Οι διαταραχές κατά μήκος των κάθετων διευθύνσεων $Y^{\mu} = X^{i} = 0$ (14.36)–(14.37), υπακούν ξανά την εξίσωση Lamé (14.34). Για να μετατρέψουμε την τελευταία στη μορφή Jacobi, γράφουμε το δυναμικό (14.39) ως εξής:

$$\sinh^2\rho\,(\tau) = \sinh^2\rho_0\cdot\left(1 - sn^2\left[\tau\cdot\sqrt{\cosh 2\rho_0} + \mathbb{K}\left(\frac{\sinh^2\rho_0}{\cosh 2\rho_0}\right)\,\middle|\,\frac{\sinh^2\rho_0}{\cosh 2\rho_0}\right]\right) \tag{14.41}$$

και αντικαθιστούμε $u = \tau\cdot\sqrt{\cosh 2\rho_0} + \mathbb{K}\left(k^2\right)$ και

$$z = \widetilde{y}^{\mu}(\tau)\;,\;h = \frac{n^2}{\cosh 2\rho_0} + 2k^2\left(2\,m^2 + 1\right)\;,\;\nu\,(\nu + 1) = 4m^2 + 2\;,\;k = \frac{\sinh\rho_0}{\sqrt{\cosh 2\rho_0}}$$



Σχήμα 25: Ζώνες ευστάθειας (έγχρωμες) της εξίσωσης Lamé (14.34), για $\nu = 1$ (αριστερά) και $\nu = 5$ (δεξιά).

$$z = \widetilde{x}^i(\tau)\ ,\ h = \frac{n^2}{\cosh 2\rho_0} + 4k^2\left(m^2 - 1\right)\ ,\ \nu\left(\nu + 1\right) = 4m^2 - 4\ ,\ k = \frac{\sinh \rho_0}{\sqrt{\cosh 2\rho_0}},$$

στην εξίσωση (14.34).

Βρήκαμε λοιπόν ότι οι εγκάρσιες διαταραχές ($Y_0^\mu = X_0^i = 0$) των χορδοειδών μεμβρανών εντός του $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ (13.1)–(13.10) διέπονται από την εξίσωση Lamé:

$$\frac{d^2 z}{du^2} + \left[h - \nu\left(\nu + 1\right)k^2 sn^2\left(u|k^2\right)\right] z = 0. \tag{14.42}$$

Όπως εξηγείται στο παράρτημα Η′, όταν $\nu\left(\nu + 1\right) \in \mathbb{R}$ και $0 < k < 1$, η εξίσωση Lamé (14.42) διαθέτει πάντα μια απειρία από πραγματικές ιδιοτιμές $a_\nu^s\left(k^2\right)$ και $b_\nu^s\left(k^2\right)$ που αντιστοιχούν στις περιοδικές ιδιοσυναρτήσεις της εξίσωσης.[58] Οι ιδιοτιμές της εξίσωσης Lamé μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις ομάδες, ανάλογα με την ομοτιμία (άρτια ή περιττή) και την περίοδο (ίση προς $2\mathbb{K}$ ή $4\mathbb{K}$) των αντίστοιχων ιδιοσυναρτήσεων. Για μια γενική ιδιοτιμή της εξίσωσης Lamé h (που δεν αντιστοιχεί απαραίτητα σε περιοδική ιδιοσυνάρτηση), η εξίσωση Lamé (14.42) είναι ευσταθής αν και μόνο αν όλες οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $z\left(u, h\right)$ είναι φραγμένες. Ειδάλλως η εξίσωση είναι ασταθής. Τα διαστήματα ευστάθειας καθορίζονται από τις ιδιοτιμές των περιοδικών λύσεων της εξίσωσης, οι οποίες έχουν την εξής διάταξη:

$$(a_\nu^0\,,\, \underbracket{a_\nu^1)\ \cup\ (b_\nu^1}\,,\, \underbracket{b_\nu^2)\ \cup\ (a_\nu^2}\,,\, \underbracket{a_\nu^3)\ \cup\ (b_\nu^3}\,,\, \underbracket{b_\nu^4)\ \cup\ \ldots} \tag{14.43}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης Lamé είναι ευσταθείς εντός των παραπάνω διαστημάτων και ασταθείς έξω από αυτά. Οι συστολές μεταξύ των ιδιοτιμών υποδηλώνουν ότι η σχετική σειρά δύο διαδοχικών ιδιοτιμών δεν είναι γενικά γνωστή και μπορεί κάλλιστα να είναι η αντίθετη για διαφορετικές τιμές των $\nu \in \mathbb{R}$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ και $k \in (0, 1)$. Οι ιδιοτιμές Lamé έχουν μία ακόμη ενδιαφέρουσα ιδιότητα που είναι γνωστή ως «συνύπαρξη» ("coexistence"). Η ιδιότητα της συνύπαρξης συνεπάγεται ότι $\nu \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν η εξίσωση Lamé έχει ακριβώς $\nu + 1$ διαστήματα ευστάθειας (ζώνες) ανάμεσα σε ακριβώς $\nu + 1$ διαστήματα αστάθειας (χάσματα). Διαγράμματα των ζωνών (έγχρωμες) και χασμάτων (λευκά) της εξίσωσης Lamé για $\nu = 1$ και $\nu = 5$, μπορούν να βρεθούν στο σχήμα 25.

Συνοψίζοντας, η ευστάθεια των λύσεων της εξίσωσης Lamé οργανώνεται σε (ευσταθείς) ζώνες και (ασταθή) χάσματα. Οι παράμετροι της εξίσωσης Lamé (14.42), για το καθένα από τα ansätze (14.31)–(14.38) των χορδοειδών μεμβρανών, δίδονται στον πίνακα 2 (για τους ορισμούς των m, r και n, βλέπε

[58] Ας σημειωθεί επίσης ότι η εξίσωση Lamé (14.42) είναι συμμετρική κάτω από τους μετασχηματισμούς $\nu \leftrightarrow -\nu - 1$, που σημαίνει ότι επαρκεί η μελέτη του διαστήματος $\nu > -1/2$ και $\nu(\nu + 1) > -1/4$.

Ansatz	u	k	h	z	$\nu(\nu+1)$
(13.1) $AdS_7 \times S^4$	$\kappa\omega\left(\sigma+\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{1}{\omega}$	$\left(\frac{r}{\kappa\omega}\right)^2$	$\widetilde{y}$ $\widetilde{x}$	$4\,m^2+2$ $4\left(m^2-1\right)$
(13.1) $AdS_4 \times S^7$	$\kappa\omega\left(\sigma+\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{1}{\omega}$	$\left(\frac{r}{\kappa\omega}\right)^2$	$\widetilde{y}$ $\widetilde{x}$	$m^2/4+2$ $\frac{1}{4}\left(m^2-1\right)$
(13.10) $AdS_7 \times S^4$	$\tau\cdot\sqrt{\cosh 2\rho_0}+\mathbb{K}\left(k^2\right)$	$\frac{\sinh\rho_0}{\sqrt{\cosh 2\rho_0}}$	$\frac{n^2}{\cosh 2\rho_0}+k^2\left(4\,m^2+2\right)$ $\frac{n^2}{\cosh 2\rho_0}+4k^2\left(m^2-1\right)$	$\widetilde{y}$ $\widetilde{x}$	$4\,m^2+2$ $4\left(m^2-1\right)$
(13.10) $AdS_4 \times S^7$	$\tau\cdot\sqrt{\cosh 2\rho_0}+\mathbb{K}\left(k^2\right)$	$\frac{\sinh\rho_0}{\sqrt{\cosh 2\rho_0}}$	$\frac{n^2}{\cosh 2\rho_0}+k^2\left(m^2/4+2\right)$ $\frac{n^2}{\cosh 2\rho_0}+\frac{k^2}{4}\left(m^2-1\right)$	$\widetilde{y}$ $\widetilde{x}$	$m^2/4+2$ $\frac{1}{4}\left(m^2-1\right)$

Πίνακας 2: Διαταρακτικές παράμετροι της εξίσωσης Lamé (14.42) για τις χορδοειδείς μεμβράνες (13.1)–(13.10) στον $AdS_{7/4} \times S^{4/7}$.

(14.28)–(14.35)). Είναι σχετικά εύκολο να επεκτείνουμε τα αποτελέσματά μας από τον $AdS_7 \times S^4$ στον $AdS_4 \times S^7$ (όπου $\mathfrak{k} = \ell/R = 1/2$ και $\Lambda_0 = -8\widetilde{\Lambda}_0$). Ο πίνακας 2 περιλαμβάνει και τις δύο περιπτώσεις. Τα δεδομένα για τις διαταραχές στον $AdS_{7/4}$, $\widetilde{y} \equiv \{\widetilde{y}^{\mu}_{r,m}(\sigma)\;,\;\widetilde{y}^{\mu}_{m,n}(\tau)\}$ καταλαμβάνουν την πρώτη σειρά της κάθε καταχώρησης, ενώ η δεύτερη σειρά περιέχει δεδομένα για τις διαταραχές επί της $S^{4/7}$, $\widetilde{x} \equiv \left\{\widetilde{x}^{i}_{r,m}(\sigma)\;,\;\widetilde{x}^{i}_{m,n}(\tau)\right\}$. Για δεδομένα ω, ρ_0 και $m \in \mathbb{Z}$ ($\kappa = \kappa(\omega) = 2/\pi\omega \cdot \mathbb{K}\left(1/\omega^2\right)$), οι επιτρεπόμενες τιμές των r, $n \in \mathbb{R}$ καθορίζονται από την επικάλυψη των ζωνών $\widetilde{y}$ και $\widetilde{x}$, το κατώτερο άκρο των οποίων ικανοποιεί:

$$h_{\min} \geq 0, \text{ στο ansatz (13.1) } \& \; h_{\min} \geq \left(4\,m^2+2\right)\frac{\sinh^2\rho_0}{\cosh 2\rho_0}, \text{ στο ansatz (13.10) } (AdS_7 \times S^4)$$

$$h_{\min} \geq \left(m^2/4+2\right)\frac{\sinh^2\rho_0}{\cosh 2\rho_0}, \text{ στο ansatz (13.10) } (AdS_4 \times S^7). \quad (14.44)$$

15 Περίληψη Μέρους IV

Το τελικό μέρος IV αυτής της διατριβής (§11–§14) αφιερώθηκε στη μελέτη των μεμβρανών στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT. Μετά από μερικά βασικά στοιχεία p-βρανών και M-θεωρίας, εισάγαμε την έννοια της «χορδοειδούς μεμβράνης» και μελετήσαμε μερικές απλές διατάξεις χορδοειδών μεμβρανών στον $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ και τον $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$. Προκειμένου να μάθουμε για τις χορδοειδείς ιδιότητες των κλασσικών αφόρτιστων μποζονικών μεμβρανών στους χωροχρόνους $\mathrm{AdS}_m \times \mathrm{S}^n$, θέσαμε την ερώτηση ποια είναι τα βασικά χαρακτηριστικά που που μας επιτρέπουν να εμβαπτίσουμε το σίγμα μοντέλο των χορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ στο σίγμα μοντέλο των μεμβρανών στον $\mathrm{AdS}_{4/7} \times \mathrm{S}^{7/4}$. Βρήκαμε ότι όλες οι διατάξεις χορδών εντός του AdS_5 (το μη συμπαγές μέρος του $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$) μπορεί να αναπαραχθεί από μεμβράνες που ζουν εντός του $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$. Επιπλέον, η συμπεριφορά κάθε διάταξης χορδών που ζει εντός του $\mathrm{AdS}_4 \subset \mathrm{AdS}_5$ μπορεί να αναπαραχθεί από μια μεμβράνη του $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$.

Η κατασκευή των χορδοειδών μεμβρανών στον $\mathrm{AdS}_m \times \mathrm{S}^n$ είναι εξαιρετικά απλή. Δύο είναι τα βασικά χαρακτηριστικά που απαιτούνται προκειμένου να ορίσουμε τις χορδοειδείς μεμβράνες: ένα συμπαγές και ένα μη συμπαγές μέρος στο υπόβαθρο. Οι δύο συντεταγμένες του κοσμικού όγκου της χορδοειδούς μεμβράνης μοιράζονται μεταξύ των δύο συνιστωσών πολλαπλοτήτων, έτσι ώστε η διάταξη να είναι ουσιαστικά μονοδιάστατη σε καθέναν από τους δύο χώρους. Παρότι η δράση Polyakov για τις μποζονικές μεμβράνες (12.3) (σε δεδομένη βαθμίδα) έχει εντελώς διαφορετική δομή από την αντίστοιχη δράση των χορδών (3.3), αποδείξαμε ότι η πρώτη μπορεί να αναχθεί στη δεύτερη όταν οι συντεταγμένες της μεμβράνης μοιραστούν μεταξύ των δύο χώρων του εξωτερικού γινομένου και η συντεταγμένη του συμπαγούς χώρου παραμείνει στατική. Αυτός ο διαχωρισμός θυμίζει εν πολλοίς εκείνον των Duff, Howe, Inami και Stelle στην εργασία [151], παρότι τα δικά μας κίνητρα είναι κάπως εγγύτερα στις εργασίες [122, 174, 175]. Εκτός του ότι ασχολούμαστε μόνο με μποζονικές μεμβράνες στον $\mathrm{AdS}_m \times \mathrm{S}^n$, σε κανένα απολύτως σημείο δεν κάναμε διπλή διαστατική αναγωγή (DDR) αλά [151]. Στόχος μας ήταν να αναπαράγουμε τη συμπεριφορά της χορδής GKP από την οπτική γωνία της μεμβράνης. Άλλες εργασίες με παρόμοιες θεωρήσεις είναι οι [176].

Η σταθερότητα των χορδοειδών μεμβρανών στη γραμμική προσέγγιση διερευνήθηκε στην §14. Ένα σημαντικό συμπέρασμα που προέκυψε από την ανάλυση της ευστάθειας, ήταν ότι οι ομοιότητες μεταξύ των χορδοειδών μεμβρανών και των χορδών δεν μπορούν να επεκταθούν πέραν της κατώτερης τάξης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι εξισώσεις για τις διαταραχές των χορδοειδών μεμβρανών εξαρτώνται από τη δεύτερη συντεταγμένη του κοσμικού όγκου δ, η οποία και δεν μπορεί να απαλειφθεί. Σε αυτό το πλαίσιο, βρήκαμε επίσης ότι η ευστάθεια των χορδοειδών μεμβρανών κατά μήκος των εγκάρσιων διευθύνσεών τους διέπεται από την εξίσωση Lamé. Κατά συνέπεια, οι χορδοειδείς μεμβράνες εμφανίζουν την τυπική δομή ευστάθειας/αστάθειας με ζώνες και χάσματα, που αποτελεί μια χαρακτηριστική ιδιότητα του φάσματος της εξίσωσης Lamé. Η τυπική δομή της μονής ζώνης/μονού χάσματος των κλασσικών μποζονικών χορδών του AdS_3 [53, 77], ανακτάται από τις χορδοειδείς μεμβράνες ως μια ειδική οριακή περίπτωση (καταχώρηση με $m = 0$ στον πίνακα 2). Η δομή Lamé γεννά κάποια ενδιαφέροντα ζητήματα ερμηνείας τόσο για τις χορδές όσο και για τις μεμβράνες. Το πρώτο αφορά στο κατά πόσο η δομή των ζωνών/χασμάτων της εξίσωσης Lamé για τις χορδές στον AdS δέχεται την ερμηνεία της εκρηκτικής παραγωγής σωματιδίων, κατ'αναλογία με το φαινόμενο του παραμετρικού συντονισμού που συναντάμε στο μετα-πληθωριστικό σύμπαν. Δεύτερον, μπορούμε να ρωτήσουμε ποιο είναι το ολογραφικά δυϊκό φαινόμενο, όπως επίσης και ποια είναι η ερμηνεία της δομής των ζωνών/χασμάτων της εξίσωσης Lamé από την πλευρά της δυϊκής υπερσύμμορφης θεωρίας πεδίου.

Ολοκληρώνουμε το μέρος IV με συζήτηση των αποτελεσμάτων μας για τις χορδοειδείς μεμβράνες, σε σχέση με μερικές ενδιαφέρουσες περαιτέρω προοπτικές επί ποικίλων θεμάτων που προκύπτουν.

- *Διαστάσεις Κλίμακας Χορδοειδών Μεμβρανών.*

Η χορδοειδής μεμβράνη (13.1) ταυτίζεται ουσιαστικά με τη λύση «τύπου I» των Hartnoll και Nuñez εντός του $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7$ [174], εκπεφρασμένη ως προς τη σύμμορφη δράση Polyakov εντός του $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ (βλέπε §13.2–§13.3 για τον $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$). Στην §4 είδαμε ότι η κλειστή διπλωμένη χορδή GKP (I) στον AdS_3 είναι δυϊκή στους τελεστές με συστροφή 2, $\mathrm{Tr}\left[\mathcal{Z}\,\mathcal{D}_+^S\,\mathcal{Z}\right]$ του $\mathfrak{sl}(2)$ τομέα της $\mathcal{N}=4$ SYM. Συνεπώς, σε πλήρη συμφωνία με τους GKP [11] και τους Hartnoll–Nuñez [174], η χορδοειδής μεμβράνη (13.1) αναμένεται να είναι δυϊκή με τους παραπάνω τελεστές συστροφής 2, που δίνονται επίσης μέσω της (4.2). Το κλασσικό μέρος των αντίστοιχων ανώμαλων διαστάσεων κλίμακας θα δίνεται τότε από τη σχέση (4.30) για μικρές τιμές του σπίν S και από τις σχέσεις (5.5)–(5.95) για μεγάλα σπίν S:

$$E^2 = 2\sqrt{\lambda'}\,S + \ldots \quad \left(\text{Μικρές Χορδοειδείς Μεμβράνες, } S \ll \sqrt{\lambda'}\right) \tag{15.1}$$

$$E - S = f\left(\lambda'\right)\ln\frac{S}{\sqrt{\lambda'}} + \ldots \quad \left(\text{Μεγάλες Χορδοειδείς Μεμβράνες, } S \gg \sqrt{\lambda'}\right). \tag{15.2}$$

όπου S είναι το φορτίο της χορδοειδούς μεμβράνης $S_1 = S^{12}$ στην (12.9) και η ενεργή σταθερά σύζευξης λ' ορίζεται ως $\sqrt{\lambda'} \equiv R\,\ell^2/g_s\ell_s^3$.

Η πλήρης κλασσική «μικρή» σειρά (15.1) εξήχθη στην §4.1.1, βλέπε τις εξισώσεις (4.29)–(4.30). Το κλασσικό μέρος της «μεγάλης» σειράς (15.2) διερευνήθηκε στην ενότητα §5.2, όπου δείχθηκε αναλυτικά πως υπολογίζονται οι όροι της σειράς μέσω της συνάρτησης W του Lambert. Στην §4.1.3 αποδείξαμε μια σχέση (η οποία προτάθηκε αρχικά στην εργασία [12]) που συνδέει τις κλασσικές «μικρές» με τις «μεγάλες» διαστάσεις κλίμακας (15.1)–(15.2). Στην §5.3 δείξαμε ότι οι όροι των μεγάλων σειρών (5.5)–(5.95) ικανοποιούν τις σχέσεις Moch-Vermaseren-Vogt (MVV) που προκύπτουν από την ιδιότητα της «αμοιβαιότητας» ("reciprocity") ή την αναλλοιώτητα ομοτιμίας. Η αμοιβαιότητα προτάθηκε αρχικά από τους Gribov και Lipatov [82] στα πλαίσια της βαθιάς ανελαστικής σκέδασης (DIS) και έχει επαληθευθεί για τους τελεστές συστροφής 2 μέχρι τους 3 βρόχους στη διαταρακτική QCD [81] και μέχρι τους τέσσερις βρόχους στην ασθενώς συζευγμένη $\mathcal{N}=4$ SYM [80, 177]. Φυσιολογικά, όλες αυτές οι ιδιότητες αναμένεται να μπορούν να επεκταθούν και στις χορδοειδείς μεμβράνες.

Αντίθετα, αποδεικνύεται ότι οι παραπάνω ιδιότητες δεν μπορούν να επεκταθούν στο κβαντικό επίπεδο. Η "cusp" ανώμαλη διάσταση $f(\lambda)$ δέχεται κβαντικές διορθώσεις τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε στη θεωρία υπερχορδών υπολογίζοντας τις διαταρακτικές ορίζουσες της εξίσωσης Lamé, σύμφωνα με την εργασία [77]. Ωστόσο, το διαταρακτικό σίγμα μοντέλο στον $\mathrm{AdS}_{7/4} \times \mathrm{S}^{4/7}$ είναι πολύ διαφορετικό από το αντίστοιχο μοντέλο των υπερχορδών. Αυτή η εικόνα επιβεβαιώθηκε στην §14 της παρούσας διατριβής, όπου οι εγκάρσιες διαταραχές των χορδοειδών μεμβρανών στον AdS_3 μελετήθηκαν και βρέθηκαν να έχουν μια πολύ πλουσιότερη δομή ζωνών/χασμάτων Lamé, σε σχέση με τις αντίστοιχες χορδές GKP. Συνεπώς αναμένουμε οι κβαντικές διορθώσεις των ανώμαλων διαστάσεων των τελεστών συστροφής 2 που είναι δυϊκοί στις χορδοειδείς μεμβράνες του $\mathrm{AdS}_{7/4} \times \mathrm{S}^{4/7}$, να είναι γενικά διαφορετικές από τις κβαντικές διορθώσεις που λαμβάνουν οι αντίστοιχες χορδές των GKP.

• *Ολοκληρωσιμότητα.*

Το κύριο αποτέλεσμα της §13 ήταν ότι όλες οι κλασσικές χορδές στον AdS_5 μπορούν να αναπαραχθούν από μια χορδοειδή μεμβράνη του $\mathrm{AdS}_7 \times \mathrm{S}^4$ και ότι όλες οι κλασσικές χορδές του AdS_4 μπορούν να αναπαραχθούν από μια χορδοειδή μεμβράνη του $\mathrm{AdS}_4 \times \mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$. Όπως είδαμε στην §3.2 το κλασσικό σίγμα μοντέλο των χορδών στον $\mathrm{AdS}_{2/3/4}$ είναι αντίστοιχα ισοδύναμο με τη Liouville, sinh-Gordon και B_2-Toda εξίσωση. Συνεπώς, οι χορδοειδείς μεμβράνες που αναπαράγουν τις κλασσικές χορδές στον $\mathrm{AdS}_{2/3/4}$ αναμένεται να είναι κλασσικά ισοδύναμες με τα μοντέλα Liouville, sinh-Gordon και B_2-Toda αντίστοιχα.

Η ανάλυσή μας είχε επίσης σημαντικές συνέπειες και για τις δυϊκές θεωρίες βαθμίδας. Το γεγονός ότι δύο ή περισσότερες εντελώς διαφορετικές θεωρίες βαθμίδας περιέχουν διεγέρσεις με παρόμοια φάσματα συνεπάγεται ότι οι δυϊκές τους υπερσύμμορφες θεωρίες πεδίου (όσο διαφορετικές κι αν είναι, π.χ.

μπορεί να έχουν διαφορετικές διαστάσεις) οφείλουν να περιέχουν τομείς με παρόμοια υποκείμενη δομή. Ας πάρουμε για παράδειγμα τη χορδή (Ι) των GKP που περιστρέφεται εντός του AdS_3. Είδαμε στην §5 ότι η χορδή GKP (Ι) είναι δυϊκή στους τελεστές με συστροφή 2, ενώ η ενέργειά της, που είναι ίση με τις διαστάσεις κλίμακας των τελεστών αυτών, είναι ανάλογη του λογαρίθμου του σπίν της χορδής. Το γεγονός ότι μπορεί να βρεθεί μια χορδοειδής μεμβράνη κάποιας θεωρίας στο εσωτερικό (bulk) που είναι δυϊκή σε μια διαφορετική υπερσύμμορφη θεωρία πεδίου από εκείνη της αρχικής χορδής GKP, αλλά αμφότερες έχουν πάραυτα τις ίδιες σχέσεις διασποράς (5.5)–(15.2), σημαίνει ότι οι δύο υπερσύμμορφες θεωρίες πεδίου περιέχουν τους ίδιους τελεστές συστροφής 2, με τα ίδια φάσματα. Εν ολίγοις, δείξαμε ότι οι ακόλουθες δυαδικότητες βαρύτητας/βαθμίδας περιέχουν καταστάσεις/τελεστές με ανώμαλες διαστάσεις που συμπεριφέρονται ως $\Delta - S \sim \ln S$:

Θεωρία Βαθμίδας	δυϊκή Θεωρία Βαρύτητας
$\mathcal{N}=4$ $\mathfrak{su}(N)$ super Y-M θεωρία	IIB θεωρία χορδών στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$
$\mathcal{N}=8$ SCFT $\big/$ $A_{N-1}(2,0)$ SCFT	M-θεωρία στον $\mathrm{AdS}_{4/7}\times\mathrm{S}^{7/4}$
$\mathcal{N}=6$ $U(N)_k\times U(N)_{-k}$ super C-S θεωρία	
$N\to\infty$	M-θεωρία στον $\mathrm{AdS}_4\times\mathrm{S}^7/\mathbb{Z}_k$
$k^5\gg N\to\infty$, $\lambda\equiv 2\pi^2 N/k=$ σταθ.	IIA θεωρία χορδών στον $\mathrm{AdS}_4\times\mathbb{CP}^3$

Η μελέτη των χορδοειδών μεμβρανών φαίνεται να ενισχύει την ακόλουθη υπόθεση που έχει προταθεί από τον Bozhilov στην εργασία [150]. Οι υπερσύμμορφες θεωρίες πεδίου:

(α) $\mathcal{N}=4$ $\mathfrak{su}(N)$ SYM θεωρία (δυϊκή στην IIB θεωρία χορδών στον $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$)

(β) $A_{N-1}(2,0)$ SCFT (δυϊκή στην M-θεωρία στον $\mathrm{AdS}_7\times\mathrm{S}^4$)

(ς) $\mathcal{N}=8$ SCFT (δυϊκή στην M-θεωρία στον $\mathrm{AdS}_4\times\mathrm{S}^7$),

πιθανώς διαθέτουν κοινούς ολοκληρώσιμους τομείς. Οι χορδοειδείς μεμβράνες επιπλέον συνεπάγονται ότι η παραπάνω «οικογένεια» δύναται να περιέχει περισσότερα μέλη (π.χ. την QCD, $\mathcal{N}=6$ quiver super Chern-Simons, $\mathcal{N}=1$ SYM [174, 178], κλπ.). Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα είναι ότι οι $\mathcal{N}=0,1,2,4$ SYM θεωρίες έχουν κοινό καθολικό τελεστή διαστολής στον ένα βρόχο [179]. Ανάλογες θεωρήσεις εξετάζονται αυτή την περίοδο και από ομάδες που αναπτύσσουν τη μέθοδο της κβαντικής φασματικής καμπύλης (QSC), όπου μια «μυστηριώδης σχέση» μεταξύ των ολοκληρώσιμων δομών της ABJM και της $\mathcal{N}=4$ SYM θεωρίας έχει ήδη αναφερθεί [180]. Η Έλλη Πομόνη και η ομάδα της έχει επίσης πολύ ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις προς την ίδια κατεύθυνση [181].

• *Πιθανές Γενικεύσεις.*

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή με κάποιες επιπλέον σκέψεις. Προσπαθήσαμε να σκεφτούμε κάποιο γενικό επιχείρημα που να αποδεικνύει ότι όλες οι οι θεωρίες (υπερ-) χορδών που μπορούν να διατυπωθούν στον AdS_5 όπως επίσης και τον αντίστοιχο τομέα της δυϊκής $\mathcal{N}=4$ SYM θεωρίας, μπορούν αντίστοιχα να εμβαπτιστούν στη θεωρία (υπερ-) μεμβρανών εντός του $\mathrm{AdS}_7\times\mathrm{S}^4$ και της δυϊκής της υπερσύμμορφης θεωρίας πεδίου. Ωστόσο είναι γνωστό ότι η διπλή διαστατική αναγωγή (DDR) [151], είναι γενικά αδύνατη στην περίπτωση

$$\left\{\text{μεμβράνες}/\mathrm{AdS}_{4/7}\times\mathrm{S}^{7/4}\right\}\longrightarrow\left\{\text{χορδές}/\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5\right\},$$

συνεπώς σε καμιά περίπτωση δεν θα πρέπει να αναμένουμε ότι η θεωρία χορδών στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ μπορεί να εμβαπτιστεί στην M-θεωρία στον $\mathrm{AdS}_{4/7} \times \mathrm{S}^{7/4}$. Αυτό δεν σημαίνει ότι τα αποτελέσματα των Duff, Howe, Inami και Stelle [151] δεν μπορούν να εφαρμοσθούν στον $\mathrm{AdS}_{4/7} \times \mathrm{S}^{7/4}$. Υπάρχει περίπτωση να μπορούν να βρεθούν κατάλληλες, επιτρεπτές εμβαπτίσεις της πλήρους δράσης των Green-Schwarz στον $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ [27, 182] εντός της πλήρους δράσης της υπερμεμβράνης στον $\mathrm{AdS}_{4/7} \times \mathrm{S}^{7/4}$ [138]. Θα ήταν ενδιαφέρον να διερευνηθεί ο βαθμός στον οποίο αυτό είναι εφικτό.

Τέλος, θα μπορούσαμε να επιχειρήσουμε να μελετήσουμε με πιο αυστηρό τρόπο τη συναρτησιακή διαφορά ανάμεσα στις δράσεις Polyakov των χορδών και των μεμβρανών $S_2 - S_1$, σε πιο περίπλοκες περιπτώσεις. Από μαθηματική σκοπιά, φαίνεται ότι είναι εφικτό να αποδείξουμε ότι κάθε διάταξη μεμβράνης μπορεί να ληφθεί θεωρώντας εκτεταμένα αντικείμενα σε υψηλότερες διαστάσεις (π.χ. μια 3-βράνη ή μια 5-βράνη), τα οποία ζουν σε χωροχρόνο υψηλότερων διαστάσεων. Πιο γενικά, κάθε λύση p-βράνης που ζει στον AdS_m είναι θεωρητικά δυνατόν να ληφθεί από μια $(p+1)$-βράνη που ζει στον $\mathrm{AdS}_{m'} \times \mathrm{S}^{m+n+1-m'}$ ή από μια $(p+q)$-βράνη που ζει σε κάποιον χωρόχρονο υψηλότερης διάστασης.

Μέρος V

Παραρτήματα

Α΄ Χορδές σε Επίπεδο Χωρόχρονο

Όταν οι χορδές είναι απειροστά μικρές, η καμπυλότητα του χωροχρόνου αναμένεται να έχει αμελητέα επίδραση στην κίνησή τους, η οποία ουσιαστικά λαμβάνει χώρα σε επίπεδο υπόβαθρο. Στην §4, οι χορδές GKP μελετήθηκαν με μεγάλη λεπτομέρεια. Σύμφωνα με όσα μόλις αναφέραμε, η αρνητική καμπυλότητα του χώρου anti-de Sitter και η θετική καμπυλότητα της σφαίρας θα έχουν μόνο δευτερεύουσα συνεισφορά στα όρια την μικρών χορδών GKP, οι οποίες ουσιαστικά «βλέπουν» ένα σχεδόν επίπεδο χωροχρόνο. Στο παράρτημα αυτό πρόκειται να μελετήσουμε τα ανάλογα των διατάξεων GKP σε επίπεδο χώρο:

$$ds^2 = \ell^2\Big[-dt^2 + d\rho^2 + \rho^2\left(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\phi_1^2 + \sin^2\theta\, d\phi_2^2\right)\Big].^{59} \tag{Α΄.1}$$

Συγκεκριμένα πρόκειται να εξάγουμε τις σχέσεις διασποράς των περιστρεφόμενων και των παλλόμενων χορδών.

Α΄.1 Περιστρεφόμενη Χορδή

Ας θεωρήσουμε την περιστρεφόμενη διάταξη (4.8):

$$\Big\{t = \kappa\tau,\ \rho = \rho(\sigma),\ \theta = \kappa\omega\tau,\ \phi_1 = \phi_2 = 0\Big\}, \tag{Α΄.2}$$

εντός του 5-διάστατου επίπεδου υποβάθρου (Α΄.1). Το ansatz (4.40) μπορεί να ληφθεί από το (Α΄.2) για $\rho \to \overline{\theta}_1$. Στη σύμμορφη βαθμίδα ($\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) η δράση Polyakov δίδεται από:

$$S_P = \frac{T\ell^2}{2}\int\left(-\dot{t}^2 + \rho^2\,\dot{\theta}^2 - \rho'^2\right)d\tau d\sigma = \frac{T\ell^2}{2}\int\left(-\kappa^2 + \kappa^2\,\omega^2\,\rho^2 - \rho'^2\right)d\tau d\sigma. \tag{Α΄.3}$$

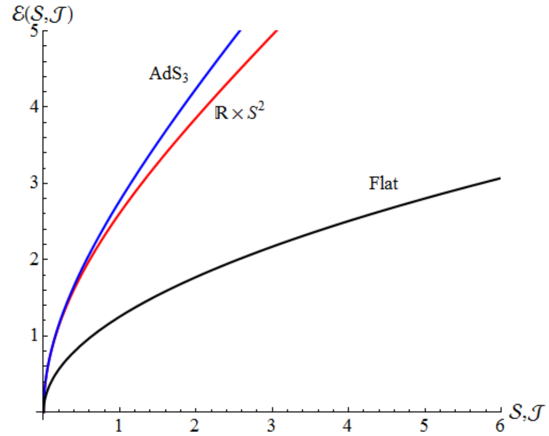
Ισοδύναμα μπορούμε να πάρουμε $\rho, \overline{\theta}_1 \to 0$ στις δράσεις (4.11)–(4.42). Το κ είναι ξανά ένας παράγοντας που επιτρέπει $\sigma\left(\rho_0\right) = \pi/2$:

$$\sigma\left(\rho_0\right) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{\rho_0}\frac{d\rho}{\kappa\sqrt{1-\omega^2\,\rho^2}} = \frac{\pi}{2\kappa\,\omega} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{\omega} = \rho_0. \tag{Α΄.4}$$

Τα διατηρούμενα φορτία μπορούν να υπολογισθούν είτε απευθείας από τη δράση Polyakov (Α΄.3) ή ως όρια $\rho, \overline{\theta}_1 \to 0$ των φορτίων (4.15)–(4.16) και (4.47)–(4.48):

$$E = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}\kappa\,\cosh^2\rho\, d\sigma \xrightarrow{\rho\to 0} \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\omega}\,d\sigma = \frac{\ell^2}{\omega\,\alpha'} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega} \tag{Α΄.5}$$

$$S = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}\kappa\,\omega\,\sinh^2\rho\, d\sigma \xrightarrow{\rho\to 0} \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi}\rho^2\,d\sigma = \frac{\ell^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{\rho_0}\frac{4\omega\rho^2\,d\rho}{\sqrt{1-\omega^2\,\rho^2}} = \frac{\ell^2}{2\alpha'\omega^2} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\omega^2}. \tag{Α΄.6}$$



Σχήμα 26: Σχέσεις $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{S}, \mathcal{J})$ για περιστρεφόμενες χορδές εντός του AdS$_3$, του $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ και του επίπεδου χωροχρόνου.

Έτσι λαμβάνουμε την ενέργεια της χορδής σαν συνάρτηση του σπίν της:

$$E = \left(2\sqrt{\lambda}\, S\right)^{1/2}. \tag{A$'$.7}$$

Ας σημειωθεί ότι η (A$'$.7) συμπίπτει με τον κυρίαρχο όρο των σειρών (4.30)–(4.62) για τις μικρές χορδές GKP εντός των AdS$_3$ και $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$. Οι επόμενοι όροι αυτών των σειρών οφείλονται στην καμπυλότητα του χωροχρόνου και ποσοτικοποιούν την απόκλιση της υπόβαθρου της χορδής από την επίπεδη μετρική (A$'$.1). Στο σχήμα 26 έχουμε σχεδιάσει σε κοινό διάγραμμα την ενέργεια σαν συνάρτηση του σπίν για κλειστές διπλωμένες χορδές που περιστρέφονται εντός του AdS$_3$ (4.22)–(4.23), $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$ (4.55)–(4.56) και του επίπεδου χωροχρόνου (A$'$.7).

Η συμπεριφορά (A$'$.7) για την κυρίαρχη συνεισφορά στην ενέργεια των μικρών διεγέρσεων εντός του χώρου anti-de Sitter μπορεί ακόμη να βρεθεί και από τις διαστάσεις κλίμακας (2.42) των βαθμωτών τελεστών που έχουν συζευχθεί με τις μαζικές καταστάσεις χορδών [7]. Σε ισχυρή σύζευξη $\lambda \to \infty$, η διάσταση κλίμακας ενός όποιου βαθμωτού πεδίου μάζας m στον AdS$_{p+2}$ δίδεται από την (2.42):

$$\Delta_{\pm} = \frac{1}{2}\left(p + 1 \pm \sqrt{(p+1)^2 + (2\,m\,\ell)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(p + 1 \pm \sqrt{(p+1)^2 + 16\sqrt{\lambda}\,n}\right) \xrightarrow{\lambda\to\infty} 2\left(\sqrt{\lambda}n\right)^{1/2},$$

όπου $m^2 = 4\,n/\alpha'$ είναι το επίπεδο διέγερσης της χορδής και $S = 2n$. Η συμπεριφορά $E = 2\left(\sqrt{\lambda}n\right)^{1/2}$ για την ενέργεια της χορδής ισχύει για μικρές τιμές του n.

A$'$.2 Παλλόμενη Χορδή

Η παλλόμενη διάταξη των GKP (4.78)

$$\Big\{t = t\,(\tau)\,,\ \rho = \rho(\tau),\ \theta = 0,\ \phi_1 = w\sigma,\ \phi_2 = 0\Big\} \tag{A$'$.8}$$

εντός του επίπεδου υπόβαθρου (A$'$.1), αναμένεται να αναπαράγει την κυρίαρχη συνεισφορά (4.102) στην

[59] Ο παράγοντας $\ell^2 = \alpha'\sqrt{\lambda}$ μπροστά από την επίπεδη μετρική, έχει συμπεριληφθεί ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων στον επίπεδο χώρο και εκείνων του AdS$_5 \times \mathrm{S}^5$.

ενέργεια της παλλόμενης χορδής GKP, στο όριο του μικρού επιπέδου διέγερσης n. Η αντίστοιχη δράση Polyakov (στη σύμμορφη βαθμίδα, $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$) είναι:

$$S_P = \frac{\ell^2}{4\pi\alpha'}\int\Big(-\dot{t}^2 + \dot{\rho}^2 - \rho^2\,\phi_1'^2\Big)d\tau d\sigma = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\int\Big(-\dot{t}^2 + \dot{\rho}^2 - w^2\,\rho^2\Big)d\tau. \tag{A$'$.9}$$

Οι εξισώσεις κίνησης και οι σύνδεσμοι Virasoro αντιστοιχούν σε αρμονική κίνηση:

$$\ddot{t} = 0 \Rightarrow t = \kappa\,\tau\,, \quad \ddot{\rho} + w^2\rho = 0\,, \quad \dot{\rho}^2 - \kappa^2 + w^2\rho^2 = 0. \tag{A$'$.10}$$

Συμβολίζοντας με ρ_0 το κλασσικό σημείο επαναφοράς, λαμβάνουμε το μήκος της χορδής και τη διατηρούμενη ενέργεια:

$$E = \left|\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right| = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dot{t}\,d\sigma = \kappa\sqrt{\lambda} \tag{A$'$.11}$$

$$\tau\left(\rho\right) = \int_0^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{\kappa^2 - w^2\,\rho^2}} = \frac{1}{w}\arcsin\frac{w\rho}{\kappa} \Leftrightarrow \rho\left(\tau\right) = \frac{\kappa}{w}\,\sin w\tau\,, \quad \rho_0 = \frac{\kappa}{w} = \frac{E}{w\sqrt{\lambda}} = e. \tag{A$'$.12}$$

Το σύστημα μπορεί τώρα να κβαντιστεί, όπως έγινε στην §4.3.1. Η αντίστοιχη κυματική εξίσωση είναι:

$$-\hbar^2\,\psi''\left(\rho\right) = \left(E^2 - w^2\lambda\,\rho^2\right)\cdot\psi\left(\rho\right)\,, \quad \Psi\left(t,\rho\right) = e^{-i\,E\,t/\hbar}\cdot\psi\left(\rho\right). \tag{A$'$.13}$$

Πρόκειται για «μισό» αρμονικό ταλαντωτή. Επιβάλλοντας τη συνοριακή συνθήκη, $\psi\left(0\right) = \pm 1$, οι ιδιοενέργειές του είναι:

$$E = 2\left(\hbar\sqrt{\lambda}\,w\right)^{1/2}\cdot\left(n + \frac{1}{4}\right)^{1/2}\,, \quad n = 0\,,1\,,2\,,\ldots \tag{A$'$.14}$$

που συμπίπτει με την (4.102) σε κατώτερη τάξη. Ένας άλλος τρόπος για να καταλήξουμε σε αυτό το αποτέλεσμα, μπορεί να βρεθεί στην εργασία [52] (σελ. 4-6).

Β′ Δυαδικότητες Μικρών-Μεγάλων Χορδών

Στο παράρτημα αυτό πρόκειται να διατυπώσουμε κάποιες επιπλέον δυαδικότητες μεταξύ μικρών και μεγάλων χορδών, για τις δύο περιστρεφόμενες διατάξεις των GKP (I–II) και να δώσουμε μερικές κλασσικές εκφράσεις που συνδέουν τα διατηρούμενα φορτία χορδών που στρέφονται εντός του AdS_3, με τα φορτία χορδών που στρέφονται στον $\mathbb{R} \times \text{S}^2$. Ας ξεκινήσουμε με μερικούς ορισμούς:

Διπλωμένες Χορδές στον AdS_3

$$\mathcal{E}_1 \equiv \frac{\pi E_1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\,\omega}{\omega^2 - 1}\,\mathbb{E} = \frac{2\sqrt{1-x}}{x}\,\mathbb{E} = \frac{2}{3}\sqrt{1-x}\Big(\mathbb{R}_D\,(0,x,1) + \mathbb{R}_D\,(0,1,x)\Big)$$

$$\mathcal{S}_1 \equiv \frac{\pi S_1}{\sqrt{\lambda}} = 2\left[\frac{\omega^2}{\omega^2-1}\,\mathbb{E} - \mathbb{K}\right] = 2\left[\frac{1}{x}\,\mathbb{E} - \mathbb{K}\right] = \frac{2}{3}\,(1-x)\,\mathbb{R}_D\,(0,1,x)$$

$$\gamma_1 = 2\left[\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}\,\mathbb{E} + \mathbb{K}\right] = 2\left[\frac{\sqrt{1-x}-1}{3}\Big(\mathbb{R}_D\,(0,x,1) + \mathbb{R}_D\,(0,x,1)\Big) + \mathbb{R}_F\,(0,x,1)\right]$$

Διπλωμένες Χορδές στον $\mathbb{R} \times \text{S}^2$

$$\mathcal{E}_2 \equiv \frac{\pi E_2}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{\omega}\,\mathbb{K} = 2\sqrt{1-x}\,\mathbb{K} = 2\sqrt{1-x}\,\mathbb{R}_F\,(0,x,1)$$

$$\mathcal{J}_2 \equiv \frac{\pi J_2}{\sqrt{\lambda}} = 2\,(\mathbb{K} - \mathbb{E}) = \frac{2}{3}\,(1-x)\,\mathbb{R}_D\,(0,x,1)$$

$$\gamma_2 = 2\left[\left(\sqrt{1-x}-1\right)\,\mathbb{K} + \mathbb{E}\right] = 2\left(\sqrt{1-x}-1\right)\mathbb{R}_F\,(0,x,1) + \frac{2x}{3}\Big(\mathbb{R}_D\,(0,x,1) + \mathbb{R}_D\,(0,x,1)\Big),$$

όπου τα ορίσματα όλων των ελλειπτικών συναρτήσεων είναι $1/\omega^2 \equiv 1 - x$. Βρίσκουμε:

$$\mathcal{E}_1 = -\omega\,\frac{d\mathcal{E}_2}{d\omega} \qquad \& \qquad \mathcal{S}_1 = -\omega\,\frac{d\,(\omega\,\mathcal{E}_2)}{d\omega} = -\frac{d\,(\omega\,\mathcal{J}_2)}{d\omega} \tag{Β′.1}$$

$$\omega\,\mathcal{E}_2 = \omega\,\mathcal{E}_1 - \mathcal{S}_1 = \mathcal{J}_2 + \left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)\mathcal{E}_1 = \omega^2\,\mathcal{J}_2 + \left(\omega^2 - 1\right)\mathcal{S}_1 = 2\,\mathbb{K}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \tag{Β′.2}$$

$$\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)\mathcal{E}_1 = \left(1 - \frac{1}{\omega^2}\right)\mathcal{S}_1 + \left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)\mathcal{E}_2 = \omega\,\mathcal{E}_2 - \mathcal{J}_2 = \left(\omega^2 - 1\right)(\mathcal{S}_1 + \mathcal{J}_2) = 2\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{\omega^2}\right). \tag{Β′.3}$$

Εισάγοντας μερικές από αυτές τις σχέσεις στην ταυτότητα του Legendre (4.37), βρίσκουμε τις ακόλουθες επιπλέον σχέσεις μεταξύ μικρών και μεγάλων χορδών:

$$\frac{\omega'}{\omega}\,\mathcal{E}_1'\,\mathcal{E}_2 + \frac{\omega}{\omega'}\,\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2' - \omega\,\omega'\,\mathcal{E}_2\,\mathcal{E}_2' = 2\pi \tag{Β′.4}$$

$$\frac{1}{\omega'}\,\mathcal{S}_1\,\mathcal{E}_2' + \frac{1}{\omega}\,\mathcal{S}_1'\,\mathcal{E}_2 = 2\pi \quad \& \quad \frac{1}{\omega\,\omega'}\,\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_1' - \mathcal{J}_2\,\mathcal{J}_2' = 2\pi \tag{Β′.5}$$

$$\mathcal{S}_1\,\mathcal{J}_2' + \mathcal{S}_1'\,\mathcal{J}_2 + \mathcal{S}_1\,\mathcal{S}_1' = 2\pi. \tag{Β′.6}$$

Γ′ Κώδικας Mathematica

Το παρόν παράρτημα περιέχει κώδικες γραμμένους σε Mathematica, οι οποίοι υπολογίζουν τις αντίστροφες συναρτήσεις σπίν x και τις ανώμαλες διαστάσεις γ των χορδών GKP (I–II), των γιγάντιων μαγνονίων και των απλών ακίδων (στις στοιχειώδεις ή τις διπλές τους περιοχές), συναρτήσει των διατηρούμενων σπίν/στροφορμής $\mathcal{J}$, $\mathcal{S}$ και γραμμικής ορμής p. Ο κώδικας μπορεί να αντιγραφεί, επικολληθεί και εκτελεστεί απευθείας με την Mathematica. Μερικά από τα αποτελέσματα που βρέθηκαν με τη βοήθεια αυτών των αλγορίθμων παρουσιάζονται στο επόμενο παράρτημα Δ′.

Γ′.1 Χορδές GKP στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$

Γ′.1.1 Μεγάλες Διπλωμένες Χορδές ($\omega\to 1^+$)

Ας ξεκινήσουμε με τη μεγάλη και διπλωμένη ($\omega\to 1^+$) χορδή εντός του $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$. Η αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x\left(\mathcal{J}\right)$ δίδεται από τη μεταβλητή x[m, J, v], όπου m είναι ο αριθμός των όρων στη σειρά, η μεταβλητή J αντιστοιχεί στην στροφορμή $\mathcal{J} = \pi J/\sqrt{\lambda}$ και το v συμβολίζει το $e^{-\mathcal{J}-2}$. Οι ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \mathcal{E}-\mathcal{J} = \gamma\left(\mathcal{J}\right)$ δίδονται από την gamma[m, J, z], όπου m και J είναι όπως πριν και z είναι η υπολογισθείσα τιμή του x, x[m, J, v].

Οι τρεις τελευταίες γραμμές του κώδικα είναι ουσιαστικά εκείνες που υπολογίζουν το αποτέλεσμα. Ο αριθμός των nn = 10 όρων στις x[nn, J, v] και gamma[nn, J, z] μπορεί να ρυθμιστεί από το χρήστη. Ο αναγνώστης μπορεί ελεύθερα να αλλάξει αυτή την τιμή, ανάλογα με το επιθυμητό μήκος του αποτελέσματος και τη διαθέσιμη υπολογιστική ισχύ. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι για nn = 13 όρους, ο υπολογισμός διήρκεσε περίπου 42s στο σύστημά μας. Οι εξισώσεις (Δ′.2)–(Δ′.3) του παραρτήματος Δ′, περιέχουν τους λίγους πρώτους όρους του αποτελέσματος.

```
d[n_]:=-(1/2)((2n-1)!!/(2n)!!)^2;

h[n_]:=(-d[n])*(4*Log[2]+2*Sum[1/k-2/(2*k-1),{k,1,n}]);

c[n_]:=-(d[n]/(2*n-1));

b[n_]:=(-c[n])*(4*Log[2]+2*Sum[1/k-2/(2*k-1),{k,1,n}]+2/(2*n-1));

f[n_]:=-c[n]-Sum[((2*k-3)!!/(2*k)!!)*d[n-k],{k,0,n}];

g[n_]:=-b[n]-Sum[((2*k-3)!!/(2*k)!!)*h[n-k],{k,0,n}];

A[n_,J_]:=g[n]+f[n]*(4*Log[2]-J-2);

y[m_,J_,x_]:=Series[x*Exp[Sum[(b[n]/c[0])*x^n,{n,1,m}]-(((J/2)-b[0])/c[0]
            -Sum[(b[n]/c[0])*x^n,{n,1,m}])*Sum[(-1)^k*Sum[(c[l]/c[0])*x^l,{l,1,m}]
            ^k,{k,1,m}]],{x,0,m}];

x[m_,J_,v_]:=InverseSeries[(1/16)*y[m,J,x],v];

gamma[m_,J_,z_]:=2*Sum[z^p*(A[p,J]+f[p]*Log[z/(16*v)]),{p,0,m}];

nn = 10;

x[nn,J,v];

Normal[%]/.v->E^(-J-2)

Simplify[Collect[FullSimplify[gamma[nn,J,z]/.z->%%],{v,J}]]/.v->E^(-J-2)
```

Μπορούμε να αναγνωρίσουμε τους d[n], h[n], c[n], b[n] ως τους συντελεστές σειρών d_n, h_n, c_n, b_n που δίδονται στην (4.67). Οι f[n], g[n] και A[n, J] είναι αντίστοιχα οι συντελεστές f_n, g_n, A_n των (5.30)–(5.32). Η σειρά y[m, J, x] εξάγεται εκθετοποιώντας και αναδιατάσσοντας την εξίσωση (5.18).

Γ′.1.2 Γρήγορες Διπλωμένες Χορδές ($\omega \to 1^-$)

Με τις κατάλληλες τροποποιήσεις, ο προηγούμενος αλγόριθμος μπορεί επίσης να εφαρμοστεί και στην περίπτωση των γρήγορων κυκλικών ($\omega \to 1^-$) χορδών στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^2$. Οι d[n], h[n], c[n], b[n] είναι και πάλι οι συντελεστές σειρών d_n, h_n, c_n, b_n της (4.67), ωστόσο οι συντελεστές που εμφανίζονται στη εξίσωση (4.75) είναι ελαφρώς διαφορετικοί και δίνονται πρακτικά από τους cc[n] και bb[n]. Οι συντελεστές ff[n], gg[n] και AA[n, J] αντιστοιχούν στους f_n, g_n και A_n, οι οποίοι δίνονται από τις εξισώσεις (5.67)–(5.68). Ο παρών αλγόριθμος (με nn = 13 όρους) πήρε περίπου 40s για να τρέξει στο σύστημά μας. Οι λίγοι πρώτοι όροι του αποτελέσματος δίδονται στις εξισώσεις (Δ′.4)–(Δ′.5) του παραρτήματος Δ′.

```
d[n_]:=(-(1/2))*((2*n-1)!!/(2*n)!!)^2;
h[n_]:=(-d[n])*(4*Log[2]+2*Sum[1/k-2/(2*k-1),{k,1,n}]);
c[n_]:=-(d[n]/(2*n-1));
b[n_]:=(-c[n])*(4*Log[2]+2*Sum[1/k-2/(2*k-1),{k,1,n}]+2/(2*n-1));
cc[n_]:=Sum[((2*k-1)!!/(2*k)!!)*c[n-k],{k,0,n}];
bb[n_]:=Sum[((2*k-1)!!/(2*k)!!)*b[n-k],{k,0,n}];
ff[n_]:=d[n]-cc[n];
gg[n_]:=h[n]-bb[n];
AA[n_,J_]:=gg[n]+ff[n]*(4*Log[2]-J-2);
y[m_,J_,x_]:=Series[(x/16)*Exp[Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}]-((J-2*bb[0])/
        (2*cc[0])-Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}])*Sum[(-1)^k*
        Sum[(cc[l]/cc[0])*x^l,{l,1,m}]^k,{k,1,m}]],{x,0,m}];
x[m_,J_,v_]:=InverseSeries[y[m,J,x],v];
gamma[m_,J_,z_]:=2*Sum[z^p*(AA[p,J]+ff[p]*Log[z/(16*v)]),{p,0,m}];
nn = 13;
x[nn,J,v];
Normal[%]/.v->E^(-J-2)
Simplify[Collect[FullSimplify[gamma[nn,J,z]/.z->%%],{v,J}]]/.v->E^(-J-2)
```

Γ′.2 Χορδές GKP στον AdS_3

Η Mathematica μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί και για την αντιστροφή της εξίσωσης (5.71) που αναφέρεται στις μεγάλες, κλειστές και διπλωμένες χορδές ενός σπίν που στρέφονται εντός του AdS_3, περίπτωση (I) των GKP. Με αυτό τον τρόπο, ακριβείς εκφράσεις για την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x = x(\mathcal{S})$ και τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \mathcal{E} - \mathcal{S} = \gamma(\mathcal{S})$ μπορούν να βρεθούν, βλέπε τις εξισώσεις (Δ′.6)–(Δ′.7) του παραρτήματος Δ′. Ωστόσο, λόγω της παρουσίας των λογαρίθμων στα αντίστοιχα αναπτύγματα, μια κάπως διαφορετική προσέγγιση από εκείνη για τις χορδές στον $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^5$ πρέπει να ακολουθηθεί. Κάνουμε την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητών στην εξίσωση (5.71):

$$x = \frac{2e^u}{\mathcal{S}}, \tag{Γ'.1}$$

έτσι ώστε η (5.71) να γίνει:

$$\ln \mathcal{S} = u + \ln 2 + \left[\frac{b_0}{c_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathcal{S}}{2c_0}\frac{(-u)^n}{n!} + \frac{2^n b_n}{c_0}\frac{e^{nu}}{\mathcal{S}^n}\right]\right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k c_k}{c_0}\frac{e^{ku}}{\mathcal{S}^k}\right)^n. \tag{Γ'.2}$$

Αν αντιστρέψουμε αυτή την εξίσωση ως προς u, η μεταβλητή $x = x(\mathcal{S})$ μπορεί να υπολογισθεί από την εξίσωση (Γ'.1). Μετά, μπορούμε να εισάγουμε την $x = x(\mathcal{S})$ στην εξίσωση (5.85) και να πάρουμε τις ανώμαλες διαστάσεις $\gamma = \gamma(\mathcal{S})$. Ο κώδικας της Mathematica είναι:

```
d[n_]:=(-(1/4))*((2*n-1)!!/(2*n)!!)^2*((2*n+1)/(n+1));
h[n_]:=(-d[n])*(4*Log[2]+2*Sum[1/k-2/(2*k-1),{k,1,n}]+1/(n+1)-2/(2*n+1));
c[n_]:=-(d[n]/(2*n+1));
b[n_]:=(-c[n])*(4*Log[2]+2*Sum[1/k-2/(2*k-1),{k,1,n}]+1/(n+1));
f[n_]:=-c[n]-Sum[((2*k-3)!!/(2*k)!!)*d[n-k],{k,0,n}];
g[n_]:=-b[n]-(2*n-1)!!/(2*n+2)!!-Sum[((2*k-3)!!/(2*k)!!)*h[n-k],{k,0,n}];
A[n_,S_]:=g[n]+f[n]*(((S/2)-b[0])/c[0]+c[1]/c[0]^2);
y[m_,S_,u_]:=Series[u+Log[2]+(b[0]/c[0]+(1/c[0])*Sum[(S*(-u)^n)/(2*n!)+(2^n*b[n]*
          Exp[n*u])/S^n,{n,1,m}])/((1/c[0])*Sum[(2^k*c[k]*Exp[k*u])/S^k,
          {k,0,m}]),{u,0,m}];
x[m_,S_,v_]:=Series[(2/S)*Exp[InverseSeries[y[m,S,u],v]],{S,Infinity,m}];
SpinSeries[x_,S_,m_]:=Series[(-(1/x)+(S/2)-Sum[b[n]*x^n,{n,0,m}])/Sum[c[n]*x^n,
                 {n,0,m}],{x,0,m}];
a[n_,S_,m_]:=Coefficient[SpinSeries[x,S,m],x^n];
gamma[m_,S_,z_]:=2*Series[-((4*f[0])/z)+A[0,S]+Sum[z^n*(A[n,S]-4*f[n+1]+Sum[f[n-k-1]
             *a[k+1,S,m],{k,0,n-1}]),{n,1,m}],{z,0,m}];
nn = 7;
x[nn,S,v];
Collect[Refine[Collect[%/.{v->Log[S]},{S,Log[2]}],S>0],{S,Log[S]}]
Collect[Refine[Collect[Normal[gamma[nn,S,z]]/.{z->%%}/.{v->Log[S]},
                 {S,Log[S],Log[2]}],S>0],{S,Log[S]}]
```

Στον παραπάνω αλγόριθμο, οι d[n], h[n], c[n], b[n] είναι οι συντελεστές σειρών d_n, h_n, c_n, b_n που δίδονται στην (4.35) και οι f[n], g[n], A[n, S] είναι αντίστοιχα οι συντελεστές f_n, g_n, A_n των (5.87)–(5.89). Οι σειρές y[m, S, u] και x[m, S, v] παραμετροποιούν τις εξισώσεις (Γ'.1)–(Γ'.2) που είδαμε παραπάνω. Οι ανώμαλες διαστάσεις υπολογίζονται από την εξίσωση (5.91) και τη μεταβλητή gamma[m, S, z].

Για να υπολογίσουμε την τελευταία, χρειαζόμαστε τους συντελεστές a_n από την εξίσωση (5.72), τους οποίους γράφουμε ως a[n, S, m] και βρίσκουμε από την εξίσωση (5.71) ή την SpinSeries[x, S, m] στην Mathematica. Το αποτέλεσμα παράγεται ξανά από τις τρεις τελευταίες γραμμές. Για nn = 7 όρους, το πρόγραμμα πήρε περίπου 30s για να τρέξει στο σύστημά μας.

Γ′.3 Γιγάντια Μαγνόνια

Γ′.3.1 Γιγάντιο Μαγνόνιο, Στοιχειώδης Περιοχή: $0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$

Ο κώδικάς Mathematica για τα γιγάντια μαγνόνια στη στοιχειώδη περιοχή ($0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$) είναι:

```
d[n_]:=(-(1/2))*((2*n-1)!!/(2*n)!!)^2
h[n_]:=-4*d[n]*(Log[2]+HarmonicNumber[n]-HarmonicNumber[2*n])
c[n_]:=-(d[n]/(2*n-1))
b[n_]:=-4*c[n]*(Log[2]+HarmonicNumber[n]-HarmonicNumber[2*n]+1/(2*(2*n-1)))
momentum[m_,a_,x_]:=Series[(Pi*EllipticF[a,x])/EllipticK[x]+((2*(1-x)*Tan[a])/
                    (EllipticK[x]*Sqrt[1-x*Sin[a]^2]))*(EllipticK[x]-
                    EllipticPi[(x*Cos[a]^2)/(1-x*Sin[a]^2),y])*(Sum[x^n*h[n],{n,0,m}]
                    +(Sum[x^n*d[n],{n,0,m}]/Sum[x^n*c[n],{n,0,m}])*(J/Sin[a]-
                    Sum[x^n*b[n],{n,0,m}])),{x,0,m}]/.y->x
velocity[m_,p_,x_]:=Series[Sin[Normal[InverseSeries[Series[Normal[
                    FullSimplify[momentum[m,a,x]]],{a,p/2,m}]-p]]/.a->0],{x,0,m}]
prefactor[m_,p_,x_]:=Series[((1-x)*z)/Sqrt[1-x*z^2],{x,0,m}]/.z->velocity[m,p,x]
energy[m_,p_,x_]:=prefactor[m,p,x]*Series[Sum[x^n*(d[n]*Log[x]+h[n]),{n,0,m}],{x,0,m}]
spin[m_,p_,x_]:=velocity[m,p,x]*Series[Sum[x^n*(c[n]*Log[x]+b[n]),{n,0,m}],{x,0,m}]
adimension[m_,p_,x_]:=energy[m,p,x]-spin[m,p,x]
A[n_,J_,p_]:=gg[n]+2*ff[n]*(2*Log[2]-J/Sin[p/2]-1)
x1[m_,J_,x_]:=Series[(x/16)*Exp[Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}]-((J-bb[0])/cc[0]-
              Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}])*Sum[(-1)^k*Sum[(cc[l]/cc[0])*x^l,
              {l,1,m}]^k,{k,1,m}]],{x,0,m}]
x2[m_,J_,v_]:=InverseSeries[x1[m,J,x],v]
\[Gamma][m_,p_,J_,v_]:=Sum[z^n*(A[n,J,p]+ff[n]*Log[z/(16*v)]),{n,0,m}]/.z->x2[m,J,v]
nn = 3; Collect[spin[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y,J}];
Do[cc[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[bb[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}];
Collect[adimension[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y,J}];
Do[ff[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[gg[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}];
```

```
Collect[velocity[nn,p,x],{x,J}]
Collect[x2[nn,J,v],{v,J},FullSimplify]/.v->E^(-L)
Collect[FullSimplify[\[Gamma][nn,p,J,v]],{v,J},FullSimplify]/.v->E^(-L)
```

Ας περιγράψουμε τι κάνει ο πιο πάνω κώδικας. Ο στόχος είναι να βρούμε τη σχέση διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων της στοιχειώδους περιοχής σαν συνάρτηση των διατηρούμενων φορτίων της χορδής p και $\mathcal{J}$. Αρχικά γνωρίζαμε την (8.25) σαν συνάρτηση της γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας v και ω του γιγάντιου μαγνονίου, οι οποίες εμφανίζονται στο σύστημά μας μέσω των σχετικών μεταβλητών $v = \cos a$ και x, που ορίζονται στην εξίσωση (8.22). Αυτές πρέπει να τις απαλείψουμε προς όφελος των φορτίων p και $\mathcal{J}$, που δίδονται στις εξισώσεις (8.24)–(8.26). Πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα. Πρώτα απαλείφουμε του λογαρίθμους από τις εξισώσεις (8.24)–(8.26). Η προκύπτουσα εξίσωση (8.30), που δίδεται από τη συνάρτηση momentum[m, a, x], αναπτύσσεται σε διπλή σειρά στα a και x γύρω από το $a = p/2$ και το $x = 0$. Η μεταβλητή m συμβολίζει τον αριθμό όρων που κρατάμε στα αναπτύγματά μας. Οι σειρά momentum[m, a, x] στη συνέχεια αντιστρέφεται ως προς τη μεταβλητή a. Το αποτέλεσμα για το $\sin a$ κωδικοποιείται από τη συνάρτηση velocity[m, p, x].

Το $\sin a$ που βρήκαμε εισάγεται στη συνέχεια στην έκφραση της στροφορμής $\mathcal{J}$ που δίδεται από την εξίσωση (8.31). Λαμβάνουμε τη συνάρτηση spin[m, p, x], τη οποία αναπτύσσουμε ως προς x προκειμένου να υπολογίσουμε τους συντελεστές cc[n] και bb[n]. Τώρα γνωρίζουμε το $\mathcal{J}$ σε μορφή παρόμοια της (5.18), την οποία μπορούμε να αντιστρέψουμε ως προς την αντίστροφη συνάρτηση σπίν x2[m, J, v] αλά GKP.[60] Ως ένα ενδιάμεσο βήμα πρέπει να υπολογίσουμε τη συνάρτηση x1[m, J, v] που κωδικοποιεί τη δεύτερη γραμμή της (5.18).

Το τελικό βήμα είναι να εισάγουμε την αντίστροφη συνάρτηση σπίν που βρήκαμε, στη σχέση για την ενέργεια μείον το σπίν (8.45), την οποία γράφουμε ως \[Gamma][m, p, J, v]. Για το τελευταίο αυτό βήμα χρειαζόμαστε τους συντελεστές f_n, g_n και A_n, (8.44)–(8.46) της σειράς (8.25). Η αντίστοιχη συνάρτηση είναι η adimension[m, p, x], που ορίζεται από τις συναρτήσεις prefactor[m, p, x], energy[m, p, x] και spin[m, p, x]. Στον παραπάνω κώδικα, οι συντελεστές f_n, g_n και A_n συμβολίζονται με ff[n], gg[n] και A[n] αντίστοιχα. Για πληρότητα, ας αναφέρουμε επίσης ότι οι συντελεστές d_n, h_n, c_n, b_n στην (8.29), δίδονται από τις μεταβλητές της Mathematica, d[n], h[n], c[n] και b[n].

Μερικά από τα αποτελέσματα που μπορούν να βρεθούν με τον κώδικά μας έχουν τοποθετηθεί στο παράρτημα Δ′.2. Το αποτέλεσμα περιέχει την αντίστροφη ορμή $\sin a = \sqrt{1 - v^2}$ σαν συνάρτηση της ορμής του μαγνονίου p, του σπίν $\mathcal{J}$ και της αντίστροφης συνάρτησης σπίν x, την αντίστροφη συνάρτηση σπίν x συναρτήσει των διατηρούμενων φορτίων $\mathcal{J}$ και p και την σχέση διασποράς $\gamma = \gamma\,(p, \mathcal{J})$. Βλέπε τις εξισώσεις (Δ′.10)–(Δ′.12). Ο αριθμός όρων στο αποτέλεσμα nn μπορεί να ρυθμιστεί. Για παράδειγμα η nn = 3, χρειάστηκε περίπου 30s για να τρέξει στο σύστημά μας.

Γ′.3.2 Γιγάντιο Μαγνόνιο, Διπλή Περιοχή: $0 \le |v| \le 1 \le 1/\omega$

Ο σκελετός του κώδικά για τα γιγάντια μαγνόνια πεπερασμένου μεγέθους στη διπλή περιοχή είναι ο ίδιος με εκείνον της στοιχειώδους περιοχής. Χρειάζεται να αλλάξουμε μόνο τις τιμές των συντελεστών των σειρών για τα διατηρούμενα φορτία d[n], h[n], c[n], b[n], τις εκφράσεις για τα διατηρούμενα φορτία, όπως επίσης και τις εξισώσεις που χρειάζεται να αντιστρέψουμε προκειμένου να απαλείψουμε τις μεταβλητές v και ω προς όφελος των p και $\mathcal{J}$.

[60] Εδώ η μεταβλητή v δεν συμβολίζει την ταχύτητα του γιγάντιου μαγνονίου, αλλά την ποσότητα $\exp\left(-\mathcal{L}\right)$, όπου το $\mathcal{L}$ δίδεται από:

$$\mathcal{L} \equiv 2\mathcal{J}\csc\frac{p}{2} + 2.$$

.

Όπως και προηγουμένως, ο κώδικας υπολογίζει την αντίστροφη ορμή $\sin a = \sqrt{1-v^2}$, την αντίστροφη συνάρτηση σπίν x και τη σχέση διασποράς $\gamma = \gamma(p, \mathcal{J})$. Για την τελευταία, βλέπε την εξίσωση (Δ′.13). Και πάλι, ο αριθμός όρων nn στο αποτέλεσμα μπορεί να ρυθμιστεί. Π.χ. για την προτεινόμενη τιμή του nn = 3, το σύστημά μας χρειάστηκε περίπου 30s για να τρέξει. Ο αντίστοιχος κώδικάς Mathematica είναι:

```
d[n_]:=(-(1/2))*((2*n-1)!!/(2*n)!!)^2
h[n_]:=-4*d[n]*(Log[2]+HarmonicNumber[n]-HarmonicNumber[2*n])
c[n_]:=-(d[n]/(2*n-1))
b[n_]:=-4*c[n]*(Log[2]+HarmonicNumber[n]-HarmonicNumber[2*n]+1/(2*(2*n-1)))
momentum[m_,a_,x_]:=FullSimplify[Series[(Pi*EllipticF[ArcSin[Sin[a]/
                    Sqrt[1-x*Cos[a]^2]],x])/EllipticK[x]+((2*Tan[a])/
                    Sqrt[1-x*Cos[a]^2])*(1-(1-x*Cos[a]^2)*(EllipticPi[x*Cos[a]^2,y]/
                    EllipticK[x]))*(Sum[x^n*h[n],{n,0,m}]+(Sum[x^n*d[n],{n,0,m}]/
                    Sum[x^n*c[n],{n,0,m}])*(Sqrt[1-x]*(J/Sin[a])-Sum[x^n*b[n],
                    {n,0,m}])),{x,0,m}]/.y->x]
velocity[m_,p_,x_]:=Series[Sin[Normal[InverseSeries[FullSimplify[Series[Normal[
                    momentum[m,a,x]],{a,p/2,m}],{p>0,p<Pi}]-p]]/.a->0],{x,0,m}]
prefactor[m_,p_,x_]:=Series[z/Sqrt[1-x*(1-z^2)],{x,0,m}]/.z->velocity[m,p,x]
energy[m_,p_,x_]:=prefactor[m,p,x]*Series[Sum[x^n*(d[n]*Log[x]+h[n]),{n,0,m}],{x,0,m}]
spin[m_,p_,x_]:=(velocity[m,p,x]/Sqrt[1-x])*Series[Sum[x^n*(c[n]*Log[x]+b[n]),{n,0,m}]
                ,{x,0,m}]
adimension[m_,p_,x_]:=energy[m,p,x]-spin[m,p,x]
A[n_,J_,p_]:=gg[n]+2*ff[n]*(2*Log[2]-J/Sin[p/2]-1)
x1[m_,J_,x_]:=Series[(x/16)*Exp[Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}]-((J-bb[0])/cc[0]-
             Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}])*Sum[(-1)^k*Sum[(cc[l]/cc[0])*x^l,
             {l,1,m}]^k,{k,1,m}]],{x,0,m}]
x2[m_,J_,v_]:=InverseSeries[x1[m,J,x],v]
\[Gamma][m_,p_,J_,v_]:=Sum[z^n*(A[n,J,p]+ff[n]*Log[z/(16*v)]),{n,0,m}]/.z->x2[m,J,v]
nn = 3; Collect[spin[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y,J}];
Do[cc[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[bb[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}];
Collect[adimension[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y,J}];
Do[ff[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[gg[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}];
```

```
Collect[velocity[nn,p,x],{x,J}]
Collect[x2[nn,J,v],{v,J},FullSimplify]/.v->E^(-L)
Collect[FullSimplify[\[Gamma][nn,p,J,v]],{v,J},FullSimplify]/.v->E^(-L)
```

Γ′.4 Απλές Ακίδες

Γ′.4.1 Απλή Ακίδα, Στοιχειώδης Περιοχή: $0 \leq 1/\omega < |v| \leq 1$

Όπως ακριβώς και ο αλγόριθμος που ακολουθήσαμε προκειμένου να υπολογίσουμε τις αναλυτικές σχέσεις διασποράς των απλών ακίδων (8.53)–(8.54) ήταν κάπως διαφορετικός από εκείνους των γιγάντιων μαγνονίων (8.49)–(8.51), η συμβολική διαδικασία με τη Mathematica αναμένεται επίσης να είναι ελαφρώς διαφορετική.

Όπως και πριν, οι λογάριθμοι πρέπει να απαλειφθούν από τις εξισώσεις (7.30)–(7.27). Η εξίσωση που προκύπτει είναι η `spin[m, a, x, p]`, η οποία αναπτύσσεται σε διπλή σειρά στα `a` και `x` γύρω από τα $a = q/2$ και $x = 0$.[61] Στη συνέχεια το `spin[m, a, x, p]` αντιστρέφεται για τη μεταβλητή a. Βρίσκουμε το $\sin a$ ως `\[Omega][m, p, x]`.

Το $\sin a$ εισάγεται μετά στη έκφραση για τη γραμμική ορμή p. Λαμβάνουμε την `momentum[m, p, x]` που αναπτύσσουμε ως προς `x` προκειμένου να υπολογίσουμε τους συντελεστές `cc[n]` και `bb[n]`. Το αποτέλεσμα είναι το p στη μορφή της (5.18), την οποία αντιστρέφουμε ως προς `x2[m, J, v]` όπως στην περίπτωση των χορδών GKP.[62] Η συνάρτηση `x1[m, J, v]` κωδικοποιεί τη δεύτερη γραμμή της (5.18).

Η αντίστροφη συνάρτηση σπίν `x2[m, J, v]` που έχουμε βρει, εισάγεται μετά στη σχέση που δίνει την ενέργεια μείον τη μισή από τη γραμμική ορμή της απλής ακίδας $\mathcal{E} - p/2$. Με τη Mathematica το τελευταίο γράφεται ως `\[Gamma][m, p, \[Theta], v]`. Πριν από αυτό το βήμα όμως, πρέπει να υπολογιστούν οι συντελεστές f_n, g_n και A_n (`ff[n]`, `gg[n]` και `A[n]` στη Mathematica). Αυτοί είναι τα ανάλογα των συντελεστών (8.44)–(8.46) των γιγάντιων μαγνονίων για τις απλές ακίδες. Υπολογίζονται από τη συνάρτηση `adimension[m, p, x]` που ορίζεται ως προς τα `prefactor[m, p, x]`, `energy[m, p, x]` και `momentum[m, p, x]`.

Ο κώδικας που ακολουθεί υπολογίζει την αντίστροφη ορμή $\sin a = \sqrt{1 - 1/\omega^2}$, την αντίστροφη συνάρτηση σπίν x και τη σχέση διασποράς $\gamma = \gamma(p, \mathcal{J})$. Βλέπε την εξίσωση (Δ′.14) στο παράρτημα Δ′.2. Ο αριθμός όρων στο αποτέλεσμα είναι `nn`. Για παράδειγμα η εντολή `nn = 3`, πήρε περίπου 60s για να τρέξει στο σύστημά μας.

```
d[n_]:=(-(1/2))*((2*n-1)!!/(2*n)!!)^2
h[n_]:=-4*d[n]*(Log[2]+HarmonicNumber[n]-HarmonicNumber[2*n])
c[n_]:=If[n==0,0,-(d[n-1]/(2*n))]
b[n_]:=If[n==0,1,((2*d[n-1])/n)*(Log[2]+HarmonicNumber[n-1]-HarmonicNumber[2*n-2]+
        1/(4*n))]
spin[m_,a_,x_,p_]:=FullSimplify[Series[Sin[a]*(Sum[x^n*b[n],{n,0,m}]+(Sum[x^n*c[n],
                        {n,0,m}]/Sum[x^n*d[n],{n,0,m}])*(((p+Pi*(EllipticF[a,x]/
```

[61] Το q ορίζεται ως $\mathcal{J} \equiv \sin q/2$ και κωδικοποιείται στη Mathematica από τη μεταβλητή `\[Theta]` η οποία δίνει το $q/2$. Θέσαμε επίσης $1/\omega \equiv \cos a$.

[62] Εδώ η μεταβλητή `v` αντιπροσωπεύει το $\exp(-\mathcal{R})$, όπου το $\mathcal{R}$ δίδεται από:

$$\mathcal{R} \equiv \sqrt{\frac{1}{\mathcal{J}^2} - 1} \cdot (p + 2\arcsin \mathcal{J}) = (p + q) \cdot \cot \frac{q}{2}.$$

.

```
                  EllipticK[x]))/EllipticPi[(x*Cos[a]^2)/(1-x*Sin[a]^2),y])*
                  ((EllipticK[x]*Sqrt[1-x*Sin[a]^2])/(2*(1-x)*Tan[a]))-Sum[x^n*
                  h[n],{n,0,m}])),{x,0,m}]/.y->x]
\[Omega][m_,p_,x_]:=Series[Normal[Sin[InverseSeries[Series[Normal[FullSimplify[
                   spin[m,a,x,p]]],{a,\[Theta],m}]-Sin[\[Theta]]]]]]/.{a->0},
                   {x,0,m}]
momentum[m_,p_,x_]:=Series[(-2/(z*Sqrt[1-x*z^2]*EllipticK[x]))*((Pi/2)*z*Sqrt[1-
                   x*z^2]*EllipticF[ArcSin[z],x]-(((1-x)*z^2)/Sqrt[1-z^2])*Normal
                   [Series[EllipticPi[(x*(1-z^2))/(1-x*z^2),y],{x,0,m}]/.y->x]*Sum
                   [x^n*(d[n]*Log[x]+h[n]),{n,0,m}]),{x,0,m}]/.z->\[Omega][m,p,x]
prefactor[m_,p_,x_]:=Series[z/Sqrt[1-z^2],{x,0,m}]/.z->\[Omega][m,p,x]
energy[m_,p_,x_]:=prefactor[m,p,x]*(1-x)*Series[Sum[x^n*(d[n]*Log[x]+h[n]),{n,0,m}],
                 {x,0,m}]
adimension[m_,p_,x_]:=energy[m,p,x]-(1/2)*momentum[m,p,x]
A[n_,\[Theta]_,p_]:=gg[n]+ff[n]*((-p)*Cot[\[Theta]]-2*\[Theta]*Cot[\[Theta]]+Log[16])
x1[m_,p_,x_]:=Series[(x/16)*Exp[Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}]-((p-bb[0])/cc[0]-
              Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}])*Sum[(-1)^k*Sum[(cc[l]/cc[0])*x^l,
              {l,1,m}]^k,{k,1,m}]],{x,0,m}]
x2[m_,p_,v_]:=InverseSeries[x1[m,p,x],v]
\[Gamma][m_,p_,\[Theta]_,v_]:=Sum[z^n*(A[n,\[Theta],p]+ff[n]*Log[z/(16*v)]),
                              {n,0,m}]/.z->x2[m,p,v]
nn = 3;Refine[Collect[momentum[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y},Simplify],
            {\[Theta]>0,\[Theta]<Pi/2}];
Do[cc[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[bb[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}];
Refine[Collect[adimension[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y},Simplify],
       {\[Theta]>0,\[Theta]<Pi/2}];
Do[ff[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[gg[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}];
Collect[\[Omega][nn,p,x],{x,p}]/.\[Theta]->q/2
Collect[x2[nn,p,v],{v,p},FullSimplify]/.{v->E^(-R),\[Theta]->q/2}
Collect[\[Gamma][nn,p,\[Theta],v],{v,p,\[Theta]},FullSimplify]/.{v->E^(-R),
        \[Theta]->q/2}
```

Γ′.4.2 Απλή Ακίδα, Διπλή Περιοχή: $0 \leq 1/\omega \leq 1 \leq |v|$

Για τις απλές ακίδες της διπλής περιοχής, ο προηγούμενος αλγόριθμος παίρνει την εξής μορφή:

```
d[n_]:=(-(1/2))*((2*n-1)!!/(2*n)!!)^2
h[n_]:=-4*d[n]*(Log[2]+HarmonicNumber[n]-HarmonicNumber[2*n])
c[n_]:=If[n==0,0,((2*n)/(2*n-1))*d[n]]
b[n_]:=If[n==0,1,(-((4*n)/(2*n-1)))*d[n]*(2*Log[2]+2*HarmonicNumber[n-1]-2*
       HarmonicNumber[2*n-2]-1/(2*n*(2*n-1)))]
\[Omega][m_,p_,x_]:=Series[Normal[Sin[InverseSeries[Series[Normal[FullSimplify[
                   spin[m,a,x,p]]],{a,\[Theta],m}]-Sin[\[Theta]]]]]/.{a->0},
                   {x,0,m}]
spin[m_,a_,x_,p_]:=FullSimplify[Series[(Sin[a]/Sqrt[1-x])*(Sum[x^n*b[n],
                  {n,0,m}]+(Sum[x^n*c[n],{n,0,m}]/Sum[x^n*d[n],{n,0,m}])*
                  (((p+Pi*(EllipticF[a,x]/EllipticK[x]))/EllipticPi[x*Cos[a]^2,y])
                  *(EllipticK[x]/(2*Sqrt[1-x*Cos[a]^2]*Tan[a]))-Sum[x^n*h[n]
                  ,{n,0,m}])),{x,0,m}]/.y-> x]
momentum[m_,p_,x_]:=Series[(2/EllipticK[x])*(\[Omega][m,p,x]*(Sqrt[1-x*(1-
                   \[Omega][m,p,x]^2)]/Sqrt[1-\[Omega][m,p,x]^2])*Normal[
                   Series[EllipticPi[x*(1-\[Omega][m,p,x]^2),y],{x,0,m}]/.y->x]
                   *Sum[x^n*(d[n]*Log[x]+h[n]),{n,0,m}]-(Pi/2)*EllipticF[ArcSin[
                   \[Omega][m,p,x]/Sqrt[1-x*(1-\[Omega][m,p,x]^2)]],x]),{x,0,m}]
prefactor[m_,p_,x_]:=Series[\[Omega][m,p,x]/Sqrt[1-\[Omega][m,p,x]^2],{x,0,m}]
energy[m_,p_,x_]:=(prefactor[m,p,x]/Sqrt[1-x])*Series[Sum[x^n*(d[n]*Log[x]+h[n]),
                 {n,0,m}],{x,0,m}]
adimension[m_,p_,x_]:=energy[m,p,x]-(1/2)*momentum[m,p,x]
A[n_,\[Theta]_,p_]:=gg[n]+ff[n]*((-p)*Cot[\[Theta]]-2*\[Theta]*Cot[\[Theta]]+Log[16])
x1[m_,p_,x_]:=Series[(x/16)*Exp[Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}]-((p-bb[0])/cc[0]-
             Sum[(bb[n]/cc[0])*x^n,{n,1,m}])*Sum[(-1)^k*Sum[(cc[l]/cc[0])*x^l,
             {l,1,m}]^k,{k,1,m}]],{x,0,m}];
x2[m_,p_,v_]:=InverseSeries[x1[m,p,x],v]
\[Gamma][m_,p_,\[Theta]_,v_]:=Sum[z^n*(A[n,\[Theta],p]+ff[n]*Log[z/(16*v)]),
                             {n,0,m}]/.z->x2[m,p,v]
nn = 3;Refine[Collect[momentum[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y},Simplify],
            {\[Theta]>0,\[Theta]< Pi/2}];
```

```
Do[cc[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[bb[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}]
Refine[Collect[adimension[nn,p,x]/.{Log[x]->y},{x,y},Simplify],{\[Theta]>0,
       \[Theta]<Pi/2}];
Do[ff[n]=Collect[If[n==0,Coefficient[%/.x->0,y],Coefficient[%,x^n*y]],J],{n,0,nn}];
Do[gg[n]=Collect[If[n==0,%%/.{x->0,y->0},Coefficient[%%,x^n]/.y->0],J],{n,0,nn}];
Collect[\[Omega][nn,p,x],{x,p}]/.\[Theta]->q/2
Collect[x2[nn,p,v],{v,p},FullSimplify]/.{v->E^(-R),\[Theta]->q/2}
Collect[\[Gamma][nn,p,\[Theta],v],{v,p,\[Theta]},FullSimplify]/.{v->E^(-R),
        \[Theta]->q/2}
```

Δ΄ Συμβολικοι Υπολογισμοί

Αυτό το παράρτημα περιέχει κάποια από τα αποτελέσματα των συμβολικών υπολογισμών που έγιναν με τους κώδικές της Mathematica του προηγούμενου παραρτήματος Γ΄. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επαλήθευση των εκφράσεων των σχέσεων διασποράς των χορδών με τις συναρτήσεις W του Lambert που εξήχθησαν στις §5 και §8.

Δ΄.1 Μεγάλες και Γρήγορες Χορδές GKP

Ας ξεκινήσουμε με τις μεγάλες και γρήγορες χορδές GKP εντός του $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ και του AdS_3. Τα αποτελέσματα της Mathematica είναι:

- Διπλωμένη Χορδή στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ $(\omega > 1)$.[63]

$$\begin{aligned} x = {} & 16\,e^{-\mathcal{J}-2} - 64\,(\mathcal{J}+2)\;e^{-2\mathcal{J}-4} + 64\left(6\mathcal{J}^2+17\mathcal{J}+15\right)\;e^{-3\mathcal{J}-6} - \frac{256}{3}(32\mathcal{J}^3+108\mathcal{J}^2+153\mathcal{J}+84)\,e^{-4\mathcal{J}-8} + \\ & + \frac{32}{3}(2000\mathcal{J}^4+7600\mathcal{J}^3+13.740\mathcal{J}^2+12.726\mathcal{J}+4989)\,e^{-5\mathcal{J}-10} - \frac{512}{5}(1728\mathcal{J}^5+7200\mathcal{J}^4+15300\mathcal{J}^3+ \\ & +18.615\mathcal{J}^2+12.740\mathcal{J}+3855)\,e^{-6\mathcal{J}-12} + \ldots \end{aligned} \tag{Δ΄.2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}-\mathcal{J} = {} & 2-8e^{-\mathcal{J}-2} + 8\,(2\mathcal{J}-1)\;e^{-2\mathcal{J}-4} - 32\left(2\mathcal{J}^2-\mathcal{J}+2\right)\;e^{-3\mathcal{J}-6} + \frac{8}{3}\left(128\mathcal{J}^3-48\mathcal{J}^2+228\mathcal{J}-63\right)\;e^{-4\mathcal{J}-8} - \\ & - \frac{16}{3}(400\mathcal{J}^4-80\mathcal{J}^3+972\mathcal{J}^2-330\mathcal{J}+279)\,e^{-5\mathcal{J}-10} + \frac{64}{5}(1152\mathcal{J}^5+3480\mathcal{J}^3-1010\mathcal{J}^2+2080\mathcal{J}- \\ & -405)\,e^{-6\mathcal{J}-12} - \ldots \end{aligned} \tag{Δ΄.3}$$

- Κυκλική Χορδή στον $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ $(\omega < 1)$.

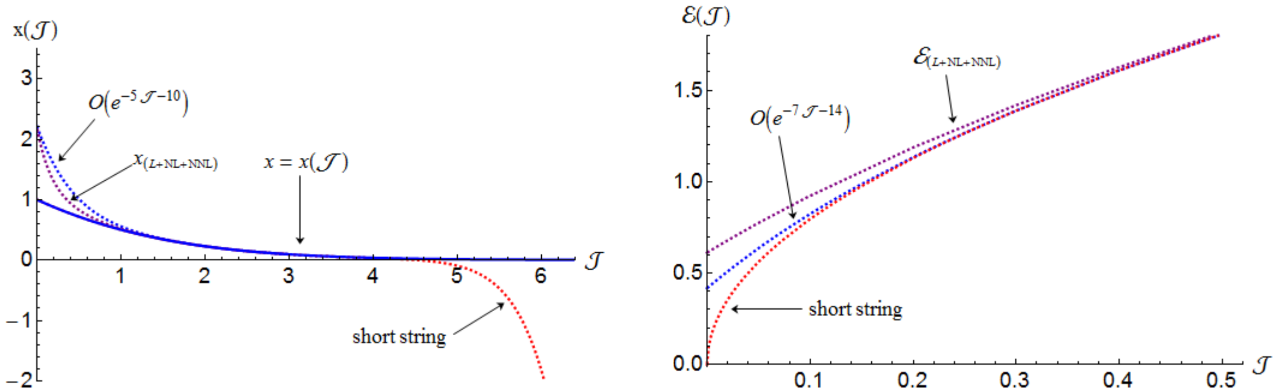
$$\begin{aligned} \widetilde{x} = {} & 16\,e^{-\mathcal{J}-2} + 64\,(\mathcal{J}-2)\;e^{-2\mathcal{J}-4} + 192\left(2\mathcal{J}^2-5\mathcal{J}+5\right)\;e^{-3\mathcal{J}-6} + \frac{256}{3}(32\mathcal{J}^3-84\mathcal{J}^2+129\mathcal{J}-84)\,e^{-4\mathcal{J}-8} + \\ & + \frac{32}{3}(2000\mathcal{J}^4-5200\mathcal{J}^3+9900\mathcal{J}^2-10.316\mathcal{J}+4989)\,e^{-5\mathcal{J}-10} + \frac{1536}{5}(576\mathcal{J}^5-1440\mathcal{J}^4+3180\mathcal{J}^3- \\ & -4115\mathcal{J}^2+3360\mathcal{J}-1285)\,e^{-6\mathcal{J}-12} + \ldots \end{aligned} \tag{Δ΄.4}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}-\mathcal{J} = {} & 2+8e^{-\mathcal{J}-2} + 8\,(2\mathcal{J}-1)\;e^{-2\mathcal{J}-4} + 32\left(2\mathcal{J}^2-\mathcal{J}+2\right)\;e^{-3\mathcal{J}-6} + \frac{8}{3}\left(128\mathcal{J}^3-48\mathcal{J}^2+228\mathcal{J}-63\right)\;e^{-4\mathcal{J}-8} \\ & + \frac{16}{3}(400\mathcal{J}^4-80\mathcal{J}^3+972\mathcal{J}^2-330\mathcal{J}+279)\,e^{-5\mathcal{J}-10} + \frac{64}{5}(1152\mathcal{J}^5+3480\mathcal{J}^3-1010\mathcal{J}^2+2080\mathcal{J}- \\ & -405)\,e^{-6\mathcal{J}-12} + \ldots \end{aligned} \tag{Δ΄.5}$$

[63]Όπως σημειώσαμε ήδη στην §5.3, ο μετασχηματισμός

$$\mathcal{S} \equiv \frac{1}{16}\,e^{\mathcal{J}+2} \Leftrightarrow \mathcal{J} = \ln\mathcal{S} + 4\ln 2 - 2 \tag{Δ΄.1}$$

κάνει τις αντίστροφες συναρτήσεις σπίν και τις ανώμαλες διαστάσεις των μεγάλων διπλωμένων χορδών εντός του $\mathbb{R}\times\mathrm{S}^2$ (GKP II) και του AdS_3 (GKP I) να μοιάζουν και μας επιτρέπει να τις συγκρίνουμε. Βλέπε την εξίσωση (5.127).



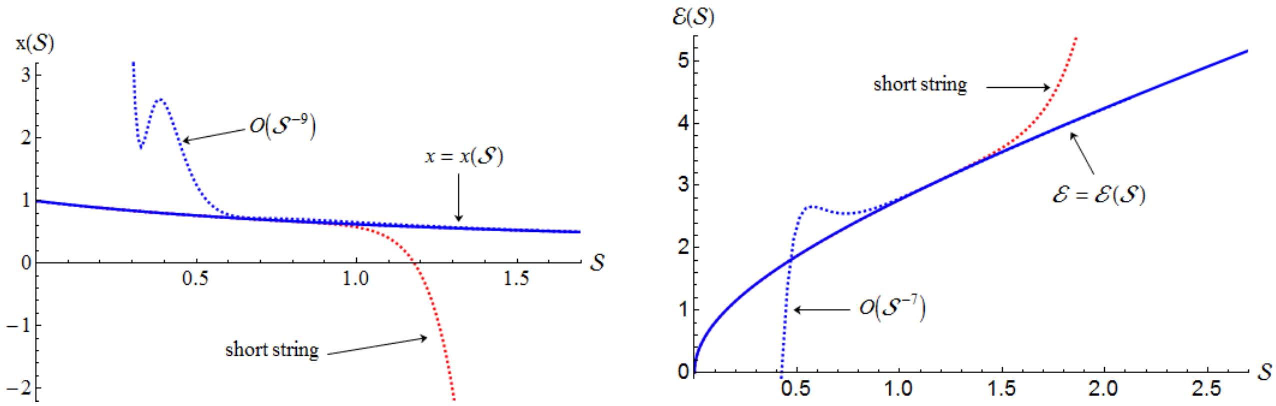
Σχήμα 27: Μικρές & μεγάλες προσεγγίσεις της διπλωμένης χορδής GKP στον $\mathbb{R}\times \mathrm{S}^2$. Το αριστερό διάγραμμα περιέχει το παραμετρικό διάγραμμα της αντίστροφης συνάρτησης σπίν $x = x\left(\mathcal{J}\right)$ σύμφωνα με την εξίσωση (4.56) (παχιά μπλε γραμμή), την προσέγγιση «μικρής» χορδής (4.60) (κόκκινη διακεκομμένη γραμμή), την σχέση για τους όρους NNL (5.64) (μώβ διακεκομμένη γραμμή) και τους 5 πρώτους όρους της προσέγγισης «μεγάλης» χορδής (Δ′.2) (μπλε διακεκομμένη γραμμή). Το διάγραμμα στα δεξιά περιέχει την προσέγγιση «μικρής» χορδής για τις ανώμαλες διαστάσεις (4.61) (κόκκινη διακεκομμένη γραμμή), τη σχέση για τους όρους NNL (5.65) (μώβ διακεκομμένη γραμμή) και τους πρώτους οκτώ όρους από την προσέγγιση «μεγάλης» χορδής (Δ′.3). Προς σύγκριση, το διάγραμμα της $\mathcal{E} = \mathcal{E}\left(\mathcal{J}\right)$ μπορεί να βρεθεί στο σχήμα 8.

• Διπλωμένη Χορδή στον AdS_3 ($\omega > 1$).

$$\begin{aligned} x =& \frac{2}{\mathcal{S}} - \left[\ln\mathcal{S} + \left(3\ln 2 + 1\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^2} + \left[\frac{\ln^2\mathcal{S}}{2} + \left(3\ln 2 + \frac{1}{4}\right)\ln\mathcal{S} + \left(\frac{9\ln^2 2}{2} + \frac{3\ln 2}{4} + \frac{3}{8}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^3} - \left[\frac{\ln^3\mathcal{S}}{4} + \left(\frac{9\ln 2}{4} - \right.\right. \\ & \left.\left. - \frac{1}{4}\right)\ln^2\mathcal{S} + \left(\frac{27\ln^2 2}{4} - \frac{3\ln 2}{2} + \frac{3}{8}\right)\ln\mathcal{S} + \left(\frac{27\ln^3 2}{4} - \frac{9\ln^2 2}{4} + \frac{9\ln 2}{8}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^4} + \ldots \end{aligned} \tag{Δ′.6}$$

$$\begin{aligned} \gamma =& \ln\mathcal{S} + \left[3\ln 2 - 1\right] + \left[\frac{\ln\mathcal{S}}{2} + \left(\frac{3\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}} - \left[\frac{\ln^2\mathcal{S}}{8} + \left(\frac{3\ln 2}{4} - \frac{9}{16}\right)\ln\mathcal{S} + \left(\frac{9\ln^2 2}{8} - \frac{27\ln 2}{16} + \frac{5}{16}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^2} + \\ & + \left[\frac{\ln^3\mathcal{S}}{24} + \left(\frac{3\ln 2}{8} - \frac{3}{8}\right)\ln^2\mathcal{S} + \left(\frac{9\ln^2 2}{8} - \frac{9\ln 2}{4} + \frac{11}{16}\right)\ln\mathcal{S} + \left(\frac{9\ln^3 2}{8} - \frac{27\ln^2 2}{8} + \frac{33\ln 2}{16} - \frac{7}{24}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^3} - \\ & - \left[\frac{\ln^4\mathcal{S}}{64} + \left(\frac{3\ln 2}{16} - \frac{43}{192}\right)\ln^3\mathcal{S} + \left(\frac{27\ln^2 2}{32} - \frac{129\ln 2}{64} + \frac{51}{64}\right)\ln^2\mathcal{S} + \left(\frac{27\ln^3 2}{16} - \frac{387\ln^2 2}{64} + \frac{153\ln 2}{32} - \frac{937}{1024}\right)\cdot \right. \\ & \left. \cdot\ln\mathcal{S} + \left(\frac{81\ln^4 2}{64} - \frac{387\ln^3 2}{64} + \frac{459\ln^2 2}{64} - \frac{2811\ln 2}{1024} + \frac{1919}{6144}\right)\right]\frac{1}{\mathcal{S}^4} + \ldots \end{aligned} \tag{Δ′.7}$$

Όλα αυτά τα αποτελέσματα συμφωνούν με τις σχέσεις της συνάρτησης W και τους αντίστοιχους συντελεστές που υπολογίσαμε. Οι (Δ′.2)–(Δ′.3) συμφωνούν με τις (5.64)–(5.65) και οι (Δ′.4)–(Δ′.5) συμφωνούν με τις (5.69)–(5.70). Οι σχέσεις (Δ′.6)–(Δ′.7) συμφωνούν με όλους τους συντελεστές (5.6)–(5.9) αλλά και τις εκφράσεις με τη συνάρτηση W, (5.112)–(5.113). Στα σχήματα 27–28 έχουμε σχεδιάσει όλα τα αποτελέσματα που βρήκαμε με τη Mathematica στο παρόν παράρτημα (Δ′.2)–(Δ′.7), τα αντίστοιχα παραμετρικά διαγράμματα, τις εκφράσεις με τη συνάρτηση W του Lambert της §5 και τις αντίστοιχες προσεγγίσεις μικρών χορδών της §4.



Σχήμα 28: Μικρές & μεγάλες προσεγγίσεις της διπλωμένη χορδής των GKP στον AdS_3. Στα αριστερά έχουμε σχεδιάσει την αντίστροφη συνάρτηση σπίν $x\left(\mathcal{S}\right)$ παραμετρικά σύμφωνα με την (4.23) (μπλε παχιά γραμμή), καθώς επίσης και τις μικρές (4.28) (κόκκινη διακεκομμένη γραμμή) και μεγάλες προσεγγίσεις (Δ΄.6) (μπλε διακεκομμένη γραμμή). Στην τελευταία έχουν χρησιμοποιηθεί πολλοί περισσότεροι όροι (μέχρι την τάξη $\mathcal{S}^{-9}$) απ'όσους περιέχονται στην εξίσωση (Δ΄.6). Το διάγραμμα στα δεξιά αποτελεί την γραφική παράσταση των ανώμαλων διαστάσεων $\mathcal{E}\left(\mathcal{S}\right)$, παραμετρικά με βάση την εξίσωση (4.22) (μπλε παχιά γραμμή), της «μικρής» προσέγγισης (4.29) (κόκκινη διακεκομμένη γραμμή) και της «μεγάλης» προσέγγισης (Δ΄.7) (μέχρι όρους $\mathcal{S}^{-7}$). Μπορεί κανείς να συγκρίνει με το διάγραμμα του σχήματος 4.

Δ΄.2 Γιγάντια Μαγνόνια & Απλές Ακίδες

Για τα γιγάντια μαγνόνια θέτουμε,

$$\mathcal{L} \equiv 2\mathcal{J}\csc\frac{p}{2} + 2 \tag{Δ΄.8}$$

και για τις απλές ακίδες θέτουμε,

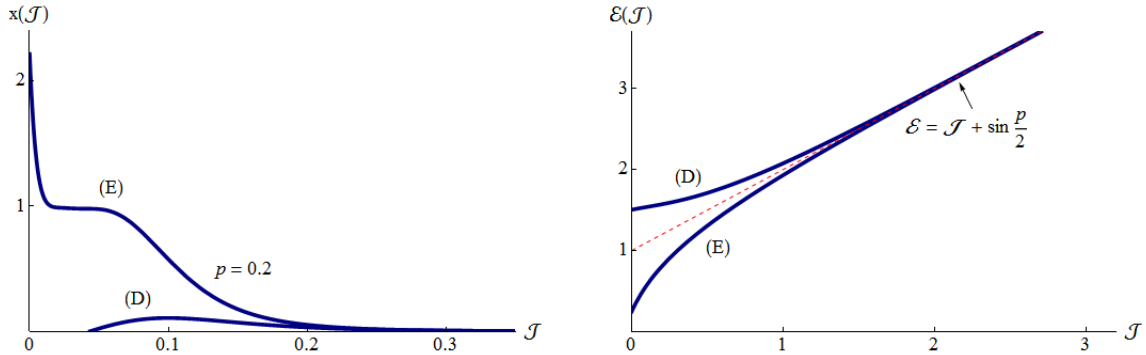
$$\mathcal{R} \equiv \sqrt{\frac{1}{\mathcal{J}^2} - 1}\cdot\left(p + 2\arcsin\mathcal{J}\right) = \left(p+q\right)\cdot\cot\frac{q}{2}\,, \quad \mathcal{J} \equiv \sin\frac{q}{2}. \tag{Δ΄.9}$$

Βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα με τη βοήθεια της Mathematica:

- Γιγάντια Μαγνόνια Πεπερασμένου Μεγέθους: Στοιχειώδης Περιοχή, $0 \leq |v| < 1/\omega \leq 1$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1-v^2} = \sin a =& \sin\frac{p}{2} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{p}{2}\left[2\mathcal{J} + 3\sin\frac{p}{2}\right]x - \frac{3}{64}\cos^2\frac{p}{2}\left[8\mathcal{J}^2\sin\frac{p}{2} - 12\mathcal{J}\cos p - 5\sin\frac{3p}{2}\right]x^2 - \frac{1}{3072}\cos^2\frac{p}{2}\cdot\\ &\cdot\left[\mathcal{J}^3(512\cos p - 256) + 216\mathcal{J}^2\left(5\sin\frac{3p}{2} + \sin\frac{p}{2}\right) - 12\mathcal{J}\left(73\cos 2p + 66\cos p + 11\right) - 259\sin\frac{5p}{2} - \right.\\ &\left. - 272\sin\frac{3p}{2} + 11\sin\frac{p}{2}\right]x^3 + \ldots\end{aligned} \tag{Δ΄.10}$$

$$\begin{aligned}x =& 16\,e^{-\mathcal{L}} + \left[256\mathcal{J}^2\cot^2\frac{p}{2} + 64\mathcal{J}\left(3\cos p + 1\right)\csc\frac{p}{2} - 128\right]e^{-2\mathcal{L}} + \left[6144\mathcal{J}^4\cot^4\frac{p}{2} + 512\mathcal{J}^3\left(19\cos p + 1\right)\cot^2\frac{p}{2}\cdot\right.\\ &\left.\cdot\csc\frac{p}{2} - 256\mathcal{J}^2\left(2\csc^2\frac{p}{2} + 33\cos p + 25\right) + 64\mathcal{J}\left(6\cos 2p - 51\cos p - 23\right)\csc\frac{p}{2} + 960\right]e^{-3\mathcal{L}} + \left[\frac{524\,288}{3}\mathcal{J}^6\cot^6\frac{p}{2} + \right.\\ &+ 32\,768\mathcal{J}^5\left(13\cos p - 1\right)\cot^4\frac{p}{2}\csc\frac{p}{2} + \frac{8192}{3}\mathcal{J}^4\left(68\cos 2p - 27\cos p + 1\right)\cot^2\frac{p}{2}\csc^2\frac{p}{2} + \frac{128}{3}\mathcal{J}^3(819\cos 3p -\end{aligned}$$



Σχήμα 29: Αντίστροφη συνάρτηση σπίν και ενέργεια των γιγάντιων μαγνονίων πεπερασμένου μεγέθους. Στα αριστερά έχουμε σχεδιάσει την $x\,(p=0.2,\mathcal{J})$ και την $\widetilde{x}\,(p=0.2,\mathcal{J})$ στη στοιχειώδη (Δ′.11) και τη διπλή περιοχή των γιγάντιων μαγνονίων. Στα δεξιά έχουμε σχεδιάσει την $\mathcal{E}\,(p=3.0,\mathcal{J})$ στην στοιχειώδη (Δ′.12) και τη διπλή περιοχή (Δ′.13) των γιγάντιων μαγνονίων. Οι καμπύλες της στοιχειώδους περιοχής συμβολίζονται με ένα (E) και οι καμπύλες της διπλής περιοχής με ένα (D). Οι προσεγγίσεις γίνονται όλο και πιο ακριβείς καθώς η στροφορμή $\mathcal{J}$ μεγαλώνει, προσεγγίζοντας το αποτέλεσμα απείρου μεγέθους των Hofman-Maldacena (6.6).

$$-786\cos 2p-3027\cos p-1934)\csc^3\frac{p}{2}+1024\mathcal{J}^2\left(11\cos 3p-44\cos 2p-18\cos p+1\right)\csc^2\frac{p}{2}+\frac{64}{3}\mathcal{J}(70\cos 3p-$$

$$-319\cos 2p+1742\cos p+907)\csc\frac{p}{2}-7168\Big]\,e^{-4\mathcal{L}}+\ldots \tag{Δ′.11}$$

$$\mathcal{E}-\mathcal{J}=\sin\frac{p}{2}-4\sin^3\frac{p}{2}e^{-\mathcal{L}}-\left[8\mathcal{J}^2\csc\frac{p}{2}\sin^2 p-\mathcal{J}\left(12\cos 2p-8\cos p-4\right)+4\left(6\cos p+7\right)\sin^3\frac{p}{2}\right]e^{-2\mathcal{L}}-$$

$$-\Big[32\mathcal{J}^4\csc^5\frac{p}{2}\sin^4 p+\frac{32}{3}\mathcal{J}^3\left(31\cos 2p+88\cos p+57\right)+32\mathcal{J}^2\left(9\sin\frac{5p}{2}+11\sin\frac{3p}{2}+6\sin\frac{p}{2}\right)-$$

$$-\mathcal{J}\left(96\cos 3p+44\cos 2p-112\cos p-28\right)+\frac{8}{3}\left(37\cos 2p+97\cos p+72\right)\sin^3\frac{p}{2}\Big]e^{-3\mathcal{L}}-$$

$$-\Big[\frac{512}{3}\mathcal{J}^6\csc^9\frac{p}{2}\sin^6 p+2048\mathcal{J}^5\left(19\cos p+5\right)\cos^2\frac{p}{2}\cot^2\frac{p}{2}+\frac{64}{3}\mathcal{J}^4\left(1273\cos 2p+1824\cos p+1319\right)\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{p}{2}\cot\frac{p}{2}+\frac{64}{3}\mathcal{J}^3\left(441\cos 3p+1242\cos 2p+1983\cos p+1118\right)+8\mathcal{J}^2\Big(431\sin\frac{7p}{2}+734\sin\frac{5p}{2}+$$

$$+544\sin\frac{3p}{2}+273\sin\frac{p}{2}\Big)-\frac{4}{3}\mathcal{J}\left(511\cos 4p+360\cos 3p-88\cos 2p-588\cos p-195\right)+4(118\cos 3p+$$

$$+322\cos 2p+532\cos p+349)\sin^3\frac{p}{2}\Big]e^{-4\mathcal{L}}-\ldots \tag{Δ′.12}$$

- Γιγάντια Μαγνόνια Πεπερασμένου Μεγέθους: Διπλή Περιοχή, $0\le|v|\le 1\le 1/\omega$.

$$\mathcal{E}-\mathcal{J}=\sin\frac{p}{2}+4\sin^3\frac{p}{2}e^{-\mathcal{L}}-\left[8\mathcal{J}^2\csc\frac{p}{2}\sin^2 p-\mathcal{J}\left(12\cos 2p-8\cos p-4\right)+4\left(6\cos p+7\right)\sin^3\frac{p}{2}\right]e^{-2\mathcal{L}}+$$

$$+\Big[32\mathcal{J}^4\csc^5\frac{p}{2}\sin^4 p+\frac{32}{3}\mathcal{J}^3\left(31\cos 2p+88\cos p+57\right)+32\mathcal{J}^2\left(9\sin\frac{5p}{2}+11\sin\frac{3p}{2}+6\sin\frac{p}{2}\right)-$$

$$-\mathcal{J}\left(96\cos 3p+44\cos 2p-112\cos p-28\right)+\frac{8}{3}\left(37\cos 2p+97\cos p+72\right)\sin^3\frac{p}{2}\Big]e^{-3\mathcal{L}}-$$

$$-\Big[\frac{512}{3}\mathcal{J}^6\csc^9\frac{p}{2}\sin^6 p+2048\mathcal{J}^5\left(19\cos p+5\right)\cos^2\frac{p}{2}\cot^2\frac{p}{2}+\frac{64}{3}\mathcal{J}^4\left(1273\cos 2p+1824\cos p+1319\right)\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{p}{2}\cot\frac{p}{2}+\frac{64}{3}\mathcal{J}^3\left(441\cos 3p+1242\cos 2p+1983\cos p+1118\right)+8\mathcal{J}^2\Big(431\sin\frac{7p}{2}+734\sin\frac{5p}{2}+$$

$$+544\sin\frac{3p}{2}+273\sin\frac{p}{2}\Big)-\frac{4}{3}\mathcal{J}\left(511\cos 4p+360\cos 3p-88\cos 2p-588\cos p-195\right)+4(118\cos 3p+$$

$$+322\cos 2p+532\cos p+349)\sin^3\frac{p}{2}\Big]e^{-4\mathcal{L}}+\dots \tag{Δ΄.13}$$

- Απλές Ακίδες Πεπερασμένου Μεγέθους: Στοιχειώδης Περιοχή, $0\le 1/\omega<|v|\le 1$.

$$\mathcal{E}-\frac{p}{2}=\frac{q}{2}+4\sin^2\frac{q}{2}\tan\frac{q}{2}\cdot e^{-\mathcal{R}}+\Big\{8p^2\cos^2\frac{q}{2}+2p\cos\frac{q}{2}\left(8q\cos\frac{q}{2}-\sin\frac{3q}{2}+7\sin\frac{q}{2}\right)+8q^2\cos^2\frac{q}{2}-2q\sin q\big(\cos q-$$

$$-3\big)+\sin^2\frac{q}{2}\left(\cos 2q-2\cos q+5\right)\Big\}\sec^2\frac{q}{2}\tan\frac{q}{2}\cdot e^{-2\mathcal{R}}+\Big\{32p^4\cos^4\frac{q}{2}+\frac{8p^3}{3}\cos^3\frac{q}{2}\Big(48q\cos\frac{q}{2}-11\sin\frac{3q}{2}+$$

$$+25\sin\frac{q}{2}\Big)+p^2\cos^2\frac{q}{2}\Big[192q^2\cos^2\frac{q}{2}-8q\sin q\left(11\cos q-7\right)-5\cos 3q+22\cos 2q-59\cos q+42\Big]+$$

$$+\frac{1}{4}p\cos\frac{q}{2}\Big[512q^3\cos^3\frac{q}{2}-32q^2\sin q\,\cos\frac{q}{2}\left(11\cos q-7\right)+16q\sin q\,\sin\frac{q}{2}\left(5\cos 2q-12\cos q+15\right)-8\sin^3\frac{q}{2}\cdot$$

$$\cdot\left(\cos 3q-5\cos 2q+15\cos q-27\right)\Big]+32q^4\cos^4\frac{q}{2}-\frac{8}{3}q^3\cos^2\frac{q}{2}\sin q\left(11\cos q-7\right)+q^2\sin^2 q\big(5\cos 2q-$$

$$-12\cos q+15\big)-q\sin q\sin^2\frac{q}{2}\left(\cos 3q-5\cos 2q+15\cos q-27\right)+\frac{1}{6}\sin^4\frac{q}{2}\big(\cos 4q+2\cos 3q+16\cos 2q-$$

$$-50\cos q+127\big)\Big\}\csc\frac{q}{2}\sec^5\frac{q}{2}\cdot e^{-3\mathcal{R}}+\dots \tag{Δ΄.14}$$

- Απλές Ακίδες Πεπερασμένου Μεγέθους: Διπλή Περιοχή, $0\le 1/\omega\le 1\le |v|$.

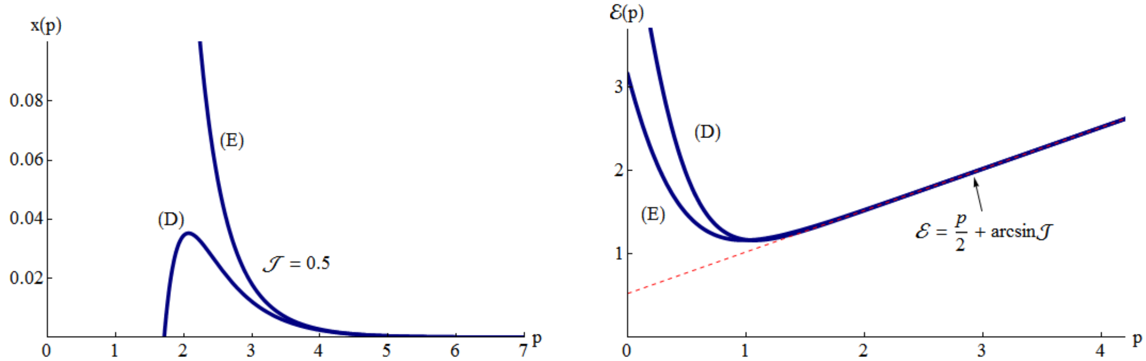
$$\mathcal{E}-\frac{p}{2}=\frac{q}{2}-4\sin^2\frac{q}{2}\tan\frac{q}{2}\cdot e^{-\mathcal{R}}+\Big\{8p^2\cos^2\frac{q}{2}+2p\cos\frac{q}{2}\left(8q\cos\frac{q}{2}-\sin\frac{3q}{2}+7\sin\frac{q}{2}\right)+8q^2\cos^2\frac{q}{2}-2q\sin q\big(\cos q-$$

$$-3\big)+\sin^2\frac{q}{2}\left(\cos 2q-34\cos q-91+64\csc^2\frac{q}{2}\right)\Big\}\sec^2\frac{q}{2}\tan\frac{q}{2}\cdot e^{-2\mathcal{R}}-\Big\{32p^4\cos^4\frac{q}{2}+\frac{8p^3}{3}\cos^3\frac{q}{2}\Big(48q\cos\frac{q}{2}$$

$$-11\sin\frac{3q}{2}+25\sin\frac{q}{2}\Big)+p^2\cos^2\frac{q}{2}\Big[192q^2\cos^2\frac{q}{2}-8q\sin q\left(11\cos q-7\right)-5\cos 3q+86\cos 2q+197\cos q+$$

$$+234\Big]+\frac{1}{4}p\cos\frac{q}{2}\Big[512q^3\cos^3\frac{q}{2}-32q^2\sin q\,\cos\frac{q}{2}\left(11\cos q-7\right)+16q\sin q\,\sin\frac{q}{2}\Big(5\cos 2q-76\cos q-177+$$

$$+128\csc^2\frac{q}{2}\Big)-8\sin^3\frac{q}{2}\cdot\Big(\cos 3q-69\cos 2q-433\cos q-795+384\csc^2\frac{q}{2}\Big)\Big]+32q^4\cos^4\frac{q}{2}-\frac{8}{3}q^3\cos^2\frac{q}{2}\sin q$$



Σχήμα 30: Αντίστροφη συνάρτηση σπίν και ενέργεια απλών ακίδων πεπερασμένου μεγέθους. Στα αριστερά έχουμε σχεδιάσει το $x\,(p,\mathcal{J}=0.5)$ και το $\widetilde{x}\,(p,\mathcal{J}=0.5)$ στη στοιχειώδη και τη διπλή περιοχή των απλών ακίδων. Στα δεξιά έχουμε σχεδιάσει την $\mathcal{E}\,(p,\mathcal{J}=0.5)$ στη στοιχειώδη (Δ′.14) και τη διπλή περιοχή (Δ′.15) των απλών ακίδων. Οι καμπύλες στη στοιχειώδη περιοχή συμβολίζονται με (E) και οι καμπύλες της διπλής περιοχής συμβολίζονται με (D). Οι προσεγγίσεις γίνονται περισσότερο ακριβείς καθώς η γραμμική ορμή p μεγαλώνει, προσεγγίζοντας την (6.8).

$$\cdot (11\cos q - 7) + q^2 \sin^2 q \left(5\cos 2q - 76\cos q - 177 + 128\csc^2\frac{q}{2}\right) - q\sin q \sin^2\frac{q}{2}\Big(\cos 3q - 69\cos 2q - 433\cos q$$

$$-795 + 384\csc^2\frac{q}{2}\Big) + \frac{1}{6}\sin^4\frac{q}{2}\Big(\cos 4q - 190\cos 3q - 1424\cos 2q - 4466\cos q - 3809 + 768\csc^2\frac{q}{2}\Big)\Bigg\}\csc\frac{q}{2}\cdot$$

$$\cdot \sec^5\frac{q}{2}\cdot e^{-3\mathcal{R}} + \ldots \qquad (\Delta'.15)$$

Όλα τα αποτελέσματά μας συμφωνούν με τις σχέσεις της συνάρτησης W του Lambert που βρέθηκαν στην §8. Για τα γιγάντια μαγνόνια, η (Δ′.11) και η (Δ′.12) συμφωνούν με την (8.39) και την (8.49). Η (Δ′.13) συμφωνεί με την (8.51). Ας σημειωθεί ότι η μόνη διαφορά μεταξύ των σχέσεων διασποράς των γιγάντιων μαγνονίων στη στοιχειώδη και τη διπλή περιοχή (Δ′.12)–(Δ′.13), είναι το πρόσημο όλων των εκθετικών διορθώσεων σε περιττή δύναμη.

Για τα γιγάντια μαγνόνια οι σχέσεις διασποράς στη στοιχειώδη και τη διπλή περιοχή είναι κάπως διαφορετικές. Έχουμε σημειώσει τους όρους της (Δ′.15) που απουσιάζουν από την αντίστοιχη σχέση διασποράς της στοιχειώδους περιοχής (Δ′.14) με κόκκινο χρώμα. Για μια ακόμη φορά, τα αποτελέσματα της Mathematica (Δ′.15)–(Δ′.14) είναι σε πλήρη συμφωνία με τις αντίστοιχες εκφράσεις της συνάρτησης W του Lambert, (8.53)–(8.54). Στα σχήματα 29–30 έχουμε σχεδιάσει όλα τα αποτελέσματα που βρέθηκαν με τη Mathematica στο παρόν παράρτημα (Δ′.11)–(Δ′.15), για τα γιγάντια μαγνόνια και τις απλές ακίδες.

Ε′ Ελλειπτικά Ολοκληρώματα και Συναρτήσεις Jacobi

Το παρόν παράρτημα περιέχει τους ορισμούς και μερικές βασικές ιδιότητες των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων και των Ιακωβιανών ελλειπτικών συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε στο κείμενό μας. Οι συμβάσεις μας ακολουθούν κυρίως τους Abramowitz-Stegun [57].

<u>Ιακωβιανές Ελλειπτικές Συναρτήσεις</u>

$$u \equiv \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\left(1 - m\sin^2\theta\right)^{1/2}}\,, \quad \varphi \equiv am(u|m)\,, \quad \Delta(\varphi) \equiv (1-\sin^2\theta)^{1/2} \equiv dn(u|m) \tag{Ε′.1}$$

$$x = \sin\varphi \equiv sn(u|m)\,, \quad \cos\varphi \equiv cn(u|m).$$

<u>Ελλειπτικά Ολοκληρώματα Πρώτου Είδους</u>

$$\mathbb{F}\left(\varphi\middle|m\right) \equiv \int_0^{\varphi} \left(1 - m\,\sin^2\theta\right)^{-1/2} d\theta = \int_0^{x} \left[\left(1-t^2\right)\left(1-m\,t^2\right)\right]^{-1/2} dt = u \tag{Ε′.2}$$

$$\mathbb{K}\left(m\right) \equiv \mathbb{F}\left(\frac{\pi}{2}\middle|m\right) = \frac{\pi}{2}\cdot {}_2\mathcal{F}_1\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;m\right] \quad (\text{πλήρες}) \tag{Ε′.3}$$

$$\mathbb{K}\left(m\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 m^n =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 m^3 + \ldots\right]\,, \quad |m| < 1 \tag{Ε′.4}$$

$$\mathbb{K}\left(m\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\Gamma\left(n+1/2\right)}{n!}\right)^2\left[2\psi\left(n+1\right) - 2\psi\left(n+1/2\right) - \ln\left(1-m\right)\right]\left(1-m\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\left[\psi\left(n+1\right) - \psi\left(n+1/2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1-m\right)\right]\left(1-m\right)^n\,, \quad |1-m| < 1, \tag{Ε′.5}$$

όπου $\psi(z) \equiv \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ είναι η συνάρτηση δίγαμμα/ψ.

<u>Ελλειπτικά Ολοκληρώματα Δεύτερου Είδους</u>

$$\mathbb{E}\left(\varphi\middle|m\right) \equiv \int_0^{\varphi}\left(1 - m\,\sin^2\theta\right)^{1/2} d\theta = \int_0^{x}\left(1-t^2\right)^{-1/2}\left(1-m\,t^2\right)^{1/2} dt \tag{Ε′.6}$$

$$\mathbb{E}\left(m\right) \equiv \mathbb{E}\left(\frac{\pi}{2}\middle|m\right) = \frac{\pi}{2}\cdot {}_2\mathcal{F}_1\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;m\right] \quad (\text{πλήρες}) \tag{Ε′.7}$$

$$\mathbb{E}\left(m\right) = -\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{m^n}{2n-1} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{m}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{m^2}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{m^3}{5} + \ldots\right], \quad |m| < 1 \quad (\text{E}'.8)$$

$$\mathbb{E}\,(m) = 1 - \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\,(n+1/2)\,\Gamma\,(n+3/2)}{n!\,(n+1)!} \Big[\ln\,(1-m) + \psi\,(n+1/2) + \psi\,(n+3/2) - \psi\,(n+1) -$$

$$-\psi\,(n+2) \Big]\,(1-m)^{n+1} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\,[(2n-3)!!]^2}{(2n-2)!!\,(2n)!!} \left[\psi\,(n) - \psi\,(n-1/2) - \frac{1}{2n\,(2n-1)} - \frac{1}{2}\ln\,(1-m)\right](1-m)^n\,,$$

$$|1-m| < 1. \quad (\text{E}'.9)$$

[64]

Θα μπορούσαμε επίσης να ορίσουμε και μία ελλειπτική συνάρτηση D ως εξής [183]:

$$\mathbb{D}\,(\varphi|m) \equiv \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1 - m\,\sin^2\theta}} = \int_0^{x} \frac{t^2\, dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-m\,t^2)}} = \frac{1}{m}\Big[\mathbb{F}\,(\varphi|m) - \mathbb{E}\,(\varphi|m)\Big] \quad (\text{E}'.10)$$

$$\mathbb{D}\,(m) \equiv \mathbb{D}\left(\frac{\pi}{2}\Big|m\right) = \frac{1}{m}\Big[\mathbb{K}\,(m) - \mathbb{E}\,(m)\Big] \quad (\text{πλήρες}). \quad (\text{E}'.11)$$

Ελλειπτικά Ολοκληρώματα Τρίτου Είδους

$$\mathbf{\Pi}(n,\varphi|m) \equiv \int_0^{\varphi} \left(1 - n\sin^2\theta\right)^{-1}\left(1 - m\sin^2\theta\right)^{-1/2} =$$

$$= \int_0^{x} \left(1 - nt^2\right)^{-1}\left[\left(1-t^2\right)\left(1 - m\,t^2\right)\right]^{-1/2} dt \quad (\text{E}'.12)$$

$$\mathbf{\Pi}(n;m) \equiv \mathbf{\Pi}(n, \frac{\pi}{2}\Big|m) \quad (\text{πλήρες}). \quad (\text{E}'.13)$$

Μια πολύ χρήσιμη προσθετική ιδιότητα για τα πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα τρίτου είδους, μας επιτρέπει να απομονώσουμε τις λογαριθμικές τους ιδιομορφίες [184]:

$$\mathbf{\Pi}(n;m) = \frac{1}{(1-n)\,\mathbb{K}\,(m_1)} \cdot \left\{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n\,(n-1)}{m-n}} \cdot \mathbb{F}\left(\arcsin\sqrt{\frac{n}{n-m}}, m_1\right) - \mathbb{K}\,(m) \cdot \Big[(n-1)\,\mathbb{K}\,(m_1) -\right.$$

$$\left. -n \cdot \mathbf{\Pi}\left(\frac{1-m}{1-n}; m_1\right)\Big]\right\}, \quad m + m_1 = 1\,, \quad 0 < -n < \infty. \quad (\text{E}'.14)$$

[64] Επαναλαμβάνουμε εδώ μερικές χρήσιμες τιμές για το διπλό παραγοντικό: $0!! = 1$, $(-1)!! = 1$, $(-3)!! = -1$.

Υπάρχει ένας πολύ κομψός τρόπος για να εκφράσουμε τις εκφράσεις του Legendre (Ε′.2)–(Ε′.10), με τη βοήθεια των αποκαλούμενων συμμετρικών μορφών του Carlson. Εν συντομία, το πλήρες σετ των ολοκληρωμάτων του Carlson ορίζεται ως εξής [183, 185]:

$$\mathbb{R}_F\left(x,y,z\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{\left(t+x\right)\left(t+y\right)\left(t+z\right)}} \tag{Ε′.15}$$

$$\mathbb{R}_J\left(x,y,z,p\right)=\frac{3}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\left(t+p\right)\sqrt{\left(t+x\right)\left(t+y\right)\left(t+z\right)}} \tag{Ε′.16}$$

$$\mathbb{R}_C\left(x,y\right)=\mathbb{R}_F\left(x,y,y\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\left(t+y\right)\sqrt{\left(t+x\right)}} \tag{Ε′.17}$$

$$\mathbb{R}_D\left(x,y,z\right)=\mathbb{R}_J\left(x,y,z,z\right)=\frac{3}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\left(t+z\right)\sqrt{\left(t+x\right)\left(t+y\right)\left(t+z\right)}}. \tag{Ε′.18}$$

Οι συμμετρικές μορφές του Carlson χρωστούν πολλή από την χρησιμότητα και κομψότητά τους στο γεγονός ότι, σε αντίθεση με τις μορφές Legendre, είναι πλήρως συμμετρικές ως προς όλα ή κάποια από τα ορίσματά τους. Όπως αποδεικνύεται, όλα τα μη πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των μορφών του Carlson. Ο βαθύτερος λόγος γι'αυτό είναι το γεγονός ότι όλα τα ελλειπτικά ολοκληρώματα, προκύπτουν από μια πολυπαραγοντική υπεργεωμετρική συνάρτηση που ονομάζεται συνάρτηση $\mathcal{F}_D$ του Lauricella. Τα πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα ειδικότερα, δίδονται συναρτήσει των μορφών του Carlson ως ακολούθως:

$$\mathbb{K}\left(m\right)=\mathbb{R}_F\left(0,1-m,1\right) \tag{Ε′.19}$$

$$\mathbb{E}\left(m\right)=\frac{1}{3}\left(1-m\right)\cdot\Big[\mathbb{R}_D\left(0,1-m,1\right)+\mathbb{R}_D\left(0,1,1-m\right)\Big] \tag{Ε′.20}$$

$$\mathbb{K}\left(m\right)-\mathbb{E}\left(m\right)=m\,\mathbb{D}\left(m\right)=\frac{1}{3}m\cdot\mathbb{R}_D\left(0,1-m,1\right) \tag{Ε′.21}$$

$$\mathbb{E}\left(m\right)-\left(1-m\right)\mathbb{K}\left(m\right)=\frac{1}{3}m\left(1-m\right)\cdot\mathbb{R}_D\left(0,1,1-m\right). \tag{Ε′.22}$$

Ϛ′ Συνάρτηση W του Lambert

Ένα από τα κύρια συμπεράσματα της δουλειάς μας στο μέρος II ήταν η παραμετροποίηση των σχέσεων διασποράς ορισμένων χορδών εντός του $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ συναρτήσει της συνάρτησης W του Lambert. Η συνάρτηση W του Lambert ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$W(z)\, e^{W(z)} = z \Leftrightarrow W(z\, e^z) = z. \tag{Ϛ′.1}$$

Η συνάρτηση φέρει το όνομα του Johann Heinrich Lambert, αλλά ήταν ο Euler που πρωτοέγραψε το ανάπτυγμα σειράς της $-W(-z)$ η οποία είναι σήμερα γνωστή ως συνάρτηση δέντρου $T(z)$. Ο Euler ουσιαστικά γενίκευσε μια αλγεβρική εξίσωση που είχε μελετηθεί νωρίτερα από τον Lambert [186] και λυθεί σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις, μία εκ των οποίων αποτελεί παραλλαγή της εξίσωσης (Ϛ′.1) [187].[65] Σύμφωνα με την εργασία [188], το σύμβολο W προέκυψε από το συμβολισμό της συνάρτησης στο Maple (τα περισσότερα προγράμματα άλγεβρας υπολογιστών, συμπεριλαμβανομένου και του Maple, την αποκαλούν LambertW, ενώ στην Mathematica αποκαλείται ProductLog).[66]

Η συνάρτηση W του Lambert κάνει αρκετά συχνά την εμφάνισή της, τόσο στα Μαθηματικά όσο και τη Φυσική. Οι εφαρμογές της μπορούν να βρεθούν σε πεδία όπως η συνδυαστική, αλγόριθμοι και γράφοι, αλγεβρικές και διαφορικές εξισώσεις, ανάλυση και fractals (βλέπε π.χ. [188, 191]) αλλά επίσης και τη στατιστική φυσική, ρευστομηχανική, οπτική, αστροφυσική, γενική σχετικότητα, πληθωριστική κοσμολογία, κλπ. (βλέπε [192]). Ως συγκεκριμένα παραδείγματα, θα μπορούσαμε να ξεχωρίσουμε την ακριβή έκφραση του νόμου μετατόπισης του Wien συναρτήσει της W [193], τη λύση του διπλού πηγαδιού δυναμικού με δέλτα συναρτήσεις του Dirac [194] και εκείνο του προβλήματος των δύο σωμάτων στη βαρύτητα dilaton στις $(1+1)$ διαστάσεις [195], ή την αντιστροφή των συντεταγμένων Schwarzschild συναρτήσει των συντεταγμένων Kruskal-Szekeres [196, 197].

Πιο σχετική με τη δική μας οπτική γωνία είναι η ακριβής λύση των εξισώσεων της ομάδας επανακανονικοποίησης συναρτήσει της συνάρτησης W του Lambert [198]. Στην περίπτωση της QCD είναι γνωστό ότι η ακριβής σταθερά σύζευξης σε 3 βρόχους, μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της συνάρτησης W [199, 200]:[67]

$$\alpha_s\left(Q^2\right) = \frac{-\pi/c}{1 - c_2/c^2 + W_{-1}(z)}, \tag{Ϛ′.2}$$

όπου c_2 είναι μια σταθερά ανεξάρτητη σχήματος επανακανονικοποίησης και

$$\beta_0 \equiv \frac{1}{4}\left(11 - \frac{2}{3}N_f\right), \quad c \equiv \frac{1}{4\beta_0}\left[102 - \frac{38}{3}N_f\right], \quad z \equiv -\frac{1}{c}\exp\left[-1 + \frac{c_2}{c^2} - \frac{\beta_0\, t}{c}\right], \quad t \equiv \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right).$$

Η συνάρτηση $W(x)$ έχει δύο πραγματικούς κλάδους, τον $W_0(x)$ στο διάστημα $\left[-e^{-1}, \infty\right)$ και τον $W_{-1}(x)$ στο διάστημα $\left[-e^{-1}, 0\right]$ που έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα 31.[68] Το σημείο διακλάδωσης είναι $\left(-e^{-1}, -1\right)$. Η σειρά Taylor στο $x = 0$ σε καθένα από τους δύο κλάδους είναι [188]:

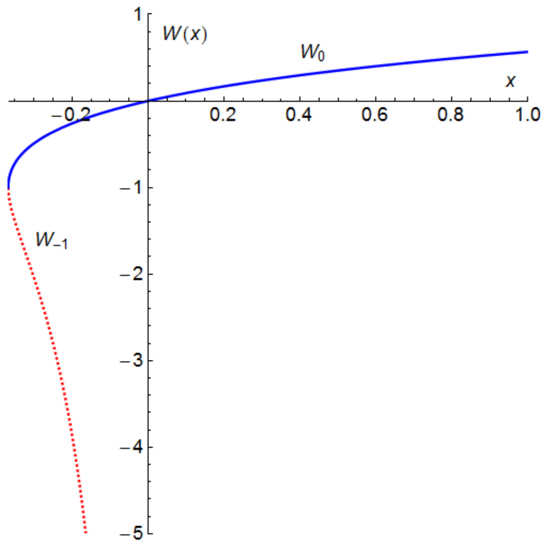
$$W_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}\cdot x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n^{n-1}}{n!}\cdot x^n, \quad |x| \leq e^{-1} \tag{Ϛ′.3}$$

[65] Στην εργασία του το 1783, ο Euler αναφέρεται στον Lambert ως «τον ιδιοφυή μηχανικό Lambert». Για περισσότερα επί της πολύ ενδιαφέρουσας ιστορίας της συνάρτησης του Lambert, βλέπε το άρθρο [188].

[66] Περισσότερα στην ονοματολογία της συνάρτησης Lambert μπορούν να βρεθούν στο άρθρο [189]. Στενά συνδεδεμένοι ορισμοί είναι εκείνοι του *glog* και της συνάρτησης ω του Wright [190].

[67] Για μια ανασκόπηση, βλέπε [201].

[68] Ο κλάδος της συνάρτησης W στη σχέση για την τρέχουσα σταθερά σύζευξης της QCD (Ϛ′.2) εξαρτάται από τον αριθμό των γεύσεων N_f. Για $c > 0 \Leftrightarrow z < 0$ ο σχετικός κλάδος είναι W_{-1}, ενώ για $c < 0 \Leftrightarrow z > 0$ ο κλάδος είναι W_0 [200].



Σχήμα 31: Οι πραγματικοί κλάδοι της συνάρτησης W του Lambert (Γ′.1).

$$W_{-1}(x) = \ln|x| - \ln\ln|x| + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m!} \begin{bmatrix} n+m \\ n+1 \end{bmatrix} (\ln|x|)^{-n-m} (\ln\ln|x|)^m\,, \tag{Γ′.4}$$

με τους (unsigned) αριθμούς Stirling πρώτου είδους $\begin{bmatrix} n+m \\ n+1 \end{bmatrix}$, να ορίζονται αναδρομικά ως [202]:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \quad \& \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = 0\,, \ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\,,\ n,k \geq 1. \tag{Γ′.5}$$

Οι ακόλουθες ταυτότητες των unsigned αριθμών Stirling χρησιμοποιούνται συχνά:

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!\,, \quad \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)!\,H_{n-1}\,, \quad \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(n-1)!\left[H_{n-1}^2 - H_{n-1}^{(2)}\right]. \tag{Γ′.6}$$

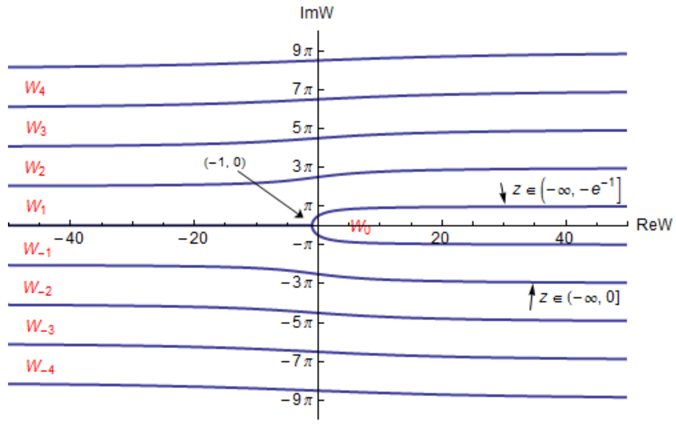
Η συνάρτηση W παρέχει μια χρήσιμη παραμέτροποίηση σε σειρά της tetration $x^{x^{x^{\cdots}}}$:

$$x^{x^{x^{\cdots}}} = {}^{\infty}(x^z) = \frac{W(-\ln x)}{-\ln x}. \tag{Γ′.7}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (Γ′.1) της συνάρτησης W του Lambert, οι παράγωγοι και αντιπαράγωγοι αυτής μπορούν να απλοποιηθούν σημαντικά. Μερικές χρήσιμες ταυτότητες της συνάρτησης W_0 είναι:

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))} \tag{Γ′.8}$$

$$x\,W'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n^n}{n!}\cdot x^n = \frac{W(x)}{1+W(x)} \tag{Γ′.9}$$



Σχήμα 32: Διάγραμμα των κλάδων της συνάρτησης W του Lambert.

$$x\,\left(x\,W'\left(x\right)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{n^{n+1}}{n!}\cdot x^n = \frac{W\left(x\right)}{\left(1+W\left(x\right)\right)^3} \tag{Γ'.10}$$

$$\int W\left(x\right)\,dx = x\left(W\left(x\right)-1+\frac{1}{W\left(x\right)}\right) \tag{Γ'.11}$$

$$\int\frac{W\left(x\right)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{n^{n-2}}{n!}\cdot x^n = W\left(x\right)+\frac{W^2\left(x\right)}{2} \tag{Γ'.12}$$

$$\int\frac{1}{x}\int\frac{W\left(x\right)}{x}\,dx^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{n^{n-3}}{n!}\cdot x^n = W\left(x\right)+\frac{3W^2\left(x\right)}{4}+\frac{W^3\left(x\right)}{6}. \tag{Γ'.13}$$

Η δομή των κλάδων της συνάρτησης W του Lambert θυμίζει πολύ εκείνη του λογάριθμου. Εκτός αυτού, η συνάρτηση W αποτελεί γενίκευση της λογαριθμικής συνάρτησης. Ωστόσο, αντί των γνωστών ευθειών που διαχωρίζουν τους γειτονικούς κλάδους του λογαρίθμου, οι γειτονικοί κλάδοι της συνάρτησης Lambert διαχωρίζονται από μια οικογένεια καμπύλων που είναι γνωστές με το όνομα «τετραγωνίζουσα του Ιππία»:

$$\left\{-\eta\cot\eta+i\eta,\quad -\pi<\eta<\pi \quad \text{ή} \quad 2k\pi<\pm\eta<\left(2k+1\right)\pi,\quad k=1,2,3,\ldots\right\} \tag{Γ'.14}$$

Η (Γ'.4) δίνει τη ασυμπτωτική συμπεριφορά όλων των κλάδων γύρω από το $z=\infty$ και όλων των μη κύριων κλάδων γύρω από το $z=0$. Άλλες αξιοσημείωτες ιδιότητες του διαγράμματος των κλάδων της συνάρτησης W, εκτός από τους δύο πραγματικούς κλάδους για τους οποίους μιλήσαμε ήδη, είναι το τριπλό σημείο διακλάδωσης στη θέση $W_{\{0,\pm1\}}\left(-e^{-1}\right)=-1$ και οι τομές $\left(-\infty,-e^{-1}\right]$ της $W_{0,\pm1}$ και $\left(-\infty,0\right]$ της $W_{k\neq0}$. Το διάγραμμα των κλάδων της συνάρτησης W έχει σχεδιαστεί στο σχήμα 32.

Z′ Πολυώνυμα Διαμέρισης

Z′.1 Πολυώνυμα Bell

Τα πλήρη εκθετικά πολυώνυμα Bell $\mathbf{B}_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ ορίζονται από τη σχέση [202]:

$$\exp\left[\sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{B}_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \frac{t^n}{n!}. \tag{Z′.1}$$

Τα μερικά εκθετικά πολυώνυμα Bell $\mathbf{B}_{n,k} = \mathbf{B}_{n,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}\right)$ ορίζονται ως ακολούθως:

$$\mathbf{B}_{n,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}\right) = \sum_{j} \frac{n!}{j_1! j_2! \ldots j_{n-k+1}!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{j_1} \left(\frac{x_2}{2!}\right)^{j_2} \ldots \left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{j_{n-k+1}}, \tag{Z′.2}$$

όπου $j_1 + j_2 + \ldots = k$ και $j_1 + 2\, j_2 + \ldots = n$. Βρίσκουμε,

$$\mathbf{B}_0\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 1\,, \quad \mathbf{B}_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{B}_{n,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}\right). \tag{Z′.3}$$

Ας σημειωθεί ότι οι unsigned αριθμοί Stirling πρώτου είδους δίδονται συναρτήσει των μερικών πολυωνύμων Bell ως $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right] = \mathbf{B}_{n,k}\left(0!, 1!, \ldots, (n-k)!\right)$. Τα συνήθη μερικά πολυώνυμα Bell ορίζονται ως:

$$\widehat{\mathbf{B}}_{n,k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{j} \frac{n!}{j_1! j_2! \ldots j_n!}\, {x_1}^{j_1} {x_2}^{j_2} \ldots x_n^{j_{n-k+1}}. \tag{Z′.4}$$

Z′.2 Πολυώνυμα Δυναμικού

Τα πολυώνυμα δυναμικού $\mathbf{P}_n^{(r)}$ ορίζονται με τη βοήθεια της σχέσης:

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!}\right]^r = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_n^{(r)}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \frac{t^n}{n!}. \tag{Z′.5}$$

Z′.3 Λογαριθμικά Πολυώνυμα

Ο ορισμός των λογαριθμικών πολυωνύμων $\mathbf{L}_n^{(r)}$ είναι παρόμοιος:

$$\ln\left[\sum_{m=0}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{L}_n^{(r)}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \frac{t^n}{n!}. \tag{Z′.6}$$

Η΄ Εξίσωση Lamé

Είδαμε στην §14 ότι οι εξισώσεις για τις εγκάρσιες διαταραχές των χορδοειδών μεμβρανών (13.1)–(13.10) μπορούν να αναχθούν στην Ιακωβιανή μορφή της εξίσωσης Lamé (14.34):

$$\frac{d^2 z}{du^2} + \left[h - \nu\left(\nu+1\right) k^2 sn^2\left(u|k^2\right)\right] z = 0, \tag{Η΄.1}$$

όπου $\nu\left(\nu+1\right) \in \mathbb{R}$ και $0 < k < 1$. Το δυναμικό της εξίσωσης Lamé (Η΄.1), $sn^2\left(u|k^2\right)$ είναι μια διπλά περιοδική συνάρτηση με (πρωτογενείς) πραγματικές και φανταστικές περιόδους ίσες προς $2\mathbb{K}\left(k^2\right)$ και $2i\mathbb{K}'\left(k^2\right)$ αντίστοιχα. Το πραγματικό και φανταστικό μέρος τους έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα 33. Οι ιδιοσυναρτήσεις της εξίσωσης Lamé (γνωστές και ως συναρτήσεις Lamé) με πραγματικές περιόδους είναι οι ακόλουθες:

ιδιοσυνάρτηση $z\left(u\right)$	ιδιοτιμή h	ομοτιμία $z\left(u\right)$	ομοτιμία του $z\left(u-\mathbb{K}\right)$	περίοδος $z\left(u\right)$
$Ec_\nu^{2n}\left(u,k^2\right)$	$a_\nu^{2n}\left(k^2\right)$	άρτια	άρτια	$2\mathbb{K}$
$Ec_\nu^{2n+1}\left(u,k^2\right)$	$a_\nu^{2n+1}\left(k^2\right)$	περιττή	άρτια	$4\mathbb{K}$
$Es_\nu^{2n+1}\left(u,k^2\right)$	$b_\nu^{2n+1}\left(k^2\right)$	άρτια	περιττή	$4\mathbb{K}$
$Es_\nu^{2n+2}\left(u,k^2\right)$	$b_\nu^{2n+2}\left(k^2\right)$	περιττή	περιττή	$2\mathbb{K}$

όπου $n = 0, 1, 2, \ldots$ Οι ιδιοτιμές Lamé a_ν^n και b_ν^n έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες διάταξης [183, 203]:

$$\begin{aligned}
&a_\nu^0 < a_\nu^1 < a_\nu^2 < a_\nu^3 \ldots, \quad a_\nu^n \to \infty \text{ καθώς } n \to \infty \\
&b_\nu^1 < b_\nu^2 < b_\nu^3 < b_\nu^4 \ldots, \quad b_\nu^n \to \infty \text{ καθώς } n \to \infty \\
&a_\nu^0 < b_\nu^1 < a_\nu^2 < b_\nu^3 \ldots \\
&a_\nu^1 < b_\nu^2 < a_\nu^3 < b_\nu^4 \ldots
\end{aligned}$$

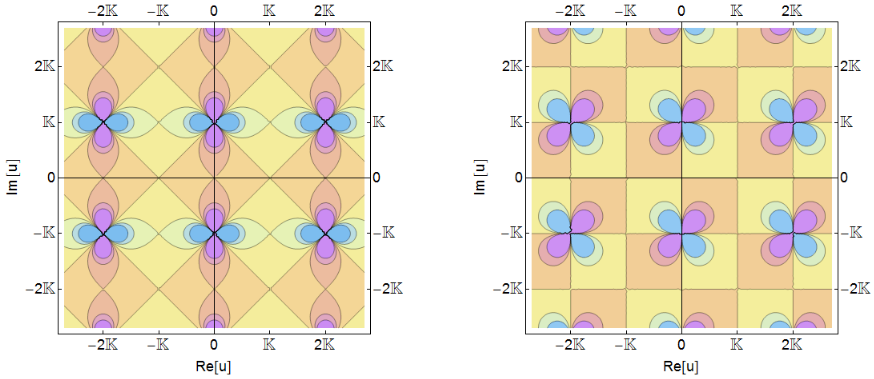
Τα διαστήματα σταθερότητας της εξίσωσης Lamé (Η΄.1) προκύπτουν από το *θεώρημα ταλάντωσης* [204]. Είναι τα εξής:

$$\left(a_\nu^0, a_\nu^1\right) \cup \left(b_\nu^1, b_\nu^2\right) \cup \left(a_\nu^2, a_\nu^3\right) \cup \left(b_\nu^3, b_\nu^4\right) \cup \ldots, \tag{Η΄.2}$$

όπου οι συστολές μεταξύ διαδοχικών ιδιοτιμών υποδηλώνουν ότι η σχετική διάταξη των δύο συστελλόμενων ιδιοτιμών δεν είναι γενικά γνωστή και μπορεί συνεπώς να αντιστραφεί, για δεδομένες τιμές των ν και k^2.

Για $\nu \in \mathbb{R}$, η έκφραση $\nu\left(\nu+1\right) \in \mathbb{R}$ είναι συμμετρική υπό την απεικόνιση $\nu \leftrightarrow -\nu-1$, έτσι ώστε χωρίς βλάβη της γενικότητας, να μπορούμε να θεωρούμε $\nu \geq -1/2$ και $\nu\left(\nu+1\right) \geq -1/4$. Αν επιπλέον $\nu \in \mathbb{N}$, τότε οι πρώτες $2\nu+1$ από τις συναρτήσεις Lamé είναι πολυώνυμα (γνωστά ως πολυώνυμα Lamé), ενώ οι εναπομείνασες υπερβατικές λύσεις της εξίσωσης Lamé *συνυπάρχουν*, δηλαδή:

$$a_\nu^n = b_\nu^n, \text{ για n, } \nu \in \mathbb{N} \text{ και } n \geq \nu+1. \tag{Η΄.3}$$



Σχήμα 33: Πραγματικό μέρος (αριστερά) και φανταστικό μέρος (δεξιά) του δυναμικού Lamé, $\mathrm{sn}^2\,(u|1/2)$.

Η πιο πάνω εικόνα συνοψίζεται στο ακόλουθο θεώρημα [204]:

■ **Θεώρημα 1.** *Η εξίσωση Lamé (Η′.1), εμφανίζει συνύπαρξη αν και μόνο αν $\nu \in \mathbb{Z}$. Έχει ακριβώς $\nu + 1$ αστάθειες αν $\nu \in \mathbb{N}$ και ακριβώς $|\nu|$ αστάθειες αν $\nu \in \mathbb{Z}^-$.*

Τα διαστήματα ευστάθειας για $\nu \in \mathbb{N}$, δίδονται από [183]:

$$(a^0_\nu\,,\,b^1_\nu)\ \cup\ (a^1_\nu\,,\,b^2_\nu)\ \cup\ (a^2_\nu\,,\,b^3_\nu)\ \cup\ \ldots\ \cup\ (a^{\nu-1}_\nu\,,\,b^\nu_\nu)\ \cup\ (a^\nu_\nu\,,\,+\infty)\quad,\quad \nu \in \mathbb{N}. \tag{Η′.4}$$

Τέλος, ας αναφέρουμε μερικά ακόμη πράγματα για τις συναρτήσεις Lamé που έχουν φανταστικές περιόδους. Παρατηρούμε πρώτα ότι η εξίσωση Lamé (Η′.1) έχει την ακόλουθη συμμετρία [173, 183, 203]:

$$\begin{aligned} u' &= i\left(u - \mathbb{K}\left(k^2\right) - i\,\mathbb{K}'\left(k^2\right)\right) \\ h' &= \nu\,(\nu+1) - h \quad,\quad k'^{\,2} = 1 - k^2, \end{aligned} \tag{Η′.5}$$

έτσι ώστε όταν η λύση της εξίσωσης Lamé $z\,(u)$ έχει πραγματική περίοδο ίση προς $2\,p\,\mathbb{K}$ (με $p = 1, 2$), τότε η συνάρτηση $z'\,(u') \equiv z\,(u)$ θα έχει φανταστική περίοδο ίση με $2\,i\,p\,\mathbb{K}$ και θα ικανοποιεί την ακόλουθη μετασχηματισμένη εξίσωση:

$$\frac{d^2 z}{du'^2} + \left[h' - \nu\,(\nu+1)\,k'^{\,2} sn^2\left(u'|k'^{\,2}\right)\right] z = 0. \tag{Η′.6}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η δυαδικότητα (Η′.5) ανταλλάσσει τις ζώνες ευστάθειας με χάσματα αστάθειας στην (Η′.2) [173].

Βιβλιογραφία

[1] G. Linardopoulos, *Large-Spin Expansions of Giant Magnons*, arXiv:1502.0163.

[2] E. Floratos and G. Linardopoulos, *Large-Spin and Large-Winding Expansions of Giant Magnons and Single Spikes*, arXiv:1406.0796.

[3] E. Floratos, G. Georgiou, and G. Linardopoulos, *Large-Spin Expansions of GKP Strings*, *JHEP* **03** (2014) 018, [arXiv:1311.5800].

[4] M. Axenides, E. Floratos, and G. Linardopoulos, *Stringy Membranes in AdS/CFT*, *JHEP* **08** (2013) 089, [arXiv:1306.0220].

[5] J. Polchinski, *Introduction to Gauge/Gravity Duality*, arXiv:1010.6134.

[6] J. M. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 231, [hep-th/9711200].

[7] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, *Gauge Theory Correlators from non-Critical String Theory*, *Phys.Lett.* **B428** (1998) 105, [hep-th/9802109].

[8] E. Witten, *Anti-de Sitter Space and Holography*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 253, [hep-th/9802150].

[9] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, *Large N Field Theories, String Theory and Gravity*, *Phys.Rep.* **323** (2000) 183, [hep-th/9905111].

[10] I. Bena, J. Polchinski, and R. Roiban, *Hidden Symmetries of the* $AdS_5 \times S^5$ *Superstring*, *Phys.Rev.* **D69** (2004) 046002, [hep-th/0305116].

[11] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, *A Semi-Classical Limit of the Gauge/String Correspondence*, *Nucl.Phys.* **B636** (2002) 99, [hep-th/0204051].

[12] G. Georgiou and G. Savvidy, *Large Spin Behavior of Anomalous Dimensions and Short-Long Strings Duality*, *J.Phys.* **A44** (2011) 305402, [arXiv:1012.5580].

[13] H. Dimov, S. Mladenov, and R. Rashkov, *Large J Expansion in ABJM Theory Revisited*, *Eur.Phys.J.* **C74** (2014) 3042, [arXiv:1402.3556].

[14] E. Kiritsis, *String Theory in a Nutshell.* Princeton University Press, 2007.

[15] E. D'Hoker and D. Z. Freedman, *Supersymmetric Gauge Theories and the AdS/CFT Correspondence*, hep-th/0201253.

[16] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal, and U. A. Wiedemann, *Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions*, arXiv:1101.0618.

[17] P. Di Vecchia, *An Introduction to AdS/CFT Correspondence*, *Fortsch.Phys.* **48** (2000) 87, [hep-th/9903007].

[18] L. Brink, J. H. Schwarz, and J. Scherk, *Supersymmetric Yang-Mills Theories*, *Nucl.Phys.* **B121** (1977) 77 • F. Gliozzi, J. Scherk, and D. I. Olive, *Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model*, *Nucl.Phys.* **B122** (1977) 253.

[19] S. Ferrara and B. Zumino, *Supergauge Invariant Yang-Mills Theories*, *Nucl.Phys.* **B79** (1974) 413.

[20] V. N. Velizhanin, *Vanishing of the Four-Loop Charge Renormalization Function in $\mathcal{N} = 4$ SYM Theory*, *Phys.Lett.* **B696** (2011) 560, [arXiv:1008.2198].

[21] M. F. Sohnius and P. C. West, *Conformal Invariance in $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, *Phys.Lett.* **B100** (1981) 245.

[22] S. Mandelstam, *Light Cone Superspace and the Ultraviolet Finiteness of the $\mathcal{N} = 4$ Model*, *Nucl.Phys.* **B213** (1983) 149 • L. Brink, O. Lindgren, and B. E. W. Nilsson, *The Ultraviolet Finiteness of the $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills Theory*, *Phys.Lett.* **B123** (1983) 323.

[23] P. S. Howe, K. S. Stelle, and P. K. Townsend, *The Relaxed Hypermultiplet: An Unconstrained $\mathcal{N} = 2$ Superfield Theory*, *Nucl.Phys.* **B214** (1983) 519 • P. S. Howe, K. S. Stelle, and P. C. West, *A Class of Finite Four-Dimensional Supersymmetric Field Theories*, *Phys.Lett.* **B124** (1983) 55 • P. S. Howe, K. S. Stelle, and P. K. Townsend, *Miraculous Ultraviolet Cancellations in Supersymmetry Made Manifest*, *Nucl.Phys.* **B236** (1984) 125.

[24] N. Seiberg, *Supersymmetry and Nonperturbative Beta Functions*, *Phys.Lett.* **B206** (1988) 75.

[25] Y. Nakayama, *A Lecture Note on Scale Invariance vs Conformal Invariance*, arXiv:1302.0884.

[26] M. F. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, *Phys.Rept.* **128** (1985) 39 • S. Kovacs, *$\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory and the AdS/SCFT Correspondence*, hep-th/9908171.

[27] R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, *Type IIB Superstring Action in $AdS_5 \times S^5$ Background*, *Nucl.Phys.* **B533** (1998) 109, [hep-th/9805028].

[28] G. Arutyunov and S. Frolov, *Foundations of the $AdS_5 \times S^5$ Superstring. Part I*, *J.Phys.* **A42** (2009) 254003, [arXiv:0901.4937].

[29] B. Sundborg, *Stringy Gravity, Interacting Tensionless Strings and Massless Higher Spins*, *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* **102** (2001) 113, [hep-th/0103247].

[30] R. R. Metsaev, *Type IIB Green-Schwarz Superstring in Plane Wave Ramond-Ramond Background*, *Nucl.Phys.* **B625** (2002) 70, [hep-th/0112044].

[31] G. T. Horowitz and A. R. Steif, *Spacetime Singularities in String Theory*, *Phys.Rev.Lett.* **64** (1990) 260.

[32] D. Berenstein, J. Maldacena, and H. Nastase, *Strings in Flat Space and pp Waves from $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mills*, *JHEP* **04** (2002) 013, [hep-th/0202021].

[33] A. Pankiewicz, *Strings in Plane Wave Backgrounds*, *Fortsch.Phys.* **51** (2003) 1139, [hep-th/0307027] • J. C. Plefka, *Lectures on the Plane-Wave String/Gauge Theory Duality*, *Fortsch.Phys.* **52** (2004) 264, [hep-th/0307101] • D. Sadri and M. M. Sheikh-Jabbari, *The Plane-Wave/Super Yang-Mills Duality*, *Rev.Mod.Phys.* **76** (2004) 853, [hep-th/0310119] • R. Russo and A. Tanzini, *The Duality between IIB String Theory on pp-Wave and $\mathcal{N} = 4$ SYM: A Status Report*, *Class.Quant.Grav.* **21** (2004) S1265, [hep-th/0401155].

[34] S. Frolov and A. A. Tseytlin, *Semiclassical Quantization of Rotating Superstring in $AdS_5 \times S^5$*, *JHEP* **06** (2002) 007, [hep-th/0204226].

[35] O. Aharony, O. Bergman, and D. L. Jafferis, *Fractional M2-Branes*, *JHEP* **11** (2008) 043, [arXiv:0807.4924] • O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis, and J. Maldacena, *$\mathcal{N} = 6$ Superconformal Chern-Simons-Matter Theories, M2-Branes and their Gravity Duals*, *JHEP* **10** (2008) 091, [arXiv:0806.1218].

[36] J. Bagger and N. Lambert, *Modeling Multiple M2's*, *Phys.Rev.* **D75** (2007) 045020, [hep-th/0611108] • A. Gustavsson, *Algebraic Structures on Parallel M2-Branes*, *Nucl.Phys.* **B811** (2009) 66, [arXiv:0709.1260].

[37] N. Beisert, B. Eden, and M. Staudacher, *Transcedentality and Crossing*, *J.Stat.Mech.* **0701** (2007) P01021, [hep-th/0610251].

[38] N. Berkovits and J. Maldacena, *Fermionic T-Duality, Dual Superconformal Symmetry, and the Amplitude/Wilson Loop Connection*, *JHEP* **0809** (2008) **062**, [arXiv:0807.3196] • N. Beisert, R. Ricci, A. A. Tseytlin, and M. Wolf, *Dual Superconformal Symmetry from* $AdS_5 \times S^5$ *Superstring Integrability*, *Phys.Rev.* **D78** (2008) 126004, [arXiv:0807.3228].

[39] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal, *Conformal field theory.* Springer, 1997.

[40] K. Pohlmeyer, *Integrable Hamiltonian Systems and Interactions Through Quadratic Constraints*, *Commun.Math.Phys.* **46** (1976) 207.

[41] A. Mikhailov, *A Nonlocal Poisson Bracket of the Sine-Gordon Model*, *J.Geom.Phys.* **61** (2011) 85, [hep-th/0511069].

[42] B. M. Barbashov and V. V. Nesterenko, *Relativistic String Model in a Space-Time of a Constant Curvature*, *Commun.Math.Phys.* **78** (1981) 499 • H. J. de Vega and N. Sanchez, *Exact Integrability of Strings in D-Dimensional de Sitter Spacetime*, *Phys.Rev.* **D47** (1993) 3394.

[43] A. L. Larsen and N. Sánchez, *Sinh-Gordon, Cosh-Gordon and Liouville Equations for Strings and Multi-Strings in Constant Curvature Spacetimes*, *Phys.Rev.* **D54** (1996) 2801, [hep-th/9603049].

[44] I. Bakas, *Conservation Laws and Geometry of Perturbed Coset Models*, *Int.J.Mod.Phys.* **A9** (1994) 3443, [hep-th/9310122].

[45] M. Grigoriev and A. A. Tseytlin, *Pohlmeyer Reduction of* $AdS_5 \times S^5$ *Superstring Sigma Model*, *Nucl.Phys.* **B800** (2008) 450, [arXiv:0711.0155].

[46] A. Mikhailov and S. Schäfer-Nameki, *Sine-Gordon-like Action for the Superstring in* $AdS_5 \times S^5$, *JHEP* **05** (2008) 075, [arXiv:0711.0195].

[47] G. Arutyunov, S. Frolov, J. Russo, and A. A. Tseytlin, *Spinning Strings in* $AdS_5 \times S^5$ *and Integrable Systems*, *Nucl.Phys.* **B671** (2003) 3, [hep-th/0307191].

[48] G. Arutyunov, J. Russo, and A. A. Tseytlin, *Spinning Strings in* $AdS_5 \times S^5$*: New Integrable System Relations*, *Phys.Rev.* **D69** (2004) 086009, [hep-th/0311004].

[49] M. Kruczenski, J. Russo, and A. A. Tseytlin, *Spiky Strings and Giant Magnons on* S^5, *JHEP* **10** (2006) 002, [hep-th/0607044].

[50] D. M. Hofman and J. Maldacena, *Giant Magnons*, *J.Phys.* **A39** (2006) 13095, [hep-th/0604135].

[51] H. J. de Vega, A. L. Larsen, and N. Sánchez, *Semi-Classical Quantization of Circular Strings in de Sitter and anti de Sitter Spacetimes*, *Phys.Rev.* **D51** (1995) 6917, [hep-th/9410219].

[52] J. A. Minahan, *Circular Semiclassical String Solutions on* $AdS_5 \times S^5$, *Nucl.Phys.* **B648** (2003) 203, [hep-th/0209047].

[53] M. Beccaria, G. V. Dunne, G. Macorini, A. Tirziu, and A. A. Tseytlin, *Exact Computation of One-Loop Correction to Energy of Pulsating Strings in $AdS_5 \times S^5$*, *J.Phys.* **A44** (2011) 015404, [arXiv:1009.2318].

[54] A. Tirziu and A. A. Tseytlin, *Quantum Corrections to Energy of Short Spinning String in AdS_5*, *Phys.Rev.* **D78** (2008) 066002, [arXiv:0806.4758].

[55] B. Basso, *An Exact Slope for AdS/CFT*, arXiv:1109.3154.

[56] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products.* Academic Press, 2007.

[57] M. Abramowitz and I. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions.* Dover, New York, 1972.

[58] C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers.* Springer-Verlag, New York, 1999.

[59] M. Axenides, E. Floratos, and A. Kehagias, *Scaling Violations in Yang-Mills Theories and Strings in AdS_5*, *Nucl.Phys.* **B662** (2003) 170, [hep-th/0210091].

[60] H. Georgi and H. D. Politzer, *Electroproduction Scaling in an Asymptotically Free Theory of Strong Interactions*, *Phys.Rev.* **D9** (1974) 416 • D. J. Gross and F. Wilczek, *Asymptotically free gauge theories. II*, *Phys.Rev.* **D9** (1974) 980.

[61] E. G. Floratos, D. A. Ross, and C. T. Sachrajda, *Higher-Order Effects in Asymptotically Free Gauge Theories: The Anomalous Dimensions of Wilson Operators*, *Nucl.Phys.* ***B129** (1977) 66, Erratum-ibid.* ***B139** (1978) 545* • E. G. Floratos, D. A. Ross, and C. T. Sachrajda, *Higher-Order Effects in Asymptotically Free Gauge Theories (II). Flavor Singlet Wilson Operators and Coefficient Functions*, *Nucl.Phys.* **B152** (1979) 493 • G. Curci, W. Furmanski, and R. Petronzio, *Evolution of Parton Densities Beyond Leading Order: The Nonsinglet Case*, *Nucl.Phys.* **B175** (1980) 27 • E. G. Floratos, C. Kounnas, and R. Lacaze, *Higher Order QCD Effects in Inclusive Annihilation and Deep Inelastic Scattering*, *Nucl.Phys.* **B192** (1981) 417.

[62] S. Moch, J. A. M. Vermaseren, and A. Vogt, *The Three-Loop Splitting Functions in QCD: The Non-Singlet Case*, *Nucl.Phys.* **B688** (2004) 101, [hep-ph/0403192] • A. Vogt, S. Moch, and J. A. M. Vermaseren, *The Three-Loop Splitting Functions in QCD: The Singlet Case*, *Nucl.Phys.* **B691** (2004) 129, [hep-ph/0404111].

[63] A. V. Kotikov and L. N. Lipatov, *DGLAP and BFKL Evolution Equations in the $N = 4$ Supersymmetric Gauge Theory*, hep-ph/0112346.

[64] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, and V. N. Velizhanin, *Anomalous dimensions of Wilson operators in N=4 SYM theory*, *Phys.Lett.* **B557** (2003) 114, [hep-ph/0301021].

[65] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. I. Onishchenko, and V. N. Velizhanin, *Three-Loop Universal Anomalous Dimension of the Wilson Operators in $\mathcal{N} = 4$ SUSY Yang-Mills Model*, *Phys.Lett.* ***B595** (2004) 521, Erratum-ibid.* ***B632** (2006) 754* [hep-th/0404092].

[66] B. Eden and M. Staudacher, *Integrability and Transcedentality*, *J.Stat.Mech.* **0611** (2006) P11014, [hep-th/0603157].

[67] B. Basso, G. P. Korchemsky, and J. Kotański, *Cusp Anomalous Dimension in Maximally Supersymmetric Yang-Mills Theory at Strong Coupling*, *Phys.Rev.Lett.* **100** (2008) 091601, [arXiv:0708.3933].

[68] I. Kostov, D. Serban, and D. Volin, *Functional BES Equation*, *JHEP* **08** (2008) 101, [arXiv:0801.2542].

[69] R. Roiban, A. Tirziu, and A. A. Tseytlin, *Two-Loop World-Sheet Corrections in $AdS_5 \times S^5$ Superstring*, *JHEP* **07** (2007) 056, [arXiv:0704.3638].

[70] R. Roiban and A. A. Tseytlin, *Strong-Coupling Expansion of Cusp Anomaly from Quantum Superstring*, *JHEP* **11** (2007) 016, [arXiv:0709.0681].

[71] M. Beccaria, V. Forini, A. Tirziu, and A. A. Tseytlin, *Structure of Large Spin Expansion of Anomalous Dimensions at Strong Coupling*, *Nucl.Phys.* **B812** (2009) 144, [arXiv:0809.5234].

[72] A. V. Kotikov, A. Rej, and S. Zieme, *Analytic Three-Loop Solutions for $\mathcal{N} = 4$ SYM Twist Operators*, *Nucl.Phys.* **B813** (2009) 460, [arXiv:0810.0691].

[73] M. Beccaria, A. V. Belitsky, A. V. Kotikov, and S. Zieme, *Analytic Solution of the Multiloop Baxter Equation*, *Nucl.Phys.* **B827** (2010) 565, [arXiv:0908.0520].

[74] Z. Bajnok, R. A. Janik, and T. Łukowski, *Four Loop Twist Two, BFKL, Wrapping and Strings*, *Nucl.Phys.* **B816** (2009) 376, [arXiv:0811.4448].

[75] T. Łukowski, A. Rej, and V. N. Velizhanin, *Five-Loop Anomalous Dimension of Twist-Two Operators*, *Nucl.Phys.* **B831** (2010) 105, [arXiv:0912.1624].

[76] D. Bombardelli, D. Fioravanti, and R. Tateo, *Thermodynamic Bethe Ansatz for Planar AdS/CFT: a Proposal*, *J.Phys.* **A42** (2009) 375401, [arXiv:0902.3930].

[77] M. Beccaria, G. V. Dunne, V. Forini, M. Pawellek, and A. A. Tseytlin, *Exact Computation of One-Loop Correction to Energy of Spinning Folded String in $AdS_5 \times S^5$*, *J.Phys.* **A43** (2010) 165402, [arXiv:1001.4018].

[78] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1958.

[79] J.-L. Lagrange, *Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries*, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin* **24** (1770) 251 • H. H. Bürmann, *Essai de calcul fonctionnaire aux constantes ad libitum*, *Mem.Inst.Nat.Sci. Arts. Sci. Math. Phys.* **2** (1799) 13.

[80] M. Beccaria, V. Forini, and G. Macorini, *Generalized Gribov-Lipatov Reciprocity and AdS/CFT*, *Adv.High Energy Phys.* **2010** (2010) 753248, [arXiv:1002.2363].

[81] B. Basso and G. P. Korchemsky, *Anomalous Dimensions of High-Spin Operators Beyond the Leading Order*, *Nucl.Phys.* **B775** (2007) 1, [hep-th/0612247].

[82] V. N. Gribov and L. N. Lipatov, *e^+e^- Pair Annihilation and Deep Inelastic e p Scattering in Perturbation Theory*, *Sov.J.Nucl.Phys., **15** (1972) 675, Yad.Fiz., **15** (1972) 1218.*

[83] Y. L. Dokshitzer, G. Marchesini, and G. P. Salam, *Revisiting Parton Evolution and the Large-x Limit*, *Phys.Lett.* **B634** (2006) 504, [hep-ph/0511302].

[84] Y. L. Dokshitzer and G. Marchesini, *$\mathcal{N} = 4$ SUSY Yang-Mills: Three Loops made Simple(r)*, *Phys.Lett.* **B646** (2007) 189, [hep-th/0612248].

[85] M. Beccaria and V. Forini, *Reciprocity of Gauge Operators in $\mathcal{N} = 4$ SYM*, *JHEP* **06** (2008) 077, [arXiv:0803.3768] • V. Forini and M. Beccaria, *QCD-Like Properties for Anomalous Dimensions in $\mathcal{N} = 4$ SYM*, *Theor.Math.Phys.* **159** (2009) 712, [arXiv:0810.0101] • M. Beccaria, Y. L. Dokshitzer, and G. Marchesini, *Twist 3 of the $\mathfrak{sl}(2)$ Sector of $\mathcal{N} = 4$ SYM and Reciprocity Respecting Evolution*, *Phys.Lett.* **B652** (2007) 194, [arXiv:0705.2639].

[86] M. Beccaria and G. Macorini, *QCD Properties of Twist Operators in the $\mathcal{N} = 6$ Chern-Simons Theory*, *JHEP* **06** (2009) 008, [arXiv:0904.2463].

[87] N. Beisert, *The $\mathfrak{su}(2|2)$ Dynamic S-Matrix*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **12** (2008) 945, [hep-th/0511082].

[88] R. Ishizeki and M. Kruczenski, *Single Spike Solutions for Strings on S^2 and S^3*, *Phys.Rev.* **D76** (2007) 126006, [arXiv:0705.2429].

[89] A. Mosaffa and B. Safarzadeh, *Dual Spikes: New Spiky String Solutions*, *JHEP* **08** (2007) 017, [arXiv:0705.3131].

[90] H. Hayashi, K. Okamura, R. Suzuki, and B. Vicedo, *Large Winding Sector of AdS/CFT*, *JHEP* **11** (2007) 033, [arXiv:0709.4033].

[91] K. Zarembo, *Antiferromagnetic Operators in $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, *Phys.Lett.* **B634** (2006) 552, [hep-th/0512079].

[92] R. Roiban, A. Tirziu, and A. A. Tseytlin, *Slow-String Limit and 'Antiferromagnetic' State in AdS/CFT*, *Phys.Rev.* **D73** (2006) 066003, [hep-th/0601074].

[93] K. Okamura, *Giant Spinons*, *JHEP* **04** (2010) 033, [arXiv:0911.1528].

[94] M. C. Abbott and I. V. Aniceto, *Vibrating Giant Spikes and the Large-Winding Sector*, *JHEP* **06** (2008) 088, [arXiv:0803.4222].

[95] R. Ishizeki, M. Kruczenski, M. Spradlin, and A. Volovich, *Scattering of Single Spikes*, *JHEP* **02** (2008) 009, [arXiv:0710.2300].

[96] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons. An Introduction To Solitons and Instantons in Quantum Field Theory.* Elsevier, 1987.

[97] R. Jackiw and G. Woo, *Semiclassical Scattering of Quantized Nonlinear Waves*, *Phys.Rev.* **D12** (1975) 1643.

[98] G. Arutyunov, S. Frolov, and M. Staudacher, *Bethe Ansatz for Quantum Strings*, *JHEP* **10** (2004) 016, [hep-th/0406256].

[99] M. Spradlin and A. Volovich, *Dressing the Giant Magnon*, *JHEP* **10** (2006) 012, [hep-th/0607009].

[100] G. Kälbermann, *The Sine-Gordon Wobble*, *J.Phys.* **A37** (2004) 11603, [cond-mat/0408198].

[101] L. A. Ferreira, B. Piette, and W. J. Zakrzewski, *Wobbles and other Kink-Breather Solutions of the Sine-Gordon Model*, *Phys.Rev.* **E77** (2008) 036613, [arXiv:0708.1088].

[102] G. Arutyunov, S. Frolov, and M. Zamaklar, *Finite-Size Effects from Giant Magnons*, *Nucl.Phys.* **B778** (2007) 1, [hep-th/0606126].

[103] K. Okamura and R. Suzuki, *A Perspective on Classical Strings from Complex Sine-Gordon Solitons*, *Phys.Rev.* **D75** (2007) 046001, [hep-th/0609026].

[104] T. Klose and T. McLoughlin, *Interacting Finite-Size Magnons*, *J.Phys.* **A41** (2008) 285401, [arXiv:0803.2324].

[105] C. K. R. T. Jones, R. Marangell, P. D. Miller, and R. G. Plaza, *On the Stability Analysis of Periodic sine-Gordon Traveling Waves*, *Physica D Nonlinear Phenomena* **251** (2013) 63, [arXiv:1210.0659].

[106] D. Astolfi, V. Forini, G. Grignani, and G. W. Semenoff, *Gauge Invariant Finite Size Spectrum of the Giant Magnon*, *Phys.Lett.* **B651** (2007) 329, [hep-th/0702043].

[107] J. A. Minahan and O. Ohlsson Sax, *Finite Size Effects for Giant Magnons on Physical Strings*, *Nucl.Phys.* **B801** (2008) 97, [arXiv:0801.2064].

[108] M. Lüscher, *Volume Dependence of the Energy Spectrum in Massive Quantum Field Theories. 1. Stable Particle States*, *Commun.Math.Phys.* **104** (1986) 177 • T. R. Klassen and E. Melzer, *On the Relation Between Scattering Amplitudes and Finite-Size Mass Corrections in QFT*, *Nucl.Phys.* **B362** (1991) 329.

[109] R. A. Janik and T. Łukowski, *Wrapping Interactions at Strong Coupling – the Giant Magnon*, *Phys.Rev.* **D76** (2007) 126008, [arXiv:0708.2208].

[110] M. P. Heller, R. A. Janik, and T. Łukowski, *A New Derivation of Lüscher F-term and Fluctuations Around the Giant Magnon*, *JHEP* **06** (2008) 036, [arXiv:0801.4463].

[111] N. Gromov, S. Schäfer-Nameki, and P. Vieira, *Quantum Wrapped Giant Magnon*, *Phys.Rev.* **D78** (2008) 026006, [arXiv:0801.3671].

[112] G. Papathanasiou and M. Spradlin, *Semiclassical Quantization of the Giant Magnon*, *JHEP* **06** (2007) 032, [arXiv:0704.2389] • H.-Y. Chen, N. Dorey, and R. F. Lima Matos, *Quantum Scattering of Giant Magnons*, *JHEP* **09** (2007) 106, [arXiv:0707.0668].

[113] N. Gromov, S. Schafer-Nameki, and P. Vieira, *Efficient Precision Quantization in AdS/CFT*, *JHEP* **12** (2008) 013, [arXiv:0807.4752].

[114] C. Ahn and P. Bozhilov, *Finite-Size Effects for Single Spike*, *JHEP* **07** (2008) 105, [arXiv:0806.1085].

[115] T. Fukushima, *Numerical Computation of Inverse Complete Elliptic Integrals of First and Second Kinds*, *J.Comput.Appl.Math.* **249** (2013) 37.

[116] C. Csáki and M. Reece, *Toward a Systematic Holographic QCD: A Braneless Approach*, *JHEP* **05** (2007) 062, [hep-ph/0608266].

[117] C.-S. Chu, G. Georgiou, and V. V. Khoze, *Magnons, Classical Strings and β-Deformations*, *JHEP* **11** (2006) 093, [hep-th/0606220] • N. P. Bobev and R. C. Rashkov, *Multispin Giant Magnons*, *Phys.Rev.* **D74** (2006) 046011, [hep-th/0607018].

[118] D. V. Bykov and S. Frolov, *Giant Magnons in TsT-Transformed $AdS_5 \times S^5$*, *JHEP* **07** (2008) 071, [arXiv:0805.1070].

[119] H.-Y. Chen, N. Dorey, and K. Okamura, *Dyonic Giant Magnons*, *JHEP* **09** (2006) 024, [hep-th/0605155] • Y. Hatsuda and R. Suzuki, *Finite-Size Effects for Dyonic Giant Magnons*, *Nucl.Phys.* **B800** (2008) 349, [arXiv:0801.0747].

[120] D. Gaiotto, S. Giombi, and X. Yin, *Spin Chains in $\mathcal{N} = 6$ Superconformal Chern-Simons-Matter Theory*, *JHEP* **04** (2009) 066, [arXiv:0806.4589] • G. Grignani, T. Harmark, and M. Orselli, *The $SU(2) \times SU(2)$ Sector in the String Dual of $\mathcal{N} = 6$ Superconformal Chern-Simons Theory*, *Nucl.Phys.* **B810** (2009) 115, [arXiv:0806.4959].

[121] M. Kruczenski, *Spiky Strings and Single Trace Operators in Gauge Theories*, *JHEP* **08** (2005) 014, [hep-th/0410226].

[122] M. Axenides and E. Floratos, *Euler Top Dynamics of Nambu-Goto p-Branes*, *JHEP* **03** (2007) 093, [hep-th/0608017].

[123] P. Bozhilov and R. Rashkov, *Magnon-like Dispersion Relation from M-Theory*, *Nucl.Phys.* **B768** (2007) 193–208, [hep-th/0607116].

[124] C. Ahn and P. Bozhilov, *Finite-Size Effects of Membranes on $AdS_4 \times S_7$*, *JHEP* **08** (2008) 054, [arXiv:0807.0566].

[125] P. A. M. Dirac, *An Extensible Model of the Electron*, *Proc.Roy.Soc.Lond.* **A268** (1962) 57.

[126] P. A. Collins and R. W. Tucker, *Classical and Quantum Mechanics of Free Relativistic Membranes*, *Nucl.Phys.* **B112** (1976) 150.

[127] J. Hoppe, *Curved Space (Matrix) Membranes*, *Gen.Rel.Grav.* **43** (2011) 2523, [arXiv:0912.4717].

[128] P. S. Howe and R. W. Tucker, *A Locally Supersymmetric and Reparametrization Invariant Action for a Spinning Membrane*, *J.Phys.* **A10** (1977) L155.

[129] M. J. Duff, R. R. Khuri, and J. X. Lu, *String Solitons*, *Phys.Rept.* **259** (1995) 213, [hep-th/9412184].

[130] J. Hoppe, *Quantum Theory of a Massless Relativistic Surface and a Two-Dimensional Bound State Problem.* PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1982.

[131] G. K. Savvidy, *The Light-Cone Gauge in the Theory of Relativistic Surfaces*, *Yerevan Physics Institute Preprint 982 (22) 87* (1987).

[132] M. J. Duff, *Supermembranes*, hep-th/9611203.

[133] E. Bergshoeff, E. Sezgin, Y. Tanii, and P. K. Townsend, *Super p-Branes as Gauge Theories of Volume Preserving Diffeomorphisms*, *Annals Phys.* **199** (1990) 340.

[134] M. Axenides and E. Floratos, *Nambu-Lie 3-Algebras on Fuzzy 3-Manifolds*, *JHEP* **02** (2009) 039, [arXiv:0809.3493].

[135] E. Bergshoeff, E. Sezgin, and P. K. Townsend, *Supermembranes and Eleven-Dimensional Supergravity*, *Phys.Lett.* **B189** (1987) 75.

[136] E. Bergshoeff, E. Sezgin, and P. K. Townsend, *Properties of the Eleven-Dimensional Supermembrane Theory*, *Ann.Phys.* **185** (1988) 330.

[137] E. Cremmer and S. Ferrara, *Formulation of Eleven-Dimensional Supergravity in Superspace*, *Phys.Lett.* **B91** (1980) 61 • L. Brink and P. S. Howe, *Eleven-Dimensional Supergravity on the Mass-Shell in Superspace*, *Phys.Lett.* **B91** (1980) 384.

[138] G. Dall'Agata, D. Fabbri, C. Fraser, P. Fré, P. Termonia, and M. Trigiante, *The Osp*$(8|4)$ *singleton action from the supermembrane*, *Nucl.Phys.* **B542** (1999) 157, [hep-th/9807115] • B. de Wit, K. Peeters, J. Plefka, and A. Sevrin, *The M-Theory Two-Brane in* $AdS_4 \times S^7$ *and* $AdS_7 \times S^4$, *Phys.Lett.* **B443** (1998) 153, [hep-th/9808052] • P. Claus, *Super M-brane Actions in* $AdS_4 \times S^7$ *and* $AdS_7 \times S^4$, *Phys.Rev.* **D59** (1999) 066003, [hep-th/9809045] • P. Pasti, D. Sorokin, and M. Tonin, *On Gauge-Fixed Superbrane Actions in AdS Superbackgrounds*, *Phys.Lett.* **B447** (1999) 251, [hep-th/9809213].

[139] E. Cremmer, B. Julia, and J. Scherk, *Supergravity Theory in Eleven-Dimensions*, *Phys.Lett.* **B76** (1978) 409.

[140] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology.* Cambridge University Press, 1987 • D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, *Supergravity.* Cambridge University Press, 2012.

[141] B. de Wit, J. Hoppe, and H. Nicolai, *On the Quantum Mechanics of Supermembranes*, *Nucl.Phys.* **B305** (1988) 545.

[142] D. B. Fairlie, P. Fletcher, and C. K. Zachos, *Trigonometric Structure Constants for New Infinite Algebras*, *Phys.Lett.* **B218** (1989) 203 • E. G. Floratos, *The Heisenberg-Weyl Group on the* $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ *Discretized Torus Membrane*, *Phys.Lett.* **B228** (1989) 335 • D. B. Fairlie and C. K. Zachos, *Infinite Dimensional Algebras, Sine Brackets and SU(Infinity)*, *Phys.Lett.* **B224** (1989) 101.

[143] B. de Wit, M. Lüscher, and H. Nicolai, *The Supermembrane is Unstable*, *Nucl.Phys.* **B320** (1989) 135.

[144] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker, and L. Susskind, *M Theory as a Matrix Model: A Conjecture*, *Phys.Rev.* **D55** (1997) 5112, [hep-th/9610043].

[145] L. Susskind, *Another Conjecture about M(atrix) Theory*, hep-th/9704080 • N. Seiberg, *Why is the Matrix Model Correct?*, *Phys.Rev.Lett.* **79** (1997) 3577, [hep-th/9710009] • A. Sen, *D0-branes on* T^n *and Matrix Theory*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 51, [hep-th/9709220].

[146] O. Aharony, M. Berkooz, S. Kachru, N. Seiberg, and E. Silverstein, *Matrix Description of Interacting Theories in Six Dimensions*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **1** (1998) 148, [hep-th/9707079] • O. Aharony, M. Berkooz, and N. Seiberg, *Light-Cone Description of* $(2,0)$ *Superconformal Theories in Six Dimensions*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **2** (1998) 119, [hep-th/9712117].

[147] W. Taylor and M. Van Raamsdonk, *Multiple D0-Branes in Weakly Curved Backgrounds*, *Nucl.Phys.* **B558** (1999) 63, [hep-th/9904095].

[148] K. Dasgupta, M. M. Sheikh-Jabbari, and M. Van Raamsdonk, *Matrix Perturbation Theory for M-Theory on a pp-Wave*, *JHEP* **05** (2002) 56, [hep-th/0205185].

[149] G. Mandal, N. V. Suryanarayana, and S. R. Wadia, *Aspects of Semiclassical Strings in* AdS_5, *Phys.Lett.* **B543** (2002) 81, [hep-th/0206103].

[150] P. Bozhilov, *Neumann and Neumann-Rosochatius Integrable Systems from Membranes on* $AdS_4 \times S^7$, *JHEP* **08** (2007) 073, [arXiv:0704.3082].

[151] M. J. Duff, P. S. Howe, T. Inami, and K. S. Stelle, *Superstrings in* $D = 10$ *from Supermembranes in* $D = 11$, *Phys.Lett.* **B191** (1987) 70.

[152] E. Bergshoeff, M. J. Duff, C. N. Pope, and E. Sezgin, *Supersymmetric Supermembrane Vacua and Singletons*, *Phys.Lett.* **B199** (1987) 69 • E. Bergshoeff, M. J. Duff, C. N. Pope, and E. Sezgin, *Compactifications of the Eleven-Dimensional Supermembrane*, *Phys.Lett.* **B224** (1989) 71.

[153] G. Arutyunov and S. Frolov, *Superstrings on* $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ *as a Coset Sigma-Model*, *JHEP* **09** (2008) 129, [arXiv:0806.4940] • J. Gomis, D. Sorokin, and L. Wulff, *The Complete* $AdS_4 \times CP^3$ *Superspace for the Type IIA Superstring and D-Branes*, *JHEP* **03** (2009) 015, [arXiv:0811.1566] • D. V. Uvarov, $AdS_4 \times \mathbb{CP}^3$ *Superstring in the Light-Cone Gauge*, *Nucl.Phys.* **B826** (2010) 294, [arXiv:0906.4699].

[154] S. Frolov and A. A. Tseytlin, *Multi-Spin String Solutions in* $AdS_5 \times S^5$, *Nucl.Phys.* **B668** (2003) 77, [hep-th/0304255].

[155] S. Frolov and A. A. Tseytlin, *Quantizing Three-Spin String Solution in* $AdS_5 \times S^5$, *JHEP* **07** (2003) 016, [hep-th/0306130].

[156] A. Tirziu and A. A. Tseytlin, *Semiclassical Rigid Strings with Two Spins in* AdS_5, *Phys.Rev.* **D81** (2010) 026006, [arXiv:0911.2417].

[157] A. Khan and A. L. Larsen, *Improved Stability for Pulsating Multi-Spin String Solitons*, *Int.J.Mod.Phys.* **A21** (2006) 133, [hep-th/0502063].

[158] B. Stefański Jr., *Open Spinning Strings*, *JHEP* **03** (2004) 057, [hep-th/0312091].

[159] J. Maldacena and H. Ooguri, *Strings in* AdS_3 *and the* $SL(2,\mathbb{R})$ *WZW Model. Part 1: The Spectrum*, *J.Math.Phys.* **42** (2001) 2929, [hep-th/0001053] • C. Bachas, M. R. Douglas, and C. Schweigert, *Flux Stabilization of D-branes*, *JHEP* **05** (2000) 048, [hep-th/0003037].

[160] S. Frolov and A. A. Tseytlin, *Rotating String Solutions: AdS/CFT Duality in Non-Supersymmetric Sectors*, *Phys.Lett.* **B570** (2003) 96, [hep-th/0306143] • N. Beisert, J. A. Minahan, M. Staudacher, and K. Zarembo, *Stringing Spins and Spinning Strings*, *JHEP* **09** (2003) 010, [hep-th/0306139].

[161] S. Frolov, A. Tirziu, and A. A. Tseytlin, *Logarithmic Corrections to Higher Twist Scaling at Strong Coupling from AdS/CFT*, *Nucl.Phys.* **B766** (2007) 232, [hep-th/0611269].

[162] C. O. Lousto, *The Energy Spectrum of the Membrane Effective Model for Quantum Black Holes*, *Phys.Lett.* **B352** (1995) 228 • A. L. Larsen and C. O. Lousto, *On the Stability of Spherical Membranes in Curved Spacetimes*, *Nucl.Phys.* **B472** (1996) 361, [gr-qc/9602009] • A. L. Larsen and C. O. Lousto, *Are Higher Order Membranes Stable in Black Hole Spacetimes?*, *Phys.Rev.* **D55** (1997) 7936, [gr-qc/9610051] • T. Harmark and K. G. Savvidy, *Ramond-Ramond Field Radiation from Rotating Ellipsoidal Membranes*, *Nucl.Phys.* **B585** (2000) 567, [hep-th/0002157] • K. G. Savvidy and G. K. Savvidy, *Stability of the Rotating Ellipsoidal D0-Brane System*, *Phys.Lett.* **B501** (2001) 283, [hep-th/0009029] • M. Axenides, E. G. Floratos, and L. Perivolaropoulos, *Metastability of Spherical Membranes in Supermembrane and Matrix Theory*, *JHEP* **11** (2000) 020, [hep-th/0007198] • M. Axenides, E. G. Floratos, and L. Perivolaropoulos, *Quadrupole Instabilities of Relativistic Rotating Membranes*, *Phys.Rev.* **D64** (2001) 107901, [hep-th/0105292] • G. K. Savvidy, *D0-Branes with Non-Zero Angular Momentum*, hep-th/0108233 • M. Axenides, E. G. Floratos, and L. Perivolaropoulos, *Rotating Toroidal Branes in Supermembrane and Matrix Theory*, *Phys.Rev.* **D66** (2002) 085006, [hep-th/0206116].

[163] M. G. Lamé, *Memoire sur les surfaces isothermes dans les corps homogènes en équilibre de température*, *Journal de mathématiques pures et appliquées* **2** (1837) 147.

[164] A. V. Turbiner, *Quasi-Exactly-Solvable Problems and* $sl(2)$ *Algebra*, *Commun.Math.Phys.* **118** (1988) 467 • A. G. Ushveridze, *Quasi-Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics.* Taylor & Francis Group, New York, 1994.

[165] Y. Alhassid, F. Gürsey, and F. Iachello, *Potential Scattering, Transfer Matrix, and Group Theory*, *Phys.Rev.Lett.* **50** (1983) 873.

[166] H. Li and D. Kusnezov, *Group Theory Approach to Band Structure: Scarf and Lamé Hamiltonians*, *Phys.Rev.Lett.* **83** (1999) 1283, [cond-mat/9907202] • H. Li, D. Kusnezov, and F. Iachello, *Group Theoretical Properties and Band Structure of the Lamé Hamiltonian*, *J.Phys.* **A33** (2000) 6413, [solv-int/9912006] • F. Finkel, A. González-López, and M. A. Rodríguez, *A New Algebraization of the Lamé Equation*, *J.Phys.* **A33** (2000) 1519, [math-ph/9908002] • R. S. Maier, *Lamé Polynomials, Hyperelliptic Reductions and Lamé Band Structure*, *Philos.Trans.Roy.Soc.London* **A366** (2008) 1115, [math-ph/0309005].

[167] B. Sutherland, *Some Exact Results for One-Dimensional Models of Solids*, *Phys.Rev.* **A8** (1973) 2514.

[168] L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky, *Reheating after Inflation*, *Phys.Rev.Lett.* **73** (1994) 3195, [hep-th/9405187] • D. Boyanovsky, H. J. de Vega, R. Holman, and J. F. J. Salgado, *Analytic and Numerical Study of Preheating Dynamics*, *Phys.Rev.* **D54** (1996) 7570, [hep-ph/9608205] • P. B. Greene, L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky, *Structure of Resonance in Preheating after Inflation*, *Phys.Rev.* **D56** (1997) 6175, [hep-ph/9705347].

[169] N. S. Manton and T. M. Samols, *Sphalerons on a Circle*, *Phys.Lett.* **B207** (1988) 179 • J.-Q. Liang, H. J. W. Müller-Kirsten, and D. H. Tchrakian, *Solitons, Bounces and Sphalerons on a Circle*, *Phys.Lett.* **B282** (1992) 105 • Y. Brihaye, S. Giller, P. Kosinski, and J. Kunz, *Sphalerons and Normal Modes in the (1 + 1)-Dimensional Abelian Higgs Model on the Circle*, *Phys.Lett.* **B293** (1992) 383 • S. Braibant and Y. Brihaye, *Quasi-Exactly-Solvable System and Sphaleron Stability*, *J.Math.Phys.* **34** (1993) 2107.

[170] R. S. Ward, *The Nahm Equations, Finite-Gap Potentials and Lamé Functions*, *J.Phys.* **A28** (1987) 2679 • P. M. Sutcliffe, *Symmetric Monopoles and Finite-Gap Lamé Potentials*, *J.Phys.* **A29** (1996) 5187.

[171] G. Dunne and J. Feinberg, *Self-Isospectral Periodic Potentials and Supersymmetric Quantum Mechanics*, *Phys.Rev.* **D57** (1998) 1271, [hep-th/9706012] • G. Dunne and J. Mannix, *Supersymmetry Breaking with Periodic Potentials*, *Phys.Lett.* **B428** (1998) 115, [hep-th/9710115] • A. Khare and U. Sukhatme, *New Solvable and Quasi Exactly Solvable Periodic Potentials*, *J.Math.Phys.* **40** (1999) 5473, [quant-ph/9906044] • F. Correa and M. S. Plyushchay, *Peculiarities of the Hidden Nonlinear Supersymmetry of Pöschl-Teller System in the Light of Lamé Equation*, *J.Phys.* **A40** (2007) 14403, [arXiv:0706.1114].

[172] E. G. Floratos and S. Nicolis, *An SU(2) Analog of the Azbel-Hofstadter Hamiltonian*, *J.Phys.* **A31** (1998) 3961, [hep-th/9508111] • I. Bakas, A. Brandhuber, and K. Sfetsos, *Domain Walls of Gauged Supergravity, M-branes, and Algebraic Curves*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **3** (1999) 1657, [hep-th/9912132] • I. Bakas, A. Brandhuber, and K. Sfetsos, *Riemann Surfaces and Schrödinger Potentials of Gauged Supergravity*, hep-th/0002092.

[173] G. V. Dunne, *Perturbative–Nonperturbative Connection in Quantum Mechanics and Field Theory*, hep-th/0207046 • G. V. Dunne and M. Shifman, *Duality and Self-Duality (Energy*

Reflection Symmetry) of Quasi-Exactly Solvable Periodic Potentials, *Ann.Phys.* **299** (2002) 143, [hep-th/0204224].

[174] S. A. Hartnoll and C. Nuñez, *Rotating Membranes on G_2 Manifolds, Logarithmic Anomalous Dimensions and $N = 1$ Duality*, *JHEP* **02** (2003) 049, [hep-th/0210218].

[175] J. Brugues, J. Rojo, and J. G. Russo, *Non-Perturbative States in Type II Superstring Theory from Classical Spinning Membranes*, *Nucl.Phys.* **B710** (2005) 117, [hep-th/0408174].

[176] D. Kamani, *Strings in the pp-Wave Background from Membrane*, *Phys.Lett.* **B580** (2004) 257, [hep-th/0301003] • D. Kamani, *PP-Wave Strings from Membrane and from String in the Spacetime with two time Directions*, *Phys.Lett.* **B564** (2003) 123, [hep-th/0304236] • S. Gangopadhyay, *Strings in pp-Wave Background and Background B-field from Membrane and its Symplectic Quantization*, *Phys.Lett.* **B659** (2008) 399, [arXiv:0711.0421].

[177] M. Beccaria and V. Forini, *Four Loop Reciprocity of Twist Two Operators in $\mathcal{N} = 4$ SYM*, *JHEP* **03** (2009) 111, [arXiv:0901.1256].

[178] B. S. Acharya, *On Realising $N = 1$ Super Yang-Mills in M-Theory*, hep-th/0011089 • M. Atiyah, J. Maldacena, and C. Vafa, *An M-theory Flop as a Large N Duality*, *J.Math.Phys.* **42** (2001) 3209, [hep-th/0011256] • M. Atiyah and E. Witten, *M-Theory Dynamics on a Manifold of G_2 Holonomy*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **6** (2003) 1, [hep-th/0107177] • M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü, and C. N. Pope, *Supersymmetric M3-Branes and G_2 Manifolds*, *Nucl.Phys.* **B620** (2002) 3, [hep-th/0106026] • S. Gukov, *M-theory on Manifolds with Exceptional Holonomy*, *Fortschr.Phys.* **51** (2003) 719.

[179] A. V. Belitsky, S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky, and A. N. Manashov, *Dilatation Operator in (Super-) Yang-Mills Theories on the Light-Cone*, *Nucl.Phys.* **B708** (2005) 115, [hep-th/0409120].

[180] N. Gromov and G. Sizov, *Exact Slope and Interpolating Functions in $\mathcal{N} = 6$ Supersymmetric Chern-Simons Theory*, *Phys.Rev.Lett.* **113** (2014), no. **12** 121601, [arXiv:1403.1894].

[181] E. Pomoni, *Integrability in $\mathcal{N} = 2$ Superconformal Gauge Theories*, *Nucl.Phys.* **B893** (2015) 21, [arXiv:1310.5709].

[182] R. Kallosh and J. Rahmfeld, *The GS String Action on $AdS_5 \times S^5$*, *Phys.Lett.* **B443** (1998) 143, [hep-th/9808038] • R. Kallosh, J. Rahmfeld, and A. Rajaraman, *Near Horizon Superspace*, *JHEP* **09** (1998) 002, [hep-th/9805217] • R. Kallosh and A. A. Tseytlin, *Simplifying Superstring Action on $AdS_5 \times S^5$*, *JHEP* **10** (1998) 016, [hep-th/9808088] • N. Drukker, D. J. Gross, and A. A. Tseytlin, *Green-Schwarz String in $AdS_5 \times S^5$: Semiclassical Partition Function*, *JHEP* **04** (2000) 021, [hep-th/0001204] • A. A. Tseytlin, *"Long" Quantum Superstrings in $AdS_5 \times S^5$*, hep-th/0008107.

[183] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark, eds., *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[184] P. F. Byrd and M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*. Springer-Verlag, 1971.

[185] B. C. Carlson, *Numerical Computation of Real or Complex Elliptic Integrals*, *Numerical Algorithms* **10** (march, 1995) 13, [math/9409].

[186] J. H. Lambert, *Observations variae in mathesin puram*, *Acta Helvitica, physico-mathematico-anatomico-botanico-medica* **3** (1758) 128.

[187] L. Euler, *De serie Lambertina plurimisque eius insignibus proprietatibus*, *Acta Acad.Scient.Petropol.* **2** (1779, 1783) 29–51. http://www.math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E532.pdf.

[188] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth, *On the Lambert W Function*, *Adv.Comput.Math.* **5** (1996) 329.

[189] B. Hayes, *Why W?*, *American Scientist* **93** (2005) 104.

[190] D. Kalman, *A Generalized Logarithm for Exponential-Linear Equations*, *The College Mathematics Journal* (January, 2001) • R. M. Corless and D. J. Jeffrey, *Artificial Intelligence, Automated Reasoning, and Symbolic Computation*, ch. The Wright ω Function, p. 76. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2002.

[191] I. N. Galidakis, *On an Application of Lambert's W Function to Infinite Exponentials*, *Complex Variables. Theory and Applications* **49** (2006) 759.

[192] T. C. Scott and R. B. Mann, *General Relativity and Quantum Mechanics: Towards a Generalization of the Lambert W Function*, math-ph/0607011 • D. Veberič, *Lambert W Function for Applications in Physics*, *Comput.Phys.Commun.* **183** (2012) 2622, [arXiv:1209.0735].

[193] S. Valluri, D. Jeffrey, and R. Corless, *Some Applications of the Lambert W Function to Physics*, *Can.J.Phys.* **78** (2000) 823.

[194] T. C. Scott, J. F. Babb, A. Dalgarno, and J. D. Morgan, *The Calculation of Exchange Forces: General Results and Specific Models*, *J.Chem.Phys.* **99** (1993) 2481.

[195] R. B. Mann and T. Ohta, *Exact Solution for the Metric and the Motion of Two Bodies in (1+1)-Dimensional Gravity*, *Phys.Rev.* **D55** (1997) 4723, [gr-qc/9611008].

[196] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation.* W. H. Freeman and Company, New York, 1999.

[197] G. Ellis and S. Hawking, *The Large Scale Structure of Spacetime.* Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

[198] H. Sonoda, *Analytic Form of the Effective Potential in the Large N Limit of a Real Scalar Theory in Four Dimensions*, arXiv:1302.6059 • H. Sonoda, *Solving Renormalization Group Equations with the Lambert W Function*, *Phys.Rev.* **D87** (2013) 085023, [arXiv:1302.6069].

[199] N. N. Khuri and H. C. Ren, *Explicit Solutions for the Running Coupling Constant and the Separatrix of Quantum Field Theories*, *Ann.Phys.* **189** (1989) 142 • T. Appelquist, A. Ratnaweera, J. Terning, and L. C. R. Wijewardhana, *The Phase Structure of an $SU(N)$ Gauge Theory with N_f Flavors*, *Phys.Rev.* **D58** (1998) 105017, [hep-ph/9806472] • B. A. Magradze, *The Gluon Propagator in Analytic Perturbation Theory*, in *10th International Seminar Quarks '98*, vol. **1**, p. 158, 1999. hep-ph/9808247 • B. A. Magradze, *Analytic Approach to Perturbative QCD*, *Int.J.Mod.Phys.* **A15** (2000) 2715, [hep-ph/9911456].

[200] E. Gardi, G. Grunberg, and M. Karliner, *Can the QCD Running Coupling Have a Causal Analyticity Structure?*, *JHEP* **07** (1998) 007, [hep-ph/9806462].

[201] A. V. Nesterenko, *Analytic Invariant Charge in QCD*, *Int.J.Mod.Phys.* **A18** (2003) 5475, [hep-ph/0308288] • T. L. Curtright and C. K. Zachos, *Renormalization Group Functional Equations*, *Phys.Rev.* **D83** (2011) 065019, [arXiv:1010.5174].

[202] L. Comtet, *Advanced Combinatorics.* Reidel, 1974.

[203] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions.* Bateman Manuscript Project, California Insitute of Technology. McGraw-Hill, New York, 1955.

[204] W. Magnus and S. Winkler, *Hill's Equation.* Dover, New York, 2004.